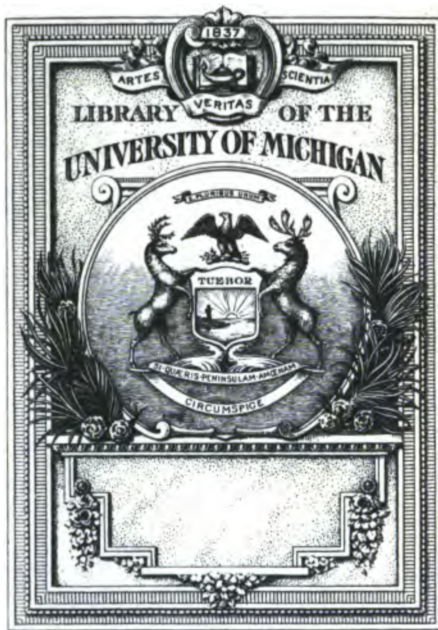
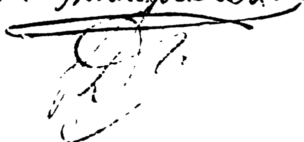

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

LEÇONS

DE

PHYSIQUE

Tout exemplaire de cet ouvrage, non revêtu de la griffe de l'auteur et de celle des éditeurs, sera réputé contrefait.



PARIS. — IMPRIMERIE DE J. CLAYE, RUE SAINT-BENOIT, 7

LEÇONS

DE

PHYSIQUE

PAR

P. DESAINS

PROFESSEUR DE PHYSIQUE PRÈS LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

TOME SECOND. — I^re^ SECTION



PARIS

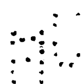
DEZOBRY, E. MAGDELEINE ET C^e^, LIB.-ÉDITEURS

RUE DES ÉCOLES, 78

Près du Musée de Cluny et de la Sorbonne

—

1860



PRÉFACE

Le tome deuxième de ce Traité de physique paraîtra en deux parties.

Dans la première je développe les théories fondamentales de l'acoustique et je commence l'exposition de l'optique.

Dans les chapitres consacrés à l'acoustique j'ai donné avec quelques détails les calculs à l'aide desquels on peut établir à priori les lois de la propagation du son dans les colonnes élastiques, cylindriques ou prismatiques, ou encore les lois des vibrations des cordes. Ces calculs ne supposent d'autres principes que ceux qui sont actuellement compris dans les programmes de l'enseignement secondaire. Au reste, je les ai toujours renfermés dans des paragraphes spéciaux et qu'on pourrait passer à première lecture.

J'ai exposé la théorie des tuyaux sonores en tenant compte des réflexions en nombre indéfini qui ont lieu aux deux extrémités du tuyau, ainsi que l'avait fait M. Quet dans sa *Théorie nouvelle des tuyaux sonores,* et j'ai donné aux calculs une forme qui m'a permis de déterminer aisément l'influence des changements de phase que l'on peut admettre produits à chaque réflexion. Enfin, je montre comment on peut faire concorder cette hypothèse d'un changement de phase avec les résultats des recherches que M. Wertheim a faites il y a déjà dix ans sur les perturbations qui ont lieu à l'origine ou à l'extrémité des tuyaux.

Je développe les méthodes optiques que M. Lissajous a introduites dans l'étude de l'acoustique, et j'insiste spécialement sur les procédés géométriques à l'aide desquels il trouve et expose toutes les propriétés des courbes lumineuses qui lui servent à caractériser les accords.

Je fais connaître aussi un certain nombre d'appareils qui ont été pour la première fois employés aux cours de la Faculté des sciences : les uns sont de M. Lissajous, les autres me sont propres. Souvent aussi nous avons travaillé ensemble à leur construction.

En optique j'ai développé les calculs relatifs aux observations des lentilles et ceux qui guident dans la construction des oculaires à deux verres.

Dans la seconde partie de l'optique je regarderai comme acquis les détails théoriques que j'ai donnés en acoustique sur le principe des interférences, sur la composition des mouvements vibratoires parallèles ou rectangulaires, et je pourrai, par conséquent, aborder plus rapidement l'expo-

sition des expériences à l'aide desquelles on prouve que ces principes rendent compte de tous les phénomènes lumineux connus jusqu'à ce jour.

J'insisterai sur la théorie de la chaleur rayonnante et donnerai le résumé des recherches que nous avons faites depuis dix-sept ans, M. de La Provostaye et moi, sur l'émission, la réflexion, l'absorption, la diffusion et la polarisation de la chaleur. — Les déterminations numériques que nous avons obtenues dans le cours de ces études, les phénomènes nouveaux que nous avons trouvés et les lois que nous avons établies, ont légitimé et développé considérablement les idées de Fourier sur les échanges de chaleur. Il en est ressorti une démonstration expérimentale du théorème énoncé par ce savant géomètre touchant l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants, et il en est ressorti également une solution de la difficulté que signale Poisson, *Annales*, 2e série, tome 26, lorsqu'il énonce que « les phénomènes de polarisation, découverts par M. Bérard, lui paraissent rendre impossible l'équilibre de température dans une enceinte incandescente. »

L'étude des mêmes phénomènes nous a conduits, en outre, à une conséquence importante touchant les analogies de la chaleur et de la lumière.

On savait que la chaleur se réfléchit, se réfracte et se disperse, mais on ne savait pas si cette ressemblance entre les agents calorifiques et lumineux se soutient encore dans les lois qui règlent les variations d'intensité que ces deux agents éprouvent dans des circonstances semblables.

Pour fixer nos idées sur ce point, nous avons d'abord

vérifié que les deux faisceaux dans lesquels un spath bifurque la chaleur qui le traverse sont bien complétement polarisés ; puis faisant successivement tomber chacun d'eux sur un nouveau spath dont la section faisait un angle déterminé avec le plan de polarisation, nous avons constaté que les deux rayons dans lesquels ils se divisent suivent exactement la loi de Malus dans les variations d'intensité qu'ils subissent.

Ce premier fait acquis, nous avons cherché comment varie avec l'incidence l'intensité de la réflexion qu'éprouve sur le verre un faisceau de chaleur complétement polarisé soit dans la place d'incidence, soit dans un plan perpendiculaire, et nous avons constaté que les formules de Fresnel, à l'aide desquelles on représente dans les deux cas la réflexion de la lumière solaire blanche, représentent tout aussi bien la réflexion de la chaleur qui l'accompagne.

Le *Mémoire* où nous avons établi ces propositions a été publié aux *Comptes rendus* du 30 juillet 1849 et aux *Annales,* tome 27, 3e série (1849).

Pour nous il résolvait la question. Toutefois il était interessant de suivre cette comparaison de la chaleur et de la lumière en opérant avec des faisceaux aussi homogènes que possible au point de vue de l'indice. — Elle a toujours conduit à des résultats semblables à ceux que nous avions établis dans le *Mémoire* que nous venons de citer. Ainsi, dans la séance du 24 juin 1850, nous avons déposé à l'Académie un travail dans lequel nous prouvions que l'action rotatoire d'une substance active est la même sur des rayons de chaleur et sur des rayons de lumière de

même indice. Le 8 juillet 1850, MM. Masson et Jamin annonçaient que de pareils rayons sont absorbés en même proportion par les mêmes milieux. Enfin, quelques mois plus tard, nous constations que la réflexion sur un métal poli fait varier dans la même proportion le pouvoir éclairant et le pouvoir calorifique d'un faisceau de rayons solaires ayant tous même indice de réfraction.

Je ne développerai pas davantage ici ces renseignements historiques relatifs à la théorie de la chaleur rayonnante ; il est pourtant une remarque analogue aux précédentes que je crois devoir faire encore.

Dans le premier volume de ce Traité je n'ai pas cité le nom de M. Person à l'occasion des recherches qui ont fixé la valeur de la chaleur latente de fusion de la glace. Le travail de M. Person est postérieur de plusieurs années au nôtre. Il ne change en aucune façon les nombres que nous avons assignés comme valeur de cette chaleur latente à zéro.

Le livre IX et dernier du second volume sera consacré à l'étude de l'électricité dynamique.

ERRATA.

Pages	9,	lignes	2.	De signaler d'abord.	Lisez.	De signaler.
—	30,	—	3.	$n_1, - l,$	—	$x_1 - l.$
—	43,	—	43.	Saxa pare.	—	Saxa pares.
—	49,	—	5.	Par l'équation IM.	—	Par l'équation.
—	49,	—	27 et 28.	OM	—	OM'.
—	54,	—	3.	la^4	—	la_4.
—	64,	—	12.	La phase differra.	—	La phase, abstraction faite des circonférences entières, différera.
—	64,	—	25.	Idem.	—	Idem.
—	73,	—	20.	Savari.	—	Savart.
—	81,	—	12.	$= \frac{\omega\varrho}{g} dn, \ldots \frac{d^2u}{dt^2}$ ou	—	$= \frac{\omega\varrho}{g} dx \frac{d^2u}{dt^2}$ ou
—	111,	—	24.	Q.	—	$Q - \tau$.
—	130,	—	22.	$x = A \cos 2\pi n$	—	$x = A \cos 2\pi nt$.
—	324	—	18, 19 et 20.	La courbe, etc.	—	La courbe qui joindra

les extrémités de ces ordonnées différera peu d'une ligne droite. Elle ne présentera rien de particulier dans le voisinage de oY, et...

LEÇONS

DE PHYSIQUE

LIVRE VI

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRODUCTION DES SONS. — CARACTÈRES QUI LES DISTINGUENT.

§ 1. — PRODUCTION DES SONS.

Le son est toujours le résultat d'un mouvement excité dans un corps et transmis à l'organe auditif par une suite non interrompue de milieux élastiques.

Pour établir cette proposition, déjà formulée par Aristote [1], il suffit de passer en revue les principales circonstances dans lesquelles on entend des sons, et de montrer que dans toutes, on trouve satisfaite la condition que nous venons d'énoncer.

Quand une cloche résonne, si l'on approche une pointe fine de sa paroi, on entend très-distinctement une série de chocs qui prouvent l'existence du mouvement périodique dont elle se trouve animée.

Lorsqu'on pince une corde tendue et qu'on l'abandonne à elle-même, elle semble se renfler vers son milieu; et ce phénomène indique que, dans ses oscillations successives, elle passe rapidement de l'une à l'autre des limites de l'espace que son apparente dilatation semble lui faire occuper.

Si l'on fait parler un diapason un peu fort BC (fig. 398), la

1. Ψόφος εστι κινησις, εκ τινος, εν τινι, προς τι.

vibration dont il est le siége peut être rendue évidente par une expérience bien simple : on approche de l'extrémité supérieure de l'une de ses branches, une bille d'ivoire D suspendue à un

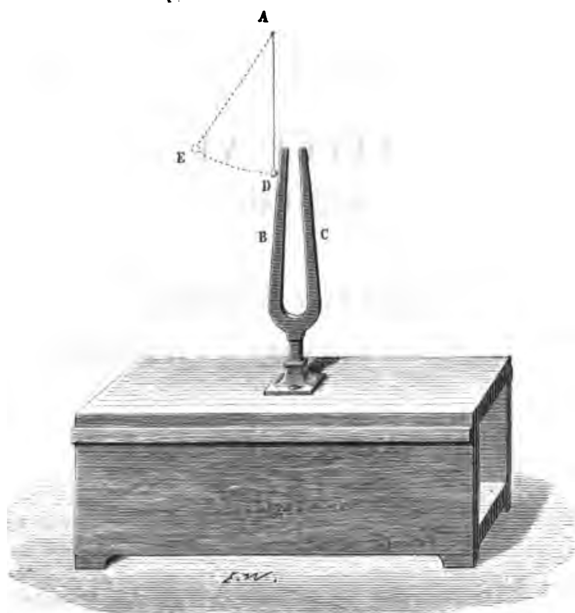


Fig. 398.

fil un peu long AD, et les chocs successifs que cette bille reçoit la lancent souvent à une grande distance AE.

On obtient un effet analogue lorsque, faisant résonner une longue verge par une friction longitudinale exercée à l'une de ses extrémités, on amène au contact de l'autre le pendule dont nous venons de parler.

En étendant cette analyse à tous les cas de production du son, on serait toujours conduit aux mêmes conclusions; on trouverait toujours comme cause première de l'impression sonore une vibration rapide ou une série d'impulsions rapidement imprimées aux molécules d'un milieu élastique pondérable.

Ce second énoncé comprend évidemment le premier; peut-être même a-t-il sur lui l'avantage de paraître plus immédiatement

applicable à certains genres d'ébranlements sonores sur la description desquels nous allons maintenant insister.

Si l'on approche une carte des dents d'une roue dentée qui tourne lentement sur elle-même, on n'entend d'abord que des chocs séparés et dont l'ensemble n'a rien qui ressemble à un son musical; mais si l'on accélère le mouvement de la roue, cette série de chocs successifs se change en un son continu, parfaitement comparable, quant à sa valeur musicale, à celui d'une corde, d'un diapason, etc., etc.

Sirène acoustique. — Il est surtout un instrument, précieux pour les recherches acoustiques, et qui sert très-bien à montrer comment, même en des conditions toutes différentes de celles qui se trouvent réalisées dans les instruments de musique ordinaires, les sons peuvent être produits par des impulsions rapides et périodiques imprimées à un milieu liquide ou gazeux.

L'appareil dont nous parlons est connu sous le nom de *sirène*

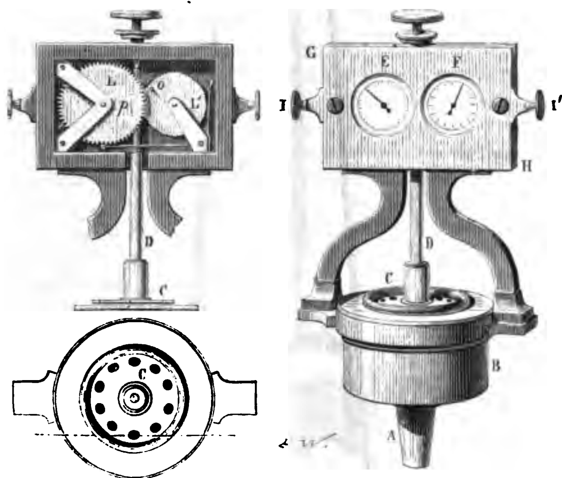


Fig. 399.

acoustique; il a été imaginé par M. Cagnard-Latour; la figure 399 en représente à la fois une vue d'ensemble et une coupe verticale.

B, est une sorte de boîte cylindrique faisant fonction de porte-vent. La base supérieure est circulaire; elle est percée d'un certain nombre *n* de trous, régulièrement espacés sur une circonférence concentrique avec elle.

Parallèlement à cette base, et presque en contact avec sa face

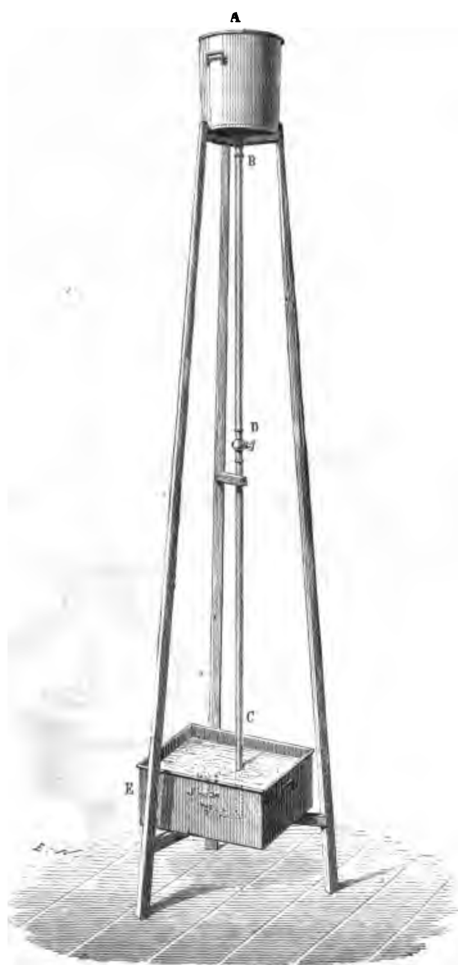


Fig. 400.

supérieure, est une seconde tablette mobile C, supportée par un axe D perpendiculaire à son plan, et percée de trous en nombre

égal à ceux du porte-vent; ces trous sont placés à même distance du centre que ceux du porte-vent; et ils peuvent leur correspondre exactement.

Ceci posé, admettons que l'on souffle l'air par le porte-vent A, et que l'on fasse tourner l'axe D : à chaque tour il arrivera *n* fois que les trous de la plaque mobile C coïncideront avec ceux de B. Le courant d'air pourra donc s'établir *n* fois par tous les orifices à la fois; mais *n* fois aussi il sera interrompu. Ces alternances d'écoulement et d'arrêt dans la veine gazeuse produisent dans la tranche d'air placée extérieurement au-dessus de chaque trou de la table fixe, un mouvement analogue à celui qu'y exciterait un diapason exécutant par seconde *n* oscillations complètes, c'est-à-dire *n* allées et autant de retours; en d'autres termes enfin $2n$ battements. On doit donc penser qu'un son doit résulter du mouvement particulier dont nous venons d'indiquer la production. L'expérience vérifie ce résultat, et cela quel que soit le fluide qui s'écoule à travers la sirène.

Pour la faire parler dans l'eau, on la place au milieu de ce liquide, comme on le voit fig. 400, et l'on visse le porte-vent sur un long tube CB qui se rend à un réservoir supérieur A — Lorsqu'on ouvre le robinet D, l'écoulement commence, la tablette mobile se met en mouvement, et le son est produit.

On pourrait réduire à l'unité le nombre des ouvertures de la tablette fixe, le son serait moins intense; du reste, il n'éprouverait aucune modification dans sa valeur musicale.

Il est une autre remarque, sur laquelle il est très-important d'insister : les axes des trous des deux tables ne sont pas dirigés perpendiculairement à celles-ci. Ils sont inclinés sur elles de 45°, et cela, en sens inverse dans les deux tablettes, en telle sorte qu'au moment de la coïncidence ils se trouvent à angle droit l'un sur l'autre, et le courant qui s'échappe par l'orifice inférieur vient frapper normalement la paroi de l'orifice supérieur.

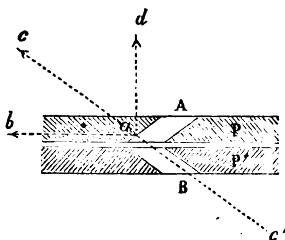


Fig. 401.

Enfin, toujours au moment de la coïncidence, le plan qui passe par les axes des deux orifices est normal au rayon mené au centre de mouvement. La figure 401 représente la section faite par ce plan dans les deux tablettes de l'appareil. Elle montre immédiatement comment le seul écoulement du fluide

imprime à la plaque supérieure un mouvement de rotation. En effet: Le choc qui s'exerce en *a* suivant la direction de la flèche B*ac* est équivalent à deux impulsions, l'une *ad* parallèle à l'axe et détruite par sa résistance, l'autre *ab* tangentielle, c'est-à-dire dirigée dans le sens du mouvement possible du point *a* et par suite complétement efficace.

Extinction des sons dans le vide. — Pour déterminer une impression sur nos organes, les mouvements vibratoires que nous venons de décrire doivent se transmettre jusqu'à nous par une suite non interrompue de milieux élastiques. — Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le corps ébranlé peut bien vibrer, mais l'oreille n'est pas affectée et il n'y a pas de sensation sonore.

On prouve cette proposition à l'aide d'une expérience faite originairement par Boyle et Otto de Guéricke.

Sous le récipient d'une machine pneumatique, on dispose sur un coussinet de liége ou sur un petit matelas de coton une sonnerie d'horloge, qu'un ressort peut faire mouvoir pendant une dizaine de minutes. — On fait le vide, et alors quoique le marteau continue à frapper le timbre toujours de la même manière, le son s'éteint et finit par disparaître complétement. Pour l'entendre de nouveau, il suffit de rendre l'air, ou simplement de toucher les parois du timbre avec une tige élastique en bois ou en métal, mobile à travers une boîte à cuir. —Cette dernière remarque explique pourquoi la sonnerie doit reposer sur des coussins dépourvus de toute élasticité.

On peut encore faire le vide dans un grand ballon au centre duquel pend une petite clochette tenue par un paquet de fils de lin sans torsion. En secouant le ballon on détermine le choc du battant contre les parois de la cloche; mais si l'air a été bien épuisé, il n'y a pas de son entendu.

§ 2. — CARACTÈRES DISTINCTIFS DES SONS. VALEUR MUSICALE.

Timbre, intensité. — Les sons se distinguent les uns des autres par le timbre, l'intensité et la valeur musicale, c'est-à-dire la gravité ou l'acuité.

Nous n'insisterons pas sur les hypothèses à l'aide desquelles on cherche à expliquer la différence qui existe entre les timbres des sons rendus par deux instruments différents à l'unisson, un violon et une flûte, un diapason et la voix humaine, etc., nous nous bornons à constater que cette différence est aisément per-

ceptible même pour les oreilles les moins exercées. Quant à l'intensité, elle dépend, toutes choses égales d'ailleurs, de l'amplitude des vibrations du corps sonore. Ainsi, dans l'air ordinaire, l'intensité du son produit par un diapason, par une corde, par un timbre, est maximum au moment de l'ébranlement, c'est-à-dire à l'instant où les oscillations du corps vibrant ont le plus d'amplitude.

Elle décroît avec la distance au centre d'ébranlement; et quand les vibrations sont excitées dans l'air ou plus généralement dans un gaz, elle diminue avec la densité de celui-ci. Ainsi, dans l'expérience décrite page 6, l'intensité du son du timbre diminue progressivement avec la pression de l'air intérieur. On sait de même que le bruit d'un coup de fusil tiré sur une haute montagne est bien moins intense que dans la plaine, ce qui s'explique par la faible densité de l'air au lieu de l'explosion [1].

Gravité, acuité. — Des trois qualités fondamentales du son, celle sur laquelle on a le plus de renseignements précis est sans contredit la valeur musicale, c'est-à-dire la gravité ou l'acuité.

Un son est d'autant plus aigu que le mouvement vibratoire qui lui donne naissance est plus rapide. Ainsi, comme nous l'avons déjà remarqué, le son d'une roue dentée s'élève progressivement lorsque les chocs des dents contre la carte deviennent plus fréquents, et dans la sirène, l'acuité devient extrême lorsque, sous l'influence d'un courant d'air rapide, la table mobile tourne avec une grande vitesse.

Détermination du nombre des vibrations d'un son. — Un savant religieux, contemporain et ami de Pascal et de Descartes, le père Mersenne, de l'ordre de Saint-François, parvint le premier à compter les nombres de vibrations qui correspondent aux différents sons de l'échelle musicale. Nous exposerons plus tard la méthode par laquelle il arriva à la solution de ce problème fondamental. En ce chapitre, nous nous bornerons à décrire deux procédés qui, sans être plus commodes que ceux du P. Mersenne lorsqu'il ne s'agit que de comparer la valeur de deux sons, donnent une précision plus grande à la détermination de la valeur absolue de chacun d'eux.

La sirène de M. Cagnard-Latour peut être employée très-avan-

1. L'affaiblissement du son qui résulte en ces localités de la grande dilatation des couches aériennes n'empêche pas l'audition de se faire à de très-grandes distances. Mais ce nouveau résultat, nettement établi par les expériences de MM. Martins et Bravais, s'explique, suivant ces savants observateurs, par le silence absolu qui règne dans ces hautes régions.

tageusement pour atteindre le but dont il s'agit. Il suffit de lui adapter un compteur indiquant le nombre de tours faits par la plaque mobile en un temps déterminé ; voici comment on y arrive. — L'arbre qui soutient cette plaque (voir fig. 399) porte à sa partie supérieure une vis sans fin qui peut engrener avec une première roue L', et qui, à chaque tour, la fait marcher d'une dent. Cette première roue, à l'aide d'une pointe *o*, perpendiculaire à son plan, fait à son tour avancer également d'une dent, à chacune de ses révolutions, une seconde roue L dont le plan est parallèle à celui de la première, sans coïncider avec lui.

Les deux roues L et L' sont portées par une plaque qui peut prendre un très-léger mouvement de droite à gauche ou de gauche à droite, en sorte que pour faire engrener la vis sans fin avec L', il suffit d'appuyer sur un des boutons I ou I'. Le mouvement de chaque roue est rendu visible sur la face antérieure de la plaque par les mouvements correspondants d'aiguilles attachées à leurs axes et mobiles sur des cadrans.

Sur la figure 399, on voit, contre chacune des deux roues, de petits ressorts destinés à détruire instantanément la vitesse qu'elles ont acquise, au moment où, l'on désengrène en repoussant la plaque à laquelle est attaché tout le système du compteur.

Les déterminations se font de la manière suivante : la sirène étant disposée sur une soufflerie, on règle le mouvement du pied, et la pression que l'on exerce avec la main sur la tige du soufflet, de telle sorte que l'appareil se maintienne à l'unisson du son à mesurer. Alors, on observe la position des aiguilles sur les cadrans, on prend l'heure sur un compteur à secondes, et en même temps on engrène.

Au bout de quelques minutes, on désengrène et l'on regarde la nouvelle position des aiguilles sur les deux cadrans.

Supposons que la table mobile ait 10 trous, la première roue 100 dents et la seconde 50. Supposons, de plus, que les aiguilles étant primitivement au zéro, soient retrouvées, la première à 35 et la seconde à 42. Il y aura eu évidemment un nombre de tours de l'arbre égal à $42 \times 100 + 35$, et comme chaque tour répond à 10 oscillations doubles ou 20 vibrations simples, il y aura eu en tout un nombre de vibrations simples égal à $20 \times 4235 = 84700$ exécutées pendant le temps de l'expérience, 90" par exemple, et alors on pourra affirmer que le son, dont il s'agit de trouver la valeur, répond à $\frac{84700}{90} = \frac{8470}{9} = 941$ vibrations à la seconde.

Quelque service qu'il puisse rendre à la science, ce procédé comporte certaines causes d'erreur qu'il importe de signaler d'abord. Le mouvement des aiguilles n'indique pas les fractions de tours de l'arbre, et par suite il y a toujours sur le nombre des vibrations simples une première incertitude possible égale au double du nombre des trous de la plaque mobile.

Au moment où l'on engrène, il y a nécessairement une certaine perturbation apportée au mouvement de l'appareil; puis, quelque habitude que l'on ait, il est impossible de maintenir le son absolument fixe pendant toute la durée de l'expérience, et enfin, il y a toujours d'inévitables erreurs sur l'époque précise où commence et où cesse la marche des aiguilles.

Le seul moyen d'atténuer l'influence de ces causes perturbatrices, est de prolonger le temps de l'expérience.

On emploie souvent aujourd'hui, pour fixer la valeur d'un son, une méthode toute graphique, dont la première idée est due à T. Young.

A l'extrémité d'une des branches d'un diapason on attache une pointe métallique, de telle sorte que pendant le mouvement son extrémité décrive une petite ligne droite parallèle au plan des deux branches. Puis on noircit à la bougie une lame de verre, et après avoir ébranlé le diapason on la fait passer rapidement contre la pointe en lui donnant un mouvement perpendiculaire à la direction que suit cette dernière. On obtient alors un tracé ondulé, dans lequel chaque vibration du diapason est représentée par une dent de la ligne sinueuse inscrite sur le noir.

Ainsi donc on peut forcer un corps qui résonne à inscrire lui-même ses vibrations sur un tableau quelconque, et l'on conçoit immédiatement l'usage de ce tracé graphique.

S'agit-il de déterminer un point de départ, un son fixe comme disaient les anciens amateurs d'acoustique, on commencera par ajuster un diapason muni d'une pointe, à l'unisson de ce son; puis on le forcera à écrire ses vibrations sur la surface d'un cylindre ou sur celle d'un cercle tournant d'un mouvement uniforme et connu, et alors en comptant à la loupe le nombre de zigzags contenus entre deux plans ou deux rayons passant par le centre du mouvement et renfermant entre eux un angle connu, on en déduira immédiatement le nombre de vibrations à la seconde.

L'appareil représenté figure 402 peut servir au but que nous indiquons ici. Il a été construit par M. Froment sur la demande de M. Pouillet.

AB est une roue de volée qui prend un mouvement parfaitement uniforme sous l'influence d'un moteur électrique.

D, un diapason que l'on approche à volonté de la surface du cylindre.

Enfin, V est un vernier destiné à la mesure des angles.

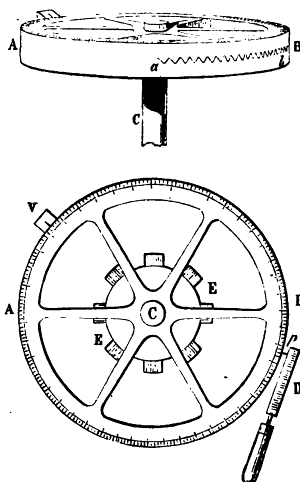


Fig. 402.

S'il s'agissait de comparer deux diapasons entre eux, la chose serait plus facile encore ; il suffirait de les faire vibrer en même temps et de chercher les nombres des traces qu'ils impriment simultanément dans un même angle au centre. Cette méthode de comparaison est très-précise, parce qu'elle n'exige pas l'uniformité du mouvement de la plaque mobile. Nous aurons bien des fois occasion de citer les résultats auxquels elle a conduit.

CHAPITRE II

INTERVALLES MUSICAUX.

§ 1. — VALEURS NUMÉRIQUES DES INTERVALLES MUSICAUX.

Accords. — Lorsque l'on entend au même instant, ou tout au moins à deux époques très-voisines, deux sons différents, il résulte des deux impressions qu'ils nous causent, une sensation particulière qui caractérise et définit l'intervalle musical qui existe entre eux.

La sensation dont il s'agit ici change complétement lorsque l'on fait varier un seul des deux éléments qui concourent à la déterminer. Mais elle peut conserver son caractère, rester musicalement la même lorsqu'on élève ou que l'on abaisse à la fois et convenablement les deux sons composants.

Évidemment, dès lors, il est naturel de chercher s'il existe quelque relation simple entre les nombres de vibrations de deux sons produisant par leur réunion un accord, toujours le même, quelle que soit d'ailleurs la place qu'ils occupent dans l'échelle musicale.

Or, si l'on applique à la solution de la question les méthodes exposées aux pages précédentes, on trouve que la constance du rapport musical correspond à celle du rapport géométrique existant entre les nombres de vibrations qui correspondent aux deux notes de l'accord.

Les intervalles musicaux les plus connus, ceux que l'oreille apprécie avec le plus de facilité sont distingués sous les noms d'octave, de quinte, de quarte, de tierce majeure et mineure. Ils correspondent aux rapports très-simples : $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$. C'est-à-dire que si deux corps sonores donnent des sons à l'octave, celui qui produit le son le plus aigu exécute dans le même temps deux fois plus de vibrations que l'autre, etc.

De tous ces intervalles, l'octave est celui que nous reconnaissons le plus facilement, celui sur la justesse duquel nous sommes le plus difficiles ; au point de vue musical, il est la somme d'une

quarte et d'une quinte : en effet, si l'on considère trois sons tels que le second, soit à la quarte du premier, et le troisième à la quinte du second, le troisième de ces sons correspondra à un nombre de vibrations double de celui qui caractérise le premier.

Gamme. — Ordinairement, on divise cet intervalle d'octave en sept autres que l'on appelle tons et demi-tons, et dont la succession porte le nom de gamme, lorsqu'elle s'opère suivant un certain ordre que nous allons faire connaître. Les sons qui limitent chacun de ces intervalles partiels s'appellent *notes*.

Le tableau suivant contient les noms des notes de la gamme naturelle majeure.

Le nombre écrit immédiatement au-dessous de chaque note représente l'intervalle qui la sépare de celle qui commence la série.

Enfin la troisième ligne du tableau contient les valeurs numériques des intervalles de deux notes consécutives quelconques.

ut		*ré*		*mi*		*fa*		*sol*		*la*		*si*		*ut*
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		2
	$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

L'intervalle $\frac{9}{8}$ porte le nom de ton entier majeur, $\frac{10}{9}$ celui de ton entier mineur $\frac{16}{15}$, est le demi-ton.

Ainsi, chanter une gamme naturelle majeure (en *ut*), c'est chanter une série de notes telles que les intervalles qui les séparent, soient successivement :

Un ton majeur, un ton mineur, un demi-ton, un ton majeur, un ton mineur, un ton majeur, un demi-ton.

Quel que soit le point de départ, une fois que cette succession sera observée on aura la gamme naturelle majeure.

Comma. — Le ton entier majeur et le ton entier mineur diffèrent très-peu l'un de l'autre.

En effet, que l'on conçoive deux notes a et b différentes d'une troisième c, la première a d'un ton majeur, et la seconde b d'un ton mineur, et que l'on prenne pour unité le nombre de vibrations de c; celui de a sera $\frac{9}{8}$, celui de b $\frac{10}{9}$: le rapport est $\frac{81}{80}$. Lorsque deux notes sont aussi peu distinctes l'une de l'autre, elles peuvent être confondues dans l'usage.

Et pourtant il est facile de faire apprécier l'intervalle qui les

sépare. On met bien à l'unisson les deux cordes d'un sonomètre, puis on divise l'une en deux parties égales par un chevalet et l'autre en deux parties ayant entre elles les rapports de 81 à 80. On touche les deux moitiés de la première corde, et l'on constate qu'elles sont bien à l'unisson. Si, au contraire, on fait vibrer les deux portions de la seconde, on perçoit une différence sensible entre les sons qu'elles rendent.

Dièses et bémols. — La différence qui existe entre la somme de deux demi-tons et l'intervalle du ton majeur ou mineur entier est notablement supérieur au comma.

Pour devenir ton entier mineur, le demi-ton doit en effet être multiplié par $\frac{25}{24}$ et non pas par $\frac{16}{15}$.

En effet, $\frac{25}{24} \times \frac{16}{15} = \frac{5.2}{3.3} = \frac{10}{9}$.

Ce nouvel intervalle $\frac{25}{24}$ est connu sous le nom de *dièse*.

Il est fort employé en musique et les remarques suivantes permettront d'en apprécier l'utilité.

Transposition. — Lorsque l'on sait chanter juste, ou manier convenablement un violon ou une basse, on peut toujours en prenant pour point de départ un son compris entre les limites que ces instruments peuvent atteindre, produire une série de notes ayant entre elles et avec la première des rapports déterminés; par exemple, on peut jouer ou chanter une gamme naturelle ayant pour point de départ inférieur un son arbitrairement choisi. Mais si l'on n'avait à sa disposition qu'un instrument à sons fixes et ne donnant que des gammes successives de notes naturelles, on se trouverait souvent dans l'impossibilité d'atteindre le but proposé, et cela quand même on négligerait la différence qui existe entre les tons entiers majeurs et mineurs.

Par exemple, si l'on considère la série des sept intervalles musicaux consécutifs qui se succèdent à partir d'un des *fa* de notre instrument, on la trouvera formée de trois tons, un demi-ton, deux tons, un demi-ton; tandis qu'à partir d'un *ut* la série serait de deux tons, un demi-ton, trois tons, un demi-ton. Ces deux séries d'intervalles musicaux sont différentes l'une de l'autre; elle ne constituent pas le même chant.

Toute difficulté disparaît dès l'instant que dans l'échelle musicale, ou dans le registre des instruments à sons fixes, on admet avec les notes naturelles, celles qu'on en déduit en les haussant dans le rapport de 25 à 24, ce qui s'appelle les *dièser*, ou en les

abaissant dans le rapport de 24 à 25 ce qui s'appelle les *bémoliser*.

Et cela se conçoit, puisque d'une part, en multipliant par $\frac{24}{25}$ l'intervalle que nous appelons ton entier mineur, on le transforme en demi-ton, et que, d'autre part, l'intervalle qui existe entre le ton entier majeur et le ton entier mineur n'est que d'un comma.

Dans l'exemple que nous avons choisi, il suffirait de bémoliser le *si* pour obtenir à partir du *fa* la série suivante :

Deux tons, un demi-ton, trois tons, un demi-ton, c'est-à-dire celle que nous voulions avoir.

L'introduction des dièses et des bémols est donc d'une extrême utilité. Il ne faudrait pas croire, toutefois, qu'elle permette de résoudre d'une façon absolue toutes les difficultés qui peuvent se présenter.

Tempérament. — Ainsi, par exemple, dans une échelle musicale procédant par octaves justes, les quintes successives d'une des notes naturelles de la série cesseraient bientôt de se trouver dans la série; par exemple, si nous désignons par *ut* le son fondemental de l'échelle, sa douzième quinte serait comprise entre ut_8 et ut_8 ♯, et cela à une distance de l'une ou de l'autre de ces notes supérieure au comma. Mais cette objection, sur laquelle il était bon d'appeler l'attention est en réalité plutôt théorique que pratique, et dans les cas ordinaires l'introduction des dièses et des bémols est bien suffisante.

Au reste, dans la pratique, non-seulement les intervalles secondaires mais même les intervalles fondamentaux de tierce et de quinte reçoivent souvent des altérations à l'explication desquelles il est bon de consacrer quelques lignes.

Dans la construction des instruments à sons fixes, des pianos, par exemple, il serait fort gênant de multiplier assez les cordes, pour avoir, dans toute l'étendue des sept octaves que l'on veut parcourir, non-seulement les notes naturelles, mais encore leurs dièses et leurs bémols.

On divise alors l'octave en douze intervalles secondaires musicalement égaux, et dont la valeur arithmétique est de $\sqrt[12]{2}$; cette valeur est un peu inférieure au demi-ton, mais elle n'en diffère pas d'un comma. En la doublant musicalement, on obtient un intervalle compris entre le ton entier majeur et le ton mineur; aussi dans la série des douze sons, respectivement représentés par

$$1 \quad \sqrt[12]{2} \quad (\sqrt[12]{2})^2 \quad (\sqrt[12]{2})^3 \cdots\cdots$$

trouve-t-on très-sensiblement les notes naturelles, à savoir :

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
1	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	$(\sqrt[12]{2})^{12}$

De plus les autres termes :

$$(\sqrt[12]{2})^1 \quad (\sqrt[12]{2})^3 \qquad (\sqrt[12]{2})^6 \quad (\sqrt[12]{2})^8 \quad (\sqrt[12]{2})^{10}$$

peuvent être pris pour le dièse de la note inférieure ou le bémol de la supérieure, quoique en réalité ils soient distants de l'une ou de l'autre d'une quantité souvent un peu supérieure au comma.

Pour qu'il soit plus facile de juger de l'exactitude de toutes les assertions précédentes et du degré d'altération de la gamme tempérée, nous allons donner d'abord les valeurs logarithmiques des intervalles musicaux que nous avons définis et employés dans ce chapitre, à savoir le ton entier majeur, le ton mineur, le dièse et le comma.

TABLEAU DES VALEURS LOGARITHMIQUES

DE QUELQUES INTERVALLES MUSICAUX SOUVENT EMPLOYÉS.

NOM DES INTERVALLES.	LOGARITHMIQUE du nombre qui représente l'intervalle.
Ton majeur	0.05115252
Ton mineur	0.0457575
Demi-ton majeur	0.02802870
Demi-ton moyen de la gamme tempérée	0.0250858
Dièze	0.01772877
Comma	0.00539503

D'après ces nombres, on voit que le ton majeur vaut environ neuf comma et demi et, à fort peu près, trois dièzes. Le comma étant sensiblement le tiers du dièze.

Puis nous mettrons en regard, sous forme de tableau, les logarithmes d'une gamme naturelle avec ses dièses et ses bémols,

et les logarithmes d'une gamme tempérée avec ses demi-tons moyens.

TABLEAU DES VALEURS LOGARITHMIQUES

DES DIFFÉRENTES NOTES D'UNE GAMME TEMPÉRÉE.

NOMS DES NOTES de la gamme exacte.	VALEURS LOGARITHMIQUES des Notes.	VALEURS LOGARITHMIQUES des notes de la gamme tempérée.	NOMS DES NOTES de la gamme tempérée.
Ut...........	0.00000000	0.0000000	Ut
Ut #.........	0.01772877	0.0250858	Ut # ou Re b
Re b...	0.03342375		
Re	0.05115252	0.0501716	Re
Re #.........	0.06888129	0.0752574	Re # ou Mi b
Mi b.........	0.07918124		
Mi...........	0.09691001	0.1003432	Mi
Fa b.........	0.10720996		
Mi #.........	0.11463878		
Fa...........	0.12493873	0.1254290	Fa
Fa #.........	0.14266750	0.1505148	Fa # ou Sol b
Sol b.........	0.15836248		
Sol...........	0.17609125	0.1756006	Sol
Sol #.........	0.19382002	0.2006864	Sol # ou La b
La b.........	0.20411998		
La...........	0.22184875	0.2257722	La
La #.........	0.24957752	0.2508580	La # ou Si b
Si b.........	0.25527250		
Si............	0.27300127	0.2759438	Si
Ut b...	0.28330123		
Si #....	0.29072904		
Ut...........	0.30103000	0.3010290	Ut

§ 2. — INDICATIONS HISTORIQUES.

Les accords fondamentaux que nous venons de définir formaient, chez les anciens comme chez nous, la base de l'échelle musicale. Ils portaient alors les noms qu'ils ont encore aujour-

d'hui, et, ce qui est bien plus important, ils sont dans les traités les plus reculés qui nous soient parvenus, désignés numériquement comme ils le sont de nos jours. Ainsi, depuis les premiers pythagoriciens, les fractions $\frac{9}{8}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, sont employées pour représenter le ton τονος, la quarte δια τεσσαρων, la quinte δια πεντε, l'octave δια πασων, et enfin la quinte de l'octave.

Ces nombres figurent aussi dans les fameuses séries symboliques dont Platon expose la génération dans le Timée, et les historiens des premiers siècles de notre ère nous apprennent comment Pythagore les avait obtenus.

D'après Censorinus (*De Die Natali*, chap. x), Pythagore fit parler quatre flûtes ou tuyaux d'orgue dont les longueurs étaient entre elles comme les nombres 6, 8, 9 et 12, et il vit que les deux premiers parlant ensemble rendaient la quarte, le premier et le troisième la quinte, le premier et le quatrième l'octave...

Les intervalles $\frac{10}{9}$ et $\frac{16}{15}$ furent introduits un peu postérieurement. Mais ils étaient employés au temps de Ptolémée. D'après ce savant en effet, le diagramme d'un des genres adoptés à son époque, le genre diatonique de Didyme, était :

$$\frac{16}{15} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$$

En d'autres termes, dans ce genre, on divisait la quarte exactement comme nous la divisons aujourd'hui [1].

Le texte de Censorinus est le plus net de ceux qui indiquent la marche suivie par Pythagore pour arriver aux nombres représentatifs des accords. Toutefois, ils laissent complétement indécise la question de savoir quelle relation existe entre la longueur des deux tuyaux qui rendent un certain accord, et les nombres de vibrations auxquels sont dues les notes de l'accord.

Aristote, il est vrai, dit formellement dans son traité Περι ακουστικων, que « dans tous les accords, les impulsions imprimées à l'air par le son le plus aigu ont lieu en plus grand nombre dans le même temps. » Mais il paraît que Nicomaque de Gerase, néopythagoricien du second siècle de notre ère, est le premier acousticien qui ait mis sous forme de proposition cette vérité fondamentale, « que les nombres, pour représenter les valeurs

1. Voir les *Études sur le Timée* de Platon, par H. Martin, t. I, pages 413 et 417.

des sons musicaux, doivent être proportionnels aux nombres des vibrations qui se succèdent dans un temps donné. »

Quant à la démonstration expérimentale de cette proposition fondamentale, c'est au père Mersenne qu'on la doit.

§ 3. — LIMITES DES SONS EMPLOYÉS, *la* DU DIAPASON.

Limites des sons employés. — Les sons les plus graves que l'on emploie en musique sont donnés par les plus longs tuyaux des orgues d'église; on trouve dans ces grands jeux un *ut* à la double octave de celui de la basse, et qui est donné par un tuyau ouvert d'environ 10 mètres de long (le 32 pieds ouvert) ou par un tuyau bouché de moitié de longueur (le 16 pieds bouché). Le nombre de vibrations qui lui correspond est compris entre 32 et 33.

A l'autre limite de l'échelle musicale on trouve les notes aiguës du violon et des pianos. On ne dépasse guère la triple octave du *la* du diapason. La valeur numérique de cette note est $870 \times 2^3 = 6960$, c'est-à-dire qu'elle résulte de 6960 vibrations simples à la seconde; on conçoit bien, du reste, que ces limites n'ont rien d'absolu. Dans une série de recherches exécutées touchant la sensibilité de l'oreille, M. Despretz a accordé un jeu de diapasons dont le plus petit exécutait jusqu'à 73,000 vibrations par seconde.

Quant à la voix humaine, elle peut, suivant le sexe, l'âge et la conformation, varier dans une étendue d'environ 4 octaves.

Les basses-tailles donnent ordinairement le *mi*; on cite même des chanteurs qui peuvent faire entendre l'ut_1, c'est-à-dire une note qui répond à 130,5 vibrations à la seconde; l'ut_5 est la limite supérieure extrême du soprano, il répond à 2088 vibrations. Entre ces limites chaque individu a un registre différent et comprenant ordinairement deux octaves. Ainsi les ténors descendent ordinairement à ut_2 et atteignent ut_4.

La du diapason. — A ces différentes indications il faut ajouter la remarque suivante : Le nombre de vibrations qui correspond au son rendu par un tuyau de dimensions déterminées est parfaitement constant; il en est de même de celui que l'on obtient avec une corde dont la longueur, la nature, le diamètre et la tension sont déterminés. Les limites de la voix humaine ne dépendent pas non plus, en moyenne, de l'époque à laquelle on les détermine; mais malheureusement il en est autrement des noms par lesquels on désigne les notes que ces nombres de vibrations caractérisent.

Ordinairement, dans les orchestres, on s'accorde sur le *la* de la troisième octave; l'*ut* grave de la basse étant comme nous l'avons déjà marqué désigné par ut_1. Or, on sait positivement que depuis le temps de Louis XIV jusqu'à ces dernières années ce *la* s'était élevé d'un peu plus d'un ton majeur.

En effet, au commencement du XVIII[e] siècle; le *la* généralement adopté exécutait, d'après les déterminations de Sauveur, 810 vibrations par seconde; et la mesure prise en 1858 par M. Lissajous, donne 898 pour valeur du *la* alors adopté à l'Opéra de Paris.

L'ascension a surtout été rapide depuis le commencement de ce siècle. En effet, on possède encore le diapason avec lequel on accordait les clavecins de la cour de Louis XVI. Ce diapason ne fait que 818 vibrations par seconde, tandis que vers 1810 le *la* adopté à Paris répondait déjà à 860, et depuis cette époque il s'est élevé dans la proportion de 898 à 860, c'est-à-dire d'environ $\frac{1}{3}$ ton.

Les inconvénients de ces variations continuelles et progressives étaient évidentes : il en résultait, en effet, qu'au bout d'un certain nombre d'années, les anciens opéras ne pouvaient plus être chantés, au moins dans les passages où entraient, à l'époque où on les a écrits, des notes voisines des limites supérieures de la voix humaine.

L'arrêté ministériel du 16 février 1859 a fait cesser cet état de choses. La valeur numérique du *la* du diapason est désormais de 870 vibrations simples à la seconde, par suite, ut_3 répond à 522 vibrations simples à la seconde, et ut_1, à 130, 5.

CHAPITRE III

PROPAGATION DU SON.

§ 1. — MODE DE PROPAGATION.

L'expérience la plus simple que l'on puisse faire pour donner une idée du mode de propagation du son dans les milieux élastiques est celle que l'on exécute d'ordinaire avec *l'appareil à sept billes d'ivoire*, fig. 403.

Les sept billes sont suspendues à des fils de soie très-flexibles elles se touchent, et sont parfaitement alignées.

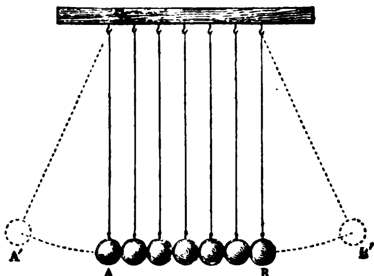


Fig. 403.

Ceci posé, si l'on soulève légèrement la première et qu'on la laisse retomber sur celle qui la suit, on voit aussitôt la dernière se mettre en mouvement sans que les autres aient éprouvé de dérangement appréciable

Ce qui arrive en ces circonstances s'explique aisément : la bille choquée directement se comprime, puis, se détendant comme un ressort, elle transmet à la suivante la compression qu'elle a reçue. Le mouvement se propage; il ne revient pas en arrière, et toutes les billes élastiques qui se le transmettent l'une à l'autre n'éprouvent d'autre effet que des compressions rapides suivies d'un prompt retour à leur forme et à leur état primitif.

La transmission du mouvement sonore se fait d'une manière analogue.

Supposons qu'au milieu d'une couche d'air homogène et de température constante, soit une sphère solide fig. 404 dont le rayon CO puisse tout à coup s'allonger d'une petite quantité OO', de sorte que le volume de la sphère éprouve pendant un temps appréciable, mais très-court θ, une faible dilatation. La surface solide, en se déplaçant, pousse les molécules d'air qui la touchent, et comme la transmission d'un mouvement ne peut se faire d'une façon absolument instantanée, la compression pendant le temps θ ne s'étendra qu'à une distance finie $OD = \delta$ de la position primitive de la surface; à une distance plus grande tout le fluide élastique est encore dans son état naturel. Mais pendant l'instant suivant, la couche d'air comprimée va se détendre, et dans ce retour à sa densité primitive elle comprimera la couche suivante. Celle-ci fait à son tour fonction de ressort, et l'agitation qui a pris naissance contre la sphère solide s'étend uniformément

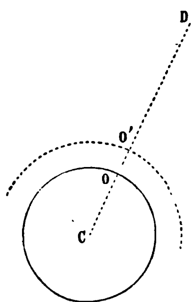


Fig. 404.

dans toutes les directions si tout est semblable autour du centre d'ébranlement.

Ici, comme dans l'expérience des billes d'ivoire, le mouvement ne revient pas en arrière; il ne fait que passer par les molécules qui le transmettent, et si l'ébranlement est de très-courte durée, il a complétement cessé à l'origine lorsqu'il atteint les points un peu éloignés de celle-ci. Ainsi, lorsqu'on tire une arme à feu, on a complétement cessé d'entendre le bruit dû à son explosion au moment où il arrive à l'oreille d'un observateur placé à quelques centaines de mètres.

Presque tous ces caractères de la propagation du son se retrouvent dans les mouvements des ondes que l'on fait naître

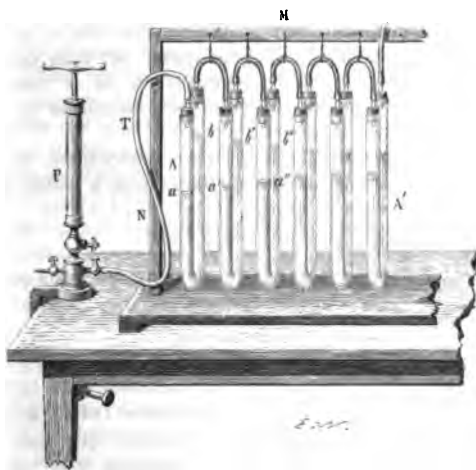


Fig. 405.

à la surface des liquides en choquant un point de leur surface. Seulement ici, c'est en vertu de l'action de la pesanteur que les molécules soulevées autour du centre, sous forme de ride circulaire, retombent et poussent celles qui les suivent, tandis que dans la transmission des ondes sonores, l'élasticité du milieu est la seule force qui se trouve mise en jeu.

On peut, au reste, disposer une expérience dans laquelle le progrès du mouvement se suit à l'œil aussi facilement que dans la transmission des ondes liquides proprement dites, quoique la propagation ne soit en dernière analyse que le résultat des

actions élastiques d'une série de couches d'air successives.

On prend une cinquantaine de tubes en U, tels qu'on les emploie pour sécher les gaz; on les fixe à un support convenable, une tringle de bois, par exemple, de manière que leurs plans soient parallèles entre eux fig. 405.

Tous ces tubes présentent alors une de leurs branches d'un des côtés de la tringle, l'autre de l'autre côté.

On met dans tous un liquide coloré qui s'élève à peu près au milieu de leur hauteur, puis, à l'aide de bouchons et de tubes de caoutchouc, on réunit la branche postérieure du premier à la branche antérieure du second, et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de la série. Si alors on vient à injecter brusquement un peu d'air dans la branche antérieure du premier tube, on voit les niveaux du liquide s'abaisser progressivement en a, a', a''.

A un moment donné, la ligne qui passe par tous ces niveaux affecte la forme d'une courbe allongée ; et si le nombre des tubes est suffisant, on peut voir cette sorte de courbe se propager dans le sens AA'.

La condensation de la couche d'air directement comprimée en A s'est donc successivement communiquée à toutes les autres colonnes élastiques de la série.

§ 2. — DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE PROPAGATION DU SON DANS L'AIR.

L'étude de la propagation du son dans l'air, la recherche des circonstances qui peuvent influer sur la vitesse avec laquelle elle s'opère, ont été depuis deux siècles environ l'objet d'un grand nombre d'expériences. Nous allons en indiquer quelques-unes.

Indications du P. Mersenne. — « Lorsque nous voyons, dit Mersenne, un bûcheron abattre du bois dans une forêt à une distance un peu considérable, nous reconnaissons immédiatement que le bruit de chaque coup de hache met un temps sensible pour arriver jusqu'à notre oreille; de même encore lorsque nous observons de loin l'explosion d'une pièce de canon, nous apercevons la lumière bien avant d'entendre le bruit.

« La propagation du son n'est donc pas instantanée. Avec quelle vitesse se fait-elle, c'est ce que personne n'a pu dire jusqu'ici... Aussi indiquerai-je ici les expériences qui me paraissent pouvoir conduire à quelque chose de certain sur cette matière.

« Il faudra d'abord se servir de canons de calibres différents, pouvant être entendus à deux lieues; secondement, il faudra les

tirer par divers temps et se placer, pour entendre les coups, tantôt sous le vent, tantôt en direction contraire ; troisièmement, on pendra à un clou un fil de trois pieds et demi, portant un poids à sa partie inférieure, et, en observant ses oscillations, on déterminera exactement le nombre de secondes qui s'écoule depuis le moment où l'on verra la flamme du canon jusqu'à celui où l'on entendra le bruit; quatrièmement, il faudra entendre le bruit à trois distances différentes, savoir : à deux lieues, à une lieue et à une demi-lieue, afin de reconnaître si l'espace parcouru est ou non proportionnel au temps employé à le parcourir.

« Cinquièmement, on fera l'expérience par des nuits d'été et d'hiver, par des temps humides et sereins, afin de s'assurer si la différence des états de l'air amène des différences correspondantes dans la vitesse de propagation. Il sera bon, enfin, de faire varier le calibre des pièces, leurs dimensions, la qualité et la quantité de poudre employée à les charger... »

Expériences des académiciens français. — Cent ans plus tard, le programme de Mersenne fut suivi complétement, par les académiciens français dans les expériences qu'ils exécutèrent autour de Paris en l'année 1738.

Les canons étaient des pièces de 12 et de 8 *livres de balles*, et les stations adoptées pour les observations furent le plus souvent Montmartre, l'Observatoire, le château de Lay et la tour de Montlhéry, quelquefois aussi Dammartin et le moulin de Fontenay-aux-Roses.

Il faut ajouter qu'au lieu du pendule primitif de Mersenne, les observateurs étaient munis de montres à secondes, d'horloges astronomiques, et qu'enfin des mesures géodésiques très-précises avaient fait connaître les distances véritables des différentes stations que nous avons nommées.

Voici le détail d'une des séries d'expériences, celle du 14 mars 1758 :

« Le vent, au coucher du soleil, était ouest-nord-ouest très-faible, dans une direction perpendiculaire à celle de Montlhéry à Montmartre ; il devint ensuite presque entièrement calme...

« A 9 heures 30', le premier coup de canon tiré à Montmartre fut entendu à l'Observatoire 16", à Lay 30", et à Montlhéry 1' 25" après le feu. Le second coup de canon fut entendu à l'Observatoire 16" $\frac{1}{2}$, à Lay 36" après la lumière. A Montlhéry, la grande foule de peuple qui était accourue empêcha d'en faire l'observation exactement.

« A 10 heures 0′, le premier coup de canon tiré à Montlhéry fut entendu à Lay, 48″, et à l'Observatoire 1′ 7″ ½ après la lumière; mais on ne put en entendre le bruit à Montmartre, non plus que du second coup de canon qui fut entendu à Lay 48″, et à l'Observatoire un peu moins de 1′ 8″ après la lumière.

« Suivant ces observations on trouve que depuis Montlhéry jusqu'à Lay l'intervalle du temps entre le son et la lumière a été de 48″, depuis Lay jusqu'à l'Observatoire 20″, et depuis Montmartre jusqu'à l'Observatoire 16″ ½ l'une portant l'autre. Les joignant ensemble on aura 1′ 24″ ½. Or, comme les quatre points dont il s'agit sont très-sensiblement en ligne droite, la somme 1′ 24″ ½ doit être égale au temps que l'on trouve en mesurant la transmission directe de Montmartre à Montlhéry, et c'est précisément ce qui a lieu, puisque d'après l'une de nos expériences ce temps s'est trouvé égal à 1′ 25″.

« Cette observation est encore remarquable en ce que dans la même nuit on entendit à l'Observatoire le canon tiré à Montlhéry et réciproquement. Or, si des causes quelconques avaient pu accélérer la propagation du son dans le premier de ces trajets, elles l'auraient retardé dans l'autre; en sorte que la moyenne des deux observations doit donner la vitesse exacte de propagation. »

Par une série assez considérable d'expériences exécutées comme celle dont il vient d'être donné le détail, la commission de l'Académie fut conduite aux conclusions suivantes :

La vitesse de propagation du son est constante; à une température voisine de 6°; la valeur de cette vitesse est 173 toises ou 337 ^{m} à la seconde. Elle est indépendante de l'état du ciel, de l'intensité du son et ne paraît pas dépendre de la pression barométrique. Elle est influencée par le vent qui paraît la diminuer ou l'accroître d'une quantité égale à la composante de sa propre vitesse suivant la direction de la propagation.

Les expériences que nous venons de décrire ne donnaient aucune notion touchant l'influence que la température exerce sur la vitesse du son. Elles n'autorisaient pas non plus à regarder comme certaine la nullité de l'influence des variations de pression ; car les variations. avaient été à peine de 3 centimètres pendant toute la durée des observations. Aussi, de nouvelles recherches ont-elles été faites depuis pour éclairer ces points importants. On a opéré dans l'Inde par une température de + 29° et sous les glaces polaires à 30 et 40° degrés au-dessous de zéro; et toutes ces expériences, parfaitement d'accord en cela avec les idées de Newton, montrent que la vitesse change avec la

température t et qu'elle varie proportionnellement à l'expression

$$\sqrt{1 + (0{,}00367)\,t}$$

Pour voir si réellement la rapidité avec laquelle se propage le mouvement sonore est indépendante de la pression, on a exécuté des mesures directes sur des plateaux très-élevés, à Quito par exemple, dont la pression moyenne n'est que de 0m,553. L'on a constaté que, sous les faibles pressions dont il s'agit, le son se propage avec même vitesse qu'au niveau des mers, pourvu, bien entendu, que la température soit la même.

Le tableau suivant fait connaître les valeurs des vitesses de propagation du son dans l'air aux différentes températures comprises entre — 30° et + 40° calculées par la formule :

$$V = 331{,}30\sqrt{1 + 0{,}00367t}.$$

Température.	Vitesses.
— 30	312,53
— 20	318,90
— 10	325,16
0	331,30
+ 10	337,33
+ 20	343,24
+ 30	349,06
+ 40	354,79

On s'est enfin assuré que le son marche avec la même vitesse en s'élevant du sol vers les régions supérieures de l'atmosphère ou en descendant de celles-ci vers le sol.

Dans toutes les déterminations dont nous parlons il est extrêmement important d'éliminer l'influence perturbatrice du vent, et le seul moyen par lequel on puisse y arriver avec certitude est l'emploi de ces expériences croisées dont Cassini fait si bien ressortir les avantages dans le passage cité aux pages précédentes. Seulement quand on veut donner à ce procédé le degré d'exactitude qu'il comporte, il ne faut pas laisser écouler une heure d'intervalle entre les expériences dont on doit prendre la moyenne.

En 1822 les membres du Bureau des longitudes employaient la méthode du croisement des expériences; mais les coups alternatifs qui devaient se répondre étaient tirés à 5 minutes d'intervalle. L'ensemble des déterminations qu'ils ont faites parais-

sait fixer à 331m 30 la valeur numérique de la vitesse de propagation du son dans l'air à la température de zéro degré. Maintenant on paraît admettre plus volontiers 332,4.

Dans les expériences nombreuses qui ont été faites pour étudier la propagation des sons, on ne s'est jamais aperçu que l'intensité de ces derniers, leur degré de gravité ou d'acuité eût aucune influence sur la vitesse avec laquelle ils se transmettent. L'expérience journalière vérifie d'ailleurs cette manière de voir. La nuit, par un temps calme, on peut entendre un orchestre à une distance considérable, et en ces circonstances on constate sans difficulté que les morceaux ne sont en aucune façon altérés. Or, cela n'aurait évidemment pas lieu si la vitesse de propagation dépendait de la vitesse absolue du mouvement du corps sonore, ou du degré de fréquence de ses vibrations.

§ 3. — VITESSE DE PROPAGATION DU SON DANS L'EAU.

Les procédés à l'aide desquels on a déterminé la vitesse de propagation du son dans l'air s'appliquent sans modification importante à l'étude de sa transmission dans l'eau.

Expériences de M. Beudant. — M. Beudant, qui s'est, le premier, occupé de cette recherche, a expérimenté sur la Méditerranée près de Marseille. Un timbre placé sous l'eau était frappé au moment ou l'aiguille d'un chronomètre passait sur une division convenue, et un nageur qui plongeait à une distance connue du centre l'ébranlement faisait connaître par un signal l'instant où le son arrivait à son oreille.

En comparant le temps de la transmission à la longueur de l'espace parcouru, on pouvait déterminer la vitesse cherchée, et les résultats obtenus par M. Beudant l'ont conduit à admettre que, dans les circonstances où il s'était placé, le son dans l'eau de mer parcourait environ 1,500 mètres à la seconde.

Expériences de M. Colladon. — M. Colladon a repris la question, et il a établi que la vitesse de propagation du son dans l'eau pure est de 1435 mètres à la seconde. Les expériences de ce savant ont été publiées en 1827; elles ont été faites sur le lac de Genève.

A l'une des stations on avait amarré à 200 mètres du rivage un bateau portant une poutre très-solide au-dessous de laquelle était suspendue une cloche d'environ 7 décimètres de haut (fig. 406).

Un marteau extérieur à la cloche pouvait en frapper la surface à la volonté de l'opérateur, et l'instant du choc était accusé par

l'inflammation d'un tas de poudre, sur lequel s'abattait une lance à feu au moment même où la percussion de la cloche avait lieu.

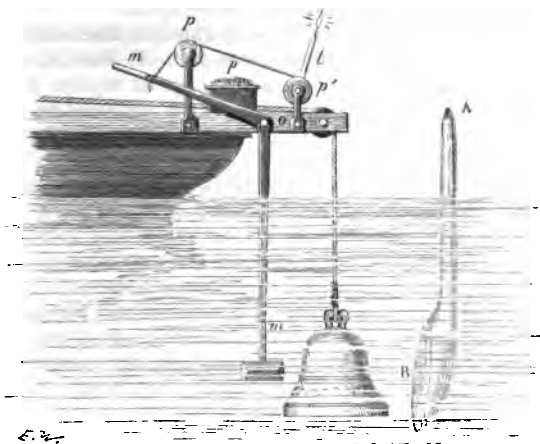


Fig. 406.

La figure montre le mécanisme au moyen duquel on obtenait la simultanéité des deux effets, et la lueur due à la combustion de la poudre était assez vive pour qu'à la seconde station on la pût apercevoir sous forme d'éclair.

La difficulté principale était d'entendre sûrement le son apporté par l'eau. M. Colladon la résolut de la manière suivante : il fit construire en tôle de fer une sorte de caisse à air ayant la forme de tambour très surbaissé. (Voir AB fig. 406.) Sur la surface latérale s'élevait un tube qui se terminait à la partie supérieure par une bouche arrondie contre laquelle on pouvait appliquer l'oreille.

On enfonçait le tambour dans l'eau de manière que la base eût son centre sur la droite qui joignait les deux stations, et sa surface perpendiculaire à cette droite. En ces circonstances, le son de la cloche était nettement transmis par l'eau à la distance de 13,487 mètres; le temps employé à parcourir cette distance fut en moyenne de 9",4, d'où l'on déduit 1435 mètres pour vitesse de propagation.

L'air et l'eau sont les seuls corps que l'on ait en masse homogène suffisamment étendue pour qu'on puisse y mesurer directement la vitesse de propagation des ondes sonores.

Toutefois, quelques autres séries d'expériences intéressantes faites sur des milieux solides ont servi, sinon à mesurer avec quelle rapidité le mouvement sonore s'y transmet, au moins à constater que cette transmission est très-rapide.

M. Biot rapporte, dans son *Traité de Physique,* une série d'observations qu'il a faites conjointement avec M. Martin, et desquelles il résulte que, dans un assemblage de tuyaux de fonte reliés entre eux par des vis de serrage et des rondelles de plomb, le son se propage environ dix fois et demie plus vite que dans l'air.

La colonne de tuyaux sur laquelle l'expérience fut faite avait 951 mètres de long. Elle était destinée à amener l'eau d'Arcueil à Paris; les deux observateurs étaient placés aux deux extrémités du canal avec des montres à secondes soigneusement comparées entre elles. L'un d'eux frappait un coup sur le tuyau toutes les fois que sa montre marquait 0″ ou 30″; l'autre notait l'heure ou le son lui arrivait *par le métal,* et répondait par un choc toutes les fois que son aiguille indiquait 15″ ou 45″.

§ 4. — DES ONDES SONORES ET DE LEUR CONSTITUTION.

Longueur d'onde. — Pendant la durée d'une vibration double d'un corps sonore, l'agitation imprimée à l'air, les condensations et les dilatations qui l'accompagnent, ne s'étendent qu'à une certaine distance du centre d'ébranlement. Cette distance, ou, si l'on aime mieux, l'épaisseur de la couche ainsi modifiée, constitue ce que l'on appelle la longueur d'ondulation du son que l'on considère.

D'après cela, comme la vitesse de propagation des sons ne dépend pas de leur degré de gravité ou d'acuité, on voit qu'entre la vitesse de propagation v, le nombre n des vibrations exécutées dans l'unité de temps, et la longueur l de l'ondulation complète qui lui correspond, il existe la relation simple $v = nl$, au moyen de laquelle on peut calculer l'une des quantités l ou n, lorsque l'autre est connue ainsi que v.

La longueur d'onde étant ainsi définie, nous allons chercher comment varient les vitesses et les densités de l'air dans l'intérieur d'une onde sonore, ou généralement dans une étendue plus ou moins considérable occupée par une série d'ondes sonores successives.

Nous considérerons d'abord le cas de la propagation des ondes dans un espace cylindrique ou prismatique, indéfini dans le sens de sa longueur; et comme le mouvement vibratoire des corps so-

nores, est ordinairement assimilable à celui d'un pendule, nous supposerons que l'on ébranle l'air du tuyau en faisant mouvoir à son origine et dans le sens de sa longueur une plaque perpendiculaire à son axe, assujettie à posséder successivement, aux différentes positions comprises entre les limites extrêmes de ses excursions, les vitesses données par la formule :

$$V = A \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

Dans cette formule t représente le temps compté depuis l'instant où la lame part de sa position extrême, et τ le temps d'une allée et d'une venue, en un mot le temps d'une vibration double de la lame.

La loi de l'ébranlement étant ainsi définie, il est facile de voir la nature du mouvement qui sera communiqué à l'air du tuyau.

Divisons la durée d'une vibration de la lame en instants très-courts $\theta_1\ \theta_2\ \ldots\ \theta_n$ égaux entre eux. Dans le premier de ces instants la lame vibrante, dont la vitesse est nulle à l'origine, ne se déplace que d'une quantité indéfiniment petite ; il en résulte néanmoins une très-petite condensation dans la couche d'air voisine. En effet, soit v la vitesse de propagation du son ; pendant le temps θ_1, le mouvement imprimé à l'origine ne pourra se propager qu'à une distance $v\theta_1$; au delà de cette distance rien ne sera changé à l'état de la colonne d'air ; donc le prisme de ce fluide qui primitivement occupait, à partir de l'origine, une étendue $v\theta_1$, se trouvera réduit d'une quantité égale à celle dont la lame a marché pendant le temps θ_1, c'est-à-dire à $u_1\theta_1$, si l'on représente par u_1 la vitesse moyenne qu'elle possède pendant ce premier intervalle de temps.

Si la lame s'arrêtait alors, il se propagerait dans le tuyau une onde élémentaire de longueur $(v-u_1)\,\theta_1$, et possédant une très-faible condensation égale à

$$\frac{u_1\theta_1}{v\theta_1} = \frac{u_1}{v_1}$$

et rien de plus.

Mais pendant le second instant θ_2 la lame vibrante parcourt avec une nouvelle vitesse u_2, un espace $u_2\theta_2$ plus grand que le premier, d'où résulte une seconde condensation un peu plus forte que la première, et se propageant après elle dans le tuyau, et ainsi de suite [1]. On voit donc comment, par la succession même

1. On admet que les ébranlements qui existent à une époque quelconque aux deux extrémités de l'onde se propagent avec une vitesse constante.

de toutes ces condensations élémentaires, se développe et se propage dans le tuyau d'abord, une onde condensée, correspondante à une vibration simple de la lame, et dans laquelle la vitesse et la densité de l'air changent d'un point à l'autre en suivant la loi selon laquelle varie la vitesse absolue de la lame vibrante aux époques successives de son mouvement progressif.

Le retour de la lame sur elle-même donne naissance à une onde dilatée dans laquelle les dilatations se succèdent comme se succédaient les condensations dans celle que nous venons de considérer; enfin, par suite de la continuation du mouvement vibratoire de la plaque, de nouvelles ondes alternativement condensées et dilatées se développent à leur tour; et, comme nous l'avons déjà constaté plus haut, la propagation se fait presque sans perte de vitesse dans les conditions où nous nous supposons placés.

De ces considérations il résulte que la vitesse possédée, à l'époque t, par une molécule d'air M située à une distance x de l'origine du tuyau, est proportionnelle à celle que possédait la lame vibrante à une époque qui précède l'instant actuel t, d'un temps $\frac{x}{v}$, égal à celui qu'il a fallu au mouvement pour parcourir l'espace x; donc la vitesse de M est donnée par l'équation :

$$V = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{v\tau} \right)$$

ou

$$V = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l} \right)$$

puisque l'on a par définition $v\tau = l$. Enfin on peut, au lieu de x, mettre le reste de sa division par l; puisque cette substitution, en altérant l'arc d'un nombre entier de circonférences n'en change pas le sinus.

La seule inspection de cette formule montre qu'à la même époque, en deux points distants de $(2n+1)\frac{l}{2}$ les vitesses des molécules sont égales et de signes contraires; égales et de même signe en deux points distants de $2n\frac{l}{2}$. On fera souvent usage de cette remarque.

Enfin, tout ce que nous venons de dire peut s'étendre au cas de la propagation des ondes sphériques dans un milieu homogène indéfini, seulement alors, l'intensité diminue quand la

distance au centre d'ébranlement augmente. Il est de même du coefficient B, dont le carré paraît être la mesure de l'énergie de l'action exercée sur notre oreille. Enfin il est bon, de remarquer que le décroissement d'intensité qui répond à une même augmentation absolue dans la distance, est d'autant moins sensible que cette augmentation est elle-même une plus faible fraction de la distance au centre d'ébranlement.

Pour représenter graphiquement la distribution des vitesses dans toute l'étendue du tuyau, il suffit évidemment de construire la courbe

$$y = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l} \right)$$

y et x étant suivant l'usage des coordonnées parallèles à deux axes rectangulaires.

Or, il est facile de voir :

1° Que cette courbe coupe l'axe des X en une série de points dont les distances x à l'origine sont telles que $l \frac{t}{\tau} - x$ soit égal à un nombre entier de demi longueurs d'onde ;

2° Que les deux portions qui s'étendent de part et d'autre d'un point de section quelconque sont symétriques par rapport à ce point ;

3° Que les festons dont elle se compose (fig. 407) sont en gran-

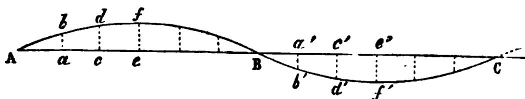


Fig. 407.

deur absolue, identiques à celui que l'on obtiendrait en construisant simplement la courbe

$$Y = B \sin 2\pi \frac{x'}{l}$$

depuis le point pour lequel x' est zéro jusqu'à celui ou il est égal à $\frac{1}{2} l$.

Lorsqu'on réfléchit à l'extrême petitesse des excursions que les corps sonores accomplissent de part et d'autre de leurs positions d'équilibre, on s'étonne au premier abord que des dépla-

cements si minimes puissent imprimer à l'air des condensations capables de se manifester par des phénomènes aussi sensibles que les sons; il n'est donc pas inutile de chercher à se faire une idée approximative de ce que peuvent être les effets dont il s'agit. Or, un diapason qui exécute seulement 340 vibrations simples à la seconde, trace, lorsqu'il résonne d'une façon appréciable, des vibrations qui ont souvent beaucoup plus de 1 millimètre d'étendue; et d'une autre part, à 10°, la longueur de l'onde complète qu'il produit est de 2 mètres.

Si l'on suppose que ces conditions soient celles du mouvement de la plaque, qui vibre à l'origine de la colonne d'air dans laquelle nous venons d'étudier la propagation des ondes, il en résultera que les valeurs moyennes des condensations et des dilatations seront égales à 1/1000.

Elles correspondront donc à des variations de pression de 1 centimètre d'eau, si l'on admet que la pression initiale soit équivalente à une colonne de ce liquide ayant une longueur de 10 mètres.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DE LA PROPAGATION DU SON.

Dans tout ce qui précède, nous avons admis comme fait d'expérience que la vitesse de propagation du son est uniforme, et qu'elle est indépendante de l'amplitude des excursions exécutées par les molécules aériennes autour de leurs positions d'équilibre.

Des considérations théoriques assez simples permettent d'établir ces propositions importantes; elles conduisent en outre à une évaluation directe de la vitesse de propagation, enfin elles permettent de donner une forme plus rigoureuse à la démonstration des différents résultats auxquels nous sommes précédemment arrivés touchant la constitution même des ondes sonores. Ces considérations ne s'appuient que sur des définitions ou propositions d'algèbre comprises dans les programmes de l'enseignement secondaire, nous pouvons donc les exposer ici sans sor-

tir des limites dans lesquelles doit rester cet ouvrage. Toutefois, afin d'éviter les longueurs, nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à l'étude de la propagation des ondes dans des colonnes d'air cylindriques ou prismatiques; nous admettrons que la tem-

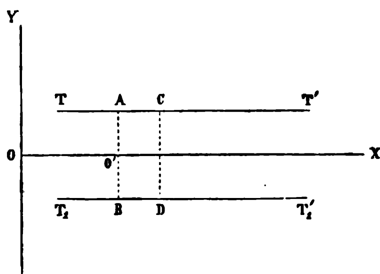


Fig. 408.

pérature et la densité y sont primitivement les mêmes en tous les points; en un mot, nous négligerons les petites variations de pression qui résultent de ce que les couches les plus élevées de ces colonnes compriment par leur poids les couches qui sont au-dessous d'elles.

Supposons donc que, dans une pareille colonne, on imprime aux molécules de plusieurs tranches contiguës des vitesses et des condensations arbitraires, sous cette double condition, toutefois, qu'elles soient les mêmes dans toute l'étendue de chaque tranche perpendiculaire à l'axe du tuyau, et que, de plus, tous les mouvements imprimés aient des directions parallèles à cet axe.

L'agitation ainsi excitée en une certaine région du tuyau va se propager, et soit ABCD (fig. 408) une des tranches qui se trouvent en mouvement à l'époque t.

Originairement le plan AB qui limite cette couche du côté de OY, se trouvait écarté du point O d'une quantité O' que nous appellerons x. Actuellement l'écart est un peu différent, soit $x+u$ sa valeur.

u est fonction du temps t, et de la distance primitive x; $\frac{du}{dt}$ représente, à l'époque t, la vitesse commune des molécules contenues dans le plan AB; $u+\frac{du}{dx}dx$ représente, à cette même

époque t, le déplacement qu'a subi le plan CD dont la distance à l'origine était primitivement $x + dx$; par suite $\frac{du}{dx}$ représente, à l'époque t, la dilatation qu'a subie la couche comprise entre les deux plans AB et CD, et la densité de cette couche, laquelle était primitivement égale à D, est devenue $D\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$[1].

La seule cause qui dans l'instant dt puisse modifier la vitesse de la couche ABCD, c'est la différence des pressions qui s'exercent sur ses deux faces. Soit donc p la valeur de cette pression sur l'unité de surface de AB, ω la section du tube; pendant le temps infiniment petit dt, la force $-\omega\frac{dp}{dx}dx$ imprimera à la couche que l'on considère un accroissement de vitesse $\frac{d^2u}{dt^2}dt$, et comme la masse de ABCD reste toujours égale à $D\omega dx$, on peut écrire

$$-\omega\frac{dp}{dx}dx = D\omega dx\frac{d^2u}{dt^2}$$

ou plus simplement

$$-\frac{1}{D}\frac{dp}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Le terme $-\frac{1}{D}\frac{dp}{dx}$ peut s'exprimer en fonction de u et des données de l'expérience. En effet, comme nous l'avons déjà vu, la densité D de la couche ABCD devient pendant le mouvement $D\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$.

Celle de la couche suivante est au même instant

$$D\left(1 - \frac{du}{dx}\right) + \frac{d.\,D\left(1 - \frac{du}{dx}\right)}{dx}dx = D - D\frac{du}{dx} - D\frac{d^2u}{dx^2}dx$$

la différence est

$$D\frac{d^2u}{dx^2}dx.$$

Si la propagation du son n'était accompagnée d'aucune variation de température, les pressions p et p' des deux couches consécutives que nous considérons seraient respectivement propor-

1. Nous mettons plus loin D_0 pour marquer la densité à la température zéro sous la pression 0m76.

tionnelles aux densités de ces couches, et en désignant par p_0 la pression initiale commune à tout le tuyau, on aurait

$$\frac{p}{p_\circ} = 1 - \frac{du}{dx}; \qquad \frac{p'}{p_\circ} = 1 - \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}dx;$$

par suite

$$\frac{p'-p}{p_\circ} = \frac{\frac{dp}{dx}dx}{p_\circ} = -\frac{d^2u}{dx^2}dx$$

ou encore,

$$\frac{dp}{dx} = -p_\circ \frac{d^2u}{dx^2}$$

et l'équation

$$-\frac{1}{D} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

deviendrait

$$\frac{p_\circ}{D}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Enfin si l'on désigne par h la hauteur barométrique, par Δ la densité du mercure, par g l'intensité de la pesanteur, par α le coefficient de dilatation des gaz, par D_0 la densité du gaz à zéro on a d'abord $p_\circ = hg\Delta$, et puis

$$D = D_\circ \frac{h}{0{,}76} \frac{1}{1+\alpha t}; \text{ d'où } \frac{p_\circ}{D} = \frac{\Delta}{D_\circ} \times 0{,}76 \times g \times (1+\alpha t)$$

et l'équation

$$\frac{p_\circ}{D}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

devient

$$\frac{\Delta}{D_\circ} \times 0{,}76 \times g \times (1+\alpha t)\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Mais les compressions et les dilatations qui accompagnent la propagation du son deviennent des causes de variations de température dans les couches d'air qui en sont le siége ; et comme les changements de densité dont il s'agit s'opèrent dans des instants d'une extrême brièveté, les quantités positives ou négatives de chaleur qui sont développées dans chaque couche élémentaire y restent pendant le temps qu'elle transmet le mouvement, et elles en font varier l'élasticité dans un rapport plus grand que celui qui résulterait de la seule variation de la pression.

Il est facile de voir de quelle manière cette cause modifie la

relation qui existe entre D et p, et par suite la valeur du coefficient de $\frac{d^2u}{dx^2}$ dans l'équation du mouvement.

Lorsque l'on comprime un gaz d'une fraction de son volume à zéro égale à $\frac{1}{273}$ ou, ce qui est la même chose, lorsqu'on le comprime d'une fraction de son volume à t° égale à $\frac{1}{273+t}$, on dégage une quantité de chaleur capable d'élever sa température de 0°,421.

Par le seul fait de cette variation de température, la pression du gaz deviendrait p_1 et en supposant le volume invariable, p_1 serait donné par l'équation

$$\frac{p_0}{p_1}=\frac{273+t}{273+t+0,421}$$

d'ou

$$\frac{p_1-p_0}{p_0}=\frac{0,421}{273+t}=q$$

Si la compression eût été γ au lieu de $\frac{1}{273+t}$ la pression fût devenue p_2 et le quotient $\frac{p_2-p_0}{p_0}$ eût été égal à $q\times\gamma:\frac{1}{273+t}$ on aurait donc

$$\frac{p_2-p_0}{p_0}=0,421\,\gamma\,.$$

ou

$$p_2=p_0(1+0,421\,\gamma)$$

Mais, d'une autre part, cette condensation γ a fait croître la pression dans le rapport de 1 à $1+\gamma$, et cela par le seul fait du changement de densité; par conséquent la pression définitive p doit être égale à $p_2(1+\gamma)$; et finalement on a en négligeant γ^2

$$p=p_0(1+\gamma\,.\,1,421).$$

Ici la condensation γ a pour valeur $-\frac{du}{dx}$, on a donc

$$p=p_0\left(1-1,421\frac{du}{dx}\right)$$

on aurait de même pour la couche suivante,

$$p'=p_0\left[1-1,421\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}dx\right)\right]$$

d'où

$$\frac{dp}{dx} = -p_0\, 1{,}421\, \frac{d^2u}{dx^2}.$$

et l'équation

$$-\frac{1}{D}\frac{dp}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

devient finalement,

$$\frac{p_0}{D}\, 1{,}421\, \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}, \text{ ou enfin } \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{a^2 d^2u}{dx^2}$$

si l'on pose

$$\frac{p_0}{D} 1{,}421 = a^2.$$

Détermination de u. — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes uniquement appuyés sur un principe mécanique exposé aux premières pages de ce traité, et qui consiste en ce que pour avoir l'expression numérique de la valeur d'une force il faut estimer l'accroissement de vitesse qu'elle imprime à un mobile pendant un temps infiniment petit, le diviser par la durée de ce temps et enfin multiplier le quotient par la masse du mobile; ici la force est $-\omega \frac{dp}{dx} dx$; l'accroissement de vitesse produit dans le temps dt est $\frac{d^2u}{dt^2} dt$, la masse est D ωdx; on a donc bien $-\frac{dp}{dx} = D\frac{d^2u}{dt^2}$. Quant aux notions élémentaires touchant les dérivées premières et secondes des fonctions, comme nous l'avons déjà fait remarquer, elles sont données dans l'enseignement des lycées. Il résulte évidemment de ces notions élémentaires qu'une fonction quelconque de $x + at$ et encore une fonction quelconque de $x - at$, satisfont à la relation $\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$. La somme de deux pareilles fonctions y satisfait aussi; on en conclut que la valeur générale u doit être donnée par l'équation :

$$(1) \qquad u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

φ et ψ désignant des fonctions quelconques dont l'une peut être nulle.

Par suite on a

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = a\,\varphi'(x + at) - a\,\psi'(x - at)$$

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi'(x+at) + \psi'(x-at).$$

Pour déterminer les fonctions φ' et ψ', il faut de nouvelles données; par exemple, il faut connaître les valeurs des vitesses et des condensations dans toute l'étendue de l'ébranlement initial.

Supposons donc qu'à l'origine du temps, pour $t=0$, on ait :

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right) = V_0 = fx.$$

et

$$(5) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right) = -S_0 = Fx.$$

on en conclura en faisant $t=o$ dans (2) et (3)

$$(6) \qquad a\,\varphi'(x) - a\,\psi'(x) = fx$$

$$(7) \qquad \varphi'x + \psi'(x) = Fx.$$

d'où, en résolvant par rapport à $\varphi'x$ et $\psi'x$

$$2a\,\varphi'x = fx + a\,Fx$$
$$2a\,\psi'x = aFx - fx.$$

ou enfin

$$(8) \qquad \varphi'x = \frac{1}{2a} fx + \frac{1}{2} Fx$$

$$(9) \qquad \psi'x = \frac{1}{2} Fx - \frac{1}{2a} fx,$$

remplaçant, dans $\varphi'x$, x par $x+at$, et dans $\psi'x$, x par $x-at$, on en conclut

$$(10) \quad V = \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{a}{2} F(x+at) - \frac{a}{2} F(x-at) + \frac{1}{2} f(x-at)$$

et

$$(11) \quad -S = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2a} f(x+at) + \frac{1}{2} F(x+at) + \frac{1}{2} F(x-at) - \frac{1}{2a} f(x-at)$$

Pour voir comment ces équations peuvent prouver que le son se propage uniformément, et comment aussi elles donnent la vitesse de cette propagation, supposons que l'ébranlement initial soit limité; que, par exemple, pour toute valeur de x inférieure à zéro ou supérieure à une certaine quantité l, fx et Fx soient nulles.

Alors pour tout point, dont la distance x à l'origine sera positive et $> l$, $f(x+at)$ et $F(x+at)$ seront toujours nulles, et l'on aura

$$(12) \qquad V = \frac{du}{dt} = -\frac{a}{2} F(x-at) + \frac{1}{2} f(x-at)$$

$$(13) \qquad -S = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\,F(x - at) - \frac{1}{2a}(fx - at)$$

et de plus, en ce point, V et S ne commenceront à être différents de zéro que quand on aura $at = x_1 - l$, ou $t = \frac{x_1 - l}{a}$, quel que soit x_1.

Ce qui prouve déjà que le mouvement se propage avec la vitesse a; de plus, le mouvement ne durera que jusqu'à l'époque où l'on aura $at = x_1$, $t = \frac{x_1}{a}$.

A une époque déterminée t, le mouvement sera compris entre les points dont les abscisses x' et x'' satisfont aux conditions $x' - at = l$, $x'' - at = 0$.

L'épaisseur de la couche d'air ébranlée à cette époque sera donc égale à l; et dans cette étendue le rapport des vitesses moléculaires V aux condensations S est égal à $+ a$.

Du côté des x négatifs, $f(x - at)$ et $F(x - at)$ sont toujours nulles, on a donc simplement

$$(14) \qquad V = \frac{a}{2}\,F(x + at) + \frac{1}{2}\,f(x + at)$$

et

$$-S = \frac{V}{a}$$

de plus, la molécule dont l'abscisse est $x = - x_1$ commence à être ébranlée lorsqu'on a $- x_1 + at = 0$, ou $t = \frac{x_1}{a}$, et finit de l'être lorsque $- x_1 + at = l$, ou $t = \frac{x_1 + l}{a}$.

Ici encore le mouvement se propage avec la vitesse a, comme côté des x positifs.

Ainsi, lorsque dans l'ébranlement primitif la relation entre les vitesses et les condensations est quelconque, il se propage à droite et à gauche deux ondes qui marchent chacune avec la vitesse a, et qui ont la même largeur l : dans l'une de ces ondes, celle qui marche vers les x positifs, on a $\frac{V}{S} = + a$, dans l'autre $\frac{V}{S} = - a$. Enfin, il est aisé de voir que ces ondes ne se ressemblent pas.

Si, au contraire, dans l'ébranlement primitif, ce rapport $+ a$ ou $- a$ subsistait entre les vitesses et les condensations, une

seule onde se serait propagée dans le sens des x positifs, quand le rapport est $+ a$, dans le sens des x négatifs s'il est $- a$.

En effet d'après (6) et (7), la condition $\frac{V_0}{S_0} = + a$ par exemple, conduit à cette conclusion que φ' est nulle et par suite $fx = - aF(x)$; alors la valeur de V est donnée par l'équation

$$V = - aF(x - at)$$

et comme, pour toute valeur négative de la variable, Fx est nulle, il s'ensuit que de pareilles valeurs rendent toujours $V =$ zéro.

Le cas que nous avons traité synthétiquement p. (28) est celui où l'ébranlement initial s'étendrait depuis $x = o$ jusqu'à $x = - l$ et, dans cette étendue, satisferait aux relations

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = - a \sin 2\pi \frac{l + x}{l} \text{ et } \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \sin 2\pi \frac{l + x}{l}$$

on déduit en effet de ces hypothèses

$$V = - a \sin 2\pi \frac{x - at}{l} \text{ ou } V = a \sin 2\pi \frac{at - x}{l}$$

et enfin en posant $a\tau = l$,

$$V = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right)$$

CHAPITRE V

RÉFLEXION DU SON.

Lorsque des ondes excitées à la surface d'un liquide rencontrent les bords du bassin qui le renferment, elles se réfléchissent, et on les voit, tantôt revenir sur elles-mêmes, tantôt se propager à partir de l'obstacle, dans une direction plus ou moins inclinée sur celle qu'elles suivaient d'abord.

Des effets analogues se produisent lors de la propagation des ondes aériennes, et les réflexions qu'elles éprouvent donnent naissance au phénomène des échos.

Échos.— « Il y a écho, dit Aristote (*De Anima,* liv. II), lorsque l'air,

« gêné dans son mouvement sonore par des obstacles, rebondit « à leur surface. Ces effets, quoique n'étant pas toujours percep« tibles, paraissent pourtant devoir se produire toujours, car il « en est *du son comme de la lumière;* et la lumière se réfléchit « sans cesse à la surface des corps, puisque autrement il y au« rait obscurité en tous les points qui ne sont pas situés sur le « trajet des rayons directs. » (Aristote, *De Anima*, l. II.)

Tout ce que l'on a appris depuis Aristote sur la réflexion du son, a confirmé ces propositions, et c'est encore dans le phénomène des échos qu'il faut, aujourd'hui comme au temps de l'illustre philosophe grec, chercher la preuve la plus frappante du fait de la réflexion du son.

Les circonstances dans lesquelles on observe l'écho sont bien connues; lorsque, dans un lieu découvert, en face d'un édifice, d'un mur, *d'un rocher*, placé à suffisante distance, on prononce une ou plusieurs syllabes; elles *reviennent bientôt sans altération et par ordre*[1]. De plus, l'instant auquel on les entend de nouveau est distant de celui auquel on les a prononcées, d'un temps précisément égal à celui qu'il faut au son pour parcourir le double de la distance qui sépare l'observateur de l'obstacle. Il est donc évident que l'onde a fait deux fois la route, et que les choses se passent comme si le son réfléchi eût pris naissance au même instant que le son direct, mais en un point situé derrière l'obstacle, et symétrique du centre d'ébranlement réel par rapport à la surface réfléchissante.

Lorsqu'on veut faire avec précision l'expérience de mesure que nous venons d'indiquer, il faut opérer à distance aussi grande que possible. Il est bon alors d'employer, pour exciter le mouvement de l'air, la brève détonation d'une arme à feu, et compter le temps à partir du moment même où l'explosion est produite, et non pas à partir de celui où l'on cesse de l'entendre, parce que l'impression sonore persiste un certain temps, $\frac{1}{10}$ de seconde environ dans les circonstances les plus ordinaires.

La loi de réflexion qui se manifeste dans le phénomène de l'écho simple n'est autre que la loi de la réflexion lumineuse. Elle explique dans tous leurs détails les effets curieux des échos multiples ou renforçants.

On observe l'écho multiple lorsqu'à des distances différentes de l'observateur existent des obstacles capables, chacun en particulier, de lui renvoyer le son.

1. . . . . Per loca sola
Saxa pare formas verborum ex ordine reddant.
LUCRÈCE, liv. IV.

On l'observe encore lorsque le centre de l'ébranlement sonore est entre deux murs parallèles et suffisamment éloignés l'un de l'autre. Les ondes sonores renvoyées de l'un à l'autre peuvent, avant de s'éteindre, impressionner un grand nombre de fois l'oreille d'un observateur placé entre les deux murailles.

En ces circonstances, il arrive d'ordinaire que les impressions successives reçues par l'organe vont en s'affaiblissant graduellement, comme s'affaiblissent les images multiples d'une lumière placée entre deux glaces parallèles.

D'autres fois, les échos peuvent renforcer le son. Si, par exemple, plusieurs obstacles sont disposés de manière à renvoyer au même instant à l'oreille la portion de l'ondulation qu'ils réfléchissent, il se pourra faire que la somme de tous ces échos impressionne l'oreille de l'observateur plus fortement que le son direct lui-même.

On cite toujours à l'appui de cette assertion l'effet que l'on observe dans les salles ou galeries auxquelles on donne une forme ellipsoïdale. Quelques paroles prononcées à voix basse en l'un des foyers de ces ellipsoïdes sont distinctement entendues à l'autre foyer; elles ne le sont en aucun autre point, même beaucoup plus rapproché du centre d'ébranlement.

L'ensemble des phénomènes que nous venons de décrire prouve d'une manière complète le fait de la réflexion du son; toutefois, il n'est pas inutile d'indiquer quelques expériences à l'aide desquelles on peut, dans un cours, montrer que les ondes sonores se réfléchissent, et qu'elles suivent, en se réfléchissant, les mêmes lois que la lumière.

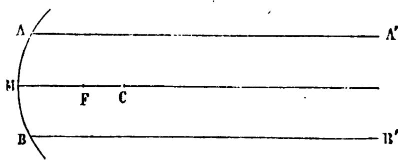


Fig. 409.

Lois de la réflexion du son.—Lorsqu'un point lumineux est placé au foyer F [1] fig. 409 d'un miroir sphérique concave, toute la lumière qu'il envoie sur ce miroir forme après sa réflexion un faisceau cylindrique, et qui, par conséquent, peut se propager à une distance

1. Le foyer est le point qui partage en parties égales le rayon mené du centre C au milieu M du miroir.

considérable sans éprouver la déperdition rapide d'intensité qui accompagne d'ordinaire la propagation sphérique. D'après cela, s'il existe, en effet, une analogie complète entre la réflexion du son et celle de la lumière, un son, même de faible intensité, produit en F, devra être entendu à une distance très-considérable du point F par une oreille placée dans l'intérieur du cylindre A'A BB'; une montre peut servir de corps sonore. On la maintient au foyer à l'aide d'une tige convenablement disposée ; et en tournant l'axe du miroir dans une direction déterminée, on envoie dans cette direction le son de la montre à une distance beaucoup plus grande que celle à laquelle il arriverait naturellement.

Le faisceau sonore cylindrique qui se propage ainsi en avant du miroir M peut être aisément réfléchi par un mur, ou plus généralement par un plan solide quelconque. Par exemple, si on le fait tomber sous l'angle de 45° sur une planche, il sera renvoyé à 90° de sa direction primitive, et ce sera alors dans cette nouvelle direction que se propagera le son de la montre.

Enfin, si l'on reçoit le faisceau A'A BB', non plus sur une sorte de miroir plan, mais sur un autre réflecteur sphérique, dont l'axe coïncide avec celui du premier, tout le mouvement sonore ira se concentrer au foyer de ce second miroir, et le bruit de la montre y sera très-fortement entendu.

Pour terminer l'exposition des phénomènes de la réflexion des ondes sonores, nous ajouterons quelques détails relatifs à la manière dont on peut faire voir en projection la réflexion des ondes liquides; les expériences que nous allons décrire forment la suite naturelle des premières phrases de ce chapitre. Elles rendent jusqu'à un certain point sensible aux yeux l'exactitude de l'explication que nous avons donnée de toutes les particularités des phénomènes des échos.

Pour rendre visible la réflexion des ondes planes, on prend une petite auge de bois rectangulaire d'environ 50 centimètres de long sur 8 de large et 2 de profondeur. On y verse du mercure bien propre, et l'on projette obliquement sur toute la surface de ce dernier un large faisceau lumineux qui, après s'être réfléchi, vient former sur un écran vertical une image rectangulaire oblongue.

Cette image, il est vrai, ne serait pas nettement terminée si on laissait concourir à sa formation les rayons réfléchis sur les bords convexes du bain de mercure ; mais on les arrête en plaçant sur l'auge un couvercle de carton ou de bois percé d'une fente rectangulaire de dimensions un peu moindres que celles du bain lui-même,

Les choses ainsi disposées, si l'on vient à frapper très-légèrement l'un des petits côtés de l'auge, on voit apparaître sur le champ lumineux perpendiculairement à sa grande longueur, plusieurs rides qui partent d'une des extrémités, se propagent jusqu'à l'autre limite, et reviennent ensuite sur elles-mêmes. On peut quelquefois observer plusieurs réflexions de la même onde entre les deux bords extrêmes.

Si l'auge avait une forme circulaire, il suffirait d'en toucher le centre, pour que l'on vît du centre de l'image circulaire projetée sur le tableau, partir des ondes qui reviendraient sur elles-mêmes après avoir touché la circonférence du disque lumineux.

Enfin il est bon de remarquer que l'on détermine encore très-commodément la naissance de ces ondes en frappant du pied le sol de la pièce dans laquelle on opère.

CHAPITRE VI

INTERFERENCES DES SONS.

Lorsque l'on touche en plusieurs points différents la surface d'un liquide en repos, on voit les ondes qui partent de ces différents centres de mouvement se propager circulairement chacune, comme si elle existait seule. Seulement, il paraît naturel d'admettre qu'aux points d'entrecroisement, la vitesse absolue de chaque molécule liquide ne peut être que la résultante de celles qui lui sont apportées par chacun des ébranlements élémentaires. En admettant ce principe et en admettant, en outre, qu'en chaque point où ces mouvements se rencontrent, les condensations sont la somme de celles qui appartiennent aux mouvements composants, on arrive à des conséquences très-importantes qui sont toutes vérifiées par l'expérience.

Pour le prouver d'une manière complète, nous allons chercher à mettre en évidence les conséquences dont nous voulons parler, et nous décrirons ensuite les observations qui en établissent la réalité.

Principe des interférences. — Que l'on conçoive donc en deux points voisins O et O′ (fig. 410) deux centres d'ébranlements iden-

tiques qui produisent des ondes de même longueur, commençant au même instant physique et offrant le même mode de condensation. Les mouvements partis de ces deux points se propageront ensemble dans l'air, et si l'on veut savoir celui qu'ils imprimeront à une molécule quelconque M située à des distances x et x' de O et de O', il faudra composer la vitesse $B \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right)$ dirigée suivant OM, et la vitesse $B' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x'}{l}\right)$ dirigée suivant OM'. Si la différence OM — OM' est faible par rapport à la distance OM, et si, de plus, OO' est petit par rapport à cette même droite OM, on pourra supposer $B = B'$ et admettre le parallélisme des vitesses élémentaires; alors celles-ci s'ajouteront ou se retrancheront suivant qu'elles seront dirigées dans le même sens ou en sens contraire, c'est-à-dire suivant que $x - x'$ sera égal à $2n \frac{l}{2}$ ou à $(2n + 1) \frac{l}{2}$.

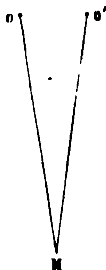


Fig. 410.

Par suite, à une distance convenable de O et O' sur une certaine étendue des surfaces qui satisfont aux conditions

$$MO - MO' = \frac{l}{2} = 3\,\frac{l}{2} = (2n+1)\,\frac{l}{2}.$$

Il y aura nœud de vibration, c'est-à-dire qu'il y aura nullité ou au moins minimum de son très-prononcé.

Au contraire, dans le voisinage du plan perpendiculaire au milieu de OO', il y aura ventre de vibration, ou maximum d'intensité sonore aux différents points des surfaces qui satisferont aux conditions

$$MO - MO' = 0 = 2\,\frac{l}{2} = 4\,\frac{l}{2} = 2n\,\frac{l}{2}.$$

Dans une série d'expériences entreprises pour vérifier ces diverses conséquences, M. Desprets prenait pour sources sonores deux sifflets montés sur une même soufflerie et recevant le vent du même soufflet. Il déterminait la position et la forme des surfaces nodales à l'aide d'une petite membrane couverte de sable; le sable immobile ou à peu près dans les nœuds était, au contraire, agité dans les ventres de vibrations, c'est-à-dire aux endroits où il y avait addition des vitesses apportées simultanément par les mouvements venus des deux sources O et O'.

On obtient dans les cours de bons résultats en employant une autre disposition que nous allons faire connaître. On prend une

boîte ou caisse de bois de suffisante capacité (fig. 411) ; on perce au centre de la face inférieure un petit trou destiné à fixer un fort sifflet S. Sur la face supérieure on perce deux trous beaucoup plus larges, symétriquement placés par rapport à la verticale de S : puis on colle sur toute la paroi interne, de la ouate de coton destinée

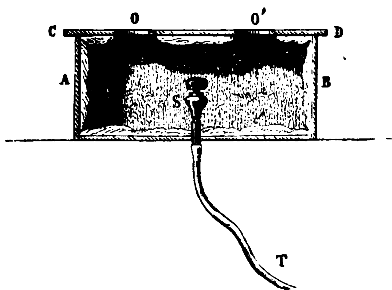


Fig. 411.

à empêcher toutes les réflexions sonores à l'intérieur de la boîte. Les choses ainsi disposées et le sifflet en place, on le fait parler avec un soufflet extérieur, et alors, à l'aide d'une petite membrane couverte de sable, il est facile de constater qu'en tous les points du plan mené perpendiculairement au milieu de la ligne OO' il y a toujours addition de vitesse, car le sable trace toujours sur la membrane les figures acoustiques ordinaires. Mais dans le plan A C D B perpendiculaire au premier on trouve successivement des ventres et des nœuds de vibration très-aisément reconnaissables ; et lorsque la membrane est en une position telle que le sable y reste immobile ou à peu près, si l'on ferme l'une des deux ouvertures, la figure se dessine aussitôt. Tout ceci s'explique aisément : les deux ouvertures O et O' doivent être ici considérées comme deux sources identiques et donnant des vibrations d'accord entre elles. Lorsqu'en un point donné le mouvement envoyé par l'une détruit celui qui vient de l'autre, il suffit de supprimer l'un de ces mouvements contraires pour que le second se fasse aussitôt sentir.

M. Wheatstone, qui l'un des premiers s'est occupé des interférences sonores, opérait de la manière suivante : Lorsqu'une plaque circulaire résonne elle se divise en un nombre pair de secteurs qui vibrent alternativement en sens contraires. Deux secteurs d'ordre de parité différent A et B sont au même instant

animés de mouvements égaux et de signes contraires; deux secteurs de même ordre de parité exécutent, au contraire, des vibrations parfaitement égales et concordantes. Ceci posé, M. Wheatstone prenait un tuyau bifurqué à sa base en forme d'Y renversé, et, le plaçant de façon que les deux orifices inférieurs fussent au-dessus des points où les mouvements contraires de deux secteurs consécutifs sont à leur maximum; il constatait qu'à l'orifice supérieur, il y avait fort peu de son entendu. On constatait, au contraire, un renforcement très-appréciable lorsque le tuyau était disposé de manière à recevoir à la fois les mouvements concordants de deux secteurs de même parité.

Dans ces dernières années, M. Lissajous a utilisé d'une manière différente cette opposition des mouvements des secteurs consécutifs d'une plaque qui vibre, pour mettre commodément en évidence les interférences des sons qui en émanent.

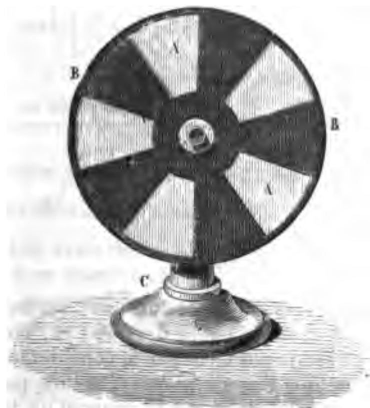


Fig. 412.

Il dispose un disque de carton ou de zinc couvert de drap de façon qu'il soit de mêmes dimensions que la plaque; puis, il trace sur sa surface un certain nombre de diamètres qui le partagent en secteurs égaux, dix par exemple, et il évide ces secteurs de deux en deux, comme on le voit fig. 412. Tirant alors de la plaque le son qui répond à la division en dix secteurs, il approche le disque, de façon à couvrir les cinq secteurs d'un même ordre de parité. Le son est alors notablement accru, tellement qu'il redevient sensible au moment où la plaque semble

avoir dejà fini de résonner. On n'obtiendrait aucun effet de renforcement si l'on s'arrangeait de façon que chaque secteur évidé du disque couvrît à la fois la moitié d'un secteur pair et la moitié d'un secteur impair de la plaque vibrante. Aussi lorsqu'on fait tourner le disque devant la plaque immobile, on entend dans le son une série de renforcements très-distincts lesquels répondent aux instants des coïncidences des secteurs du disque avec ceux de la plaque vibrante.

§ 2. — INTERFÉRENCES DES ONDES DIRECTES ET RÉFLÉCHIES.

Lorsqu'un son, émanant originairement d'un centre unique O

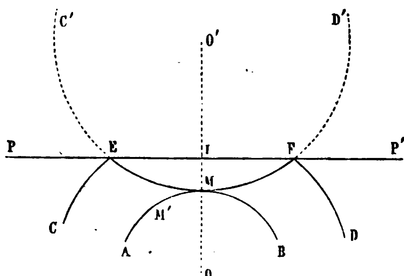


Fig. 413.

(fig. 413), se réfléchit contre un obstacle PP', les ondes en retour peuvent interférer avec les ondes directes ; et, comme nous le verrons bientôt, c'est précisément par la considération d'interférences de ce genre que l'on s'explique la nature particulière du mouvement que prend l'air dans l'intérieur d'un tuyau sonore. Mais avant d'en arriver à cette importante application, il est bon d'étudier le phénomène sous la forme où il se présente lors de la propagation des ondes sphériques à l'air libre. Or, en ces circonstances, d'après les travaux de M. N. Savart et de M. Seebeck, tout se passe comme si les ondes directes et réfléchies prenaient naissance au même instant, en deux points O et O' symétriques par rapport au plan réfléchissant PP'; et cela, sous l'action de deux mouvements vibratoires de même période, d'intensités sensiblement égales et de directions constamment contraires. Dans cette hypothèse, si, à une époque quelconque t, deux ondes originairement parties de O arrivaient en un point M de la ligne

OO′, l'une directement, l'autre par réflexion, sur l'obstacle, pour avoir la vitesse communiquée à M, on raisonnera de la manière suivante : soit d la distance OI et x la distance IM. La vitesse de l'onde directe, d'après ce qui a été vu page 31, sera donnée par l'équation IM.

$$V = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{d-x}{l}\right)$$

Celle de l'onde réfléchie, d'après le principe que nous venons d'énoncer, sera

$$V' = -A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{d+x}{l}\right)$$

et la vitesse résultante cherchée sera précisément V + V′.

Supposons A′ assez peu différent de A pour qu'on puisse négliger la différence ; alors l'expression de V + V′ devient

$$V + V' = A\left(\sin 2\pi\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{d}{l}\right) + \frac{x}{l}\right] - \sin 2\pi\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{d}{l}\right) - \frac{x}{l}\right]\right)$$

$$= 2A\left(\sin 2\pi\frac{x}{l}\cos 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{d}{l}\right]\right)$$

Cette expression devient nulle pour toute valeur de x égale à $\frac{l}{2}, l, \frac{3l}{2}, \ldots$ et maximum pour $x = \frac{l}{4}, \frac{3l}{4}, \frac{5l}{4} \ldots$ c'est-à-dire que l'on doit avoir des nœuds de vibration à toute distance du mur égale à un nombre entier de longueurs d'ondes simples, et des ventres aux positions intermédiaires. Seulement, comme en réalité A n'est pas rigoureusement égal à A′, il n'y aura pas aux nœuds nullité, mais seulement affaiblissement très-prononcé dans le son.

Si le point que l'on considère était en dehors de la ligne des centres en M′ par exemple, et à des distances y et y' des points O et O′, les vitesses qu'il faudrait combiner pour avoir le mouvement résultant seraient l'une $V = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{y}{l}\right)$ dirigée suivant OM ; l'autre $V' = -A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{y'}{l}\right)$ dirigée suivant O′M′. Si A est peu différent de A′, si OM et O′M′ font un petit angle, il y aura interférence quand les *sinus* seront égaux et de même signe c'est-à-dire quand $y' - y$ sera égal à nl.

Ainsi, dans le voisinage de la ligne OO′, il existera des portions, de surfaces nodales hyperboliques dont O et O′ seront les foyers

et en général ces portions de surfaces se confondront avec des plans parallèles au mur réfléchissant.

M. N. Savart a étudié la réflexion du son au point de vue que nous venons d'indiquer. L'obstacle était un grand mur vertical ; le son était produit à une certaine hauteur au-dessus du sol soit par la vibration d'une corde de Basse, soit par celle d'un tuyau sonore. M. Savart reconnut à l'oreille l'existence des ventres et des nœuds de vibration en avant de l'obstacle. — Postérieurement M. Seebeck détermina avec soin la position de ces ventres et de



Fig. 414.

ces nœuds, et trouva qu'elle était telle que l'indique la théorie précédente. L'appareil qu'il employait est connu maintenant sous le nom de pendule acoustique.

Il se compose essentiellement d'une fine membrane tendue sur un cadre convenable et qui, participant au mouvement des couches atmosphériques, le communique à un pendule excessivement léger; le fil de ce pendule est fixé à l'extrémité supérieure du diamètre vertical du cadre et le point pesant touche la membrane dans le voisinage de son centre.

La figure 414 représente un pendule de ce genre.

Pour obtenir de bons résultats avec cet appareil délicat, il faut pouvoir faire varier à volonté la tension de la membrane : on y arrive de différentes manières. Par exemple, on peut disposer la monture de manière que le cylindre B sur lequel la membrane est tendue, entre à la façon d'un couvercle de boîte sur un autre cylindre, un peu plus étroit, et s'y enfonce plus ou moins par le jeu de trois vis à ressorts V (fig. 415). Avec la hauteur du son change la tension qu'il faut donner à la membrane pour la rendre le plus sensible possible.

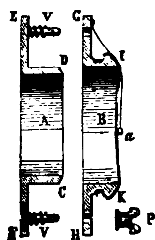


Fig. 415.

Entre autres expériences curieuses que l'on peut faire avec un pendule de ce genre, nous en citerons une dans laquelle on voit encore un exemple frappant des interférences sonores. Que l'on répète, avec une plaque circulaire placée verticalement, l'expérience de M. Lissajous décrite à la page 47, et qu'on place le disque évidé de manière à rendre le son le plus intense possible ; le pendule placé à une certaine distance de la plaque, et sur la perpendiculaire à sa surface passant par son centre, entrera en mouvement pour une tension convenable de la membrane ; mais son mouvement s'arrêtera si l'on ôte le disque et si on laisse à la fois se propager vers la membrane les mouvements de signes contraires qui émanent simultanément des secteurs alternatifs de la plaque.

CHAPITRE VII.

TUYAUX SONORES.

§ 1. — LOIS DES VIBRATIONS DES COLONNES GAZEUSES RENFERMÉES DANS LES TUYAUX SONORES.

Lorsqu'on fait parler un tuyau d'orgue, c'est le fluide intérieur qui est le siége véritable de la vibration sonore. Les parois du tuyau n'ont, en général, sur le phénomène qu'une influence sensiblement nulle.

Ainsi, que l'on dispose une série de tuyaux dans lesquels la colonne intérieure ait exactement les mêmes dimensions, et qui

soient embouchés de la même façon; dans le même gaz, tous ces tuyaux rendent le même son, quelle que soit la nature chimique ou l'épaisseur de leurs parois. Il faut toutefois excepter le cas très-particulier où les parois, devenues d'une minceur extrême, participeraient au mouvement de la colonne interne. Le son pourrait alors éprouver une altération très-appréciable.

Influence de la nature du Gaz. — Au contraire, le tuyau restant le même si l'on change le gaz intérieur, la valeur musicale du son rendu est complétement altérée.

Pour le prouver, on prend deux petits tuyaux bien identiques, et qui, placés sur une même soufflerie, rendent exactement le même son. On les fixe à l'aide de bouchons sur les tubulures de de deux cloches pareilles, l'une remplie d'air, l'autre d'hydrogène; en enfonçant ces deux cloches dans la cuve à eau, on fait parler les deux tuyaux, et l'on constate que le son rendu par celui que l'hydrogène emplit, est beaucoup plus aigu que l'autre.

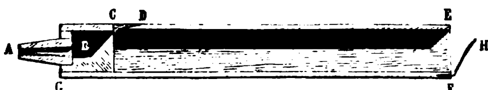


Fig. 416.

Mode d'ébranlement. — Pour mettre en vibration la colonne gazeuse renfermée dans un tuyau sonore, on peut avoir recours à divers procédés : quelquefois on se contente de faire vibrer à l'une de ses extrémités une plaque, un timbre, un diapason; alors, si les dispositions sont convenables, la colonne entière du tuyau entre en vibration, et il en résulte dans le son un accroissement d'intensité considérable. Le plus ordinairement, pour tirer le son d'un tuyau, on emploie un procédé tout différent : le tuyau est monté sur une embouchure disposée comme on le voit figure 416.

A, tube par lequel on insuffle un courant d'air;

B, boîte à air;

C, lumière ou orifice de sortie pour le gaz;

DEFG, parois du tuyau;

D, lèvre amincie en biseau qui termine la paroi DE dans le voisinage de la lumière, et contre laquelle vient frapper l'air qui s'échappe par la lumière C.

La seule influence de ce courant d'air suffit pour faire parler le tuyau.

Or ici, tout aussi bien que dans le premier mode d'ébranlement, il est facile de s'assurer que le son, réellement produit à l'orifice, n'est que renforcé par le tuyau sonore, car si l'on en-

lève les parois de ce dernier, de façon à ne laisser que l'embouchure et la lèvre D, on peut, en soufflant par A avec plus ou moins de force, obtenir une série de sons faibles, il est vrai, mais musicalement déterminables, et parmi lesquels se trouvent ceux que l'on pouvait précédemment tirer du tuyau entier.

Si l'on prenait un appareil dans lequel la lèvre D pût s'approcher ou s'écarter légèrement de la lumière, on en tirerait une série de sons encore plus étendue; on sait au reste que l'on peut encore produire un phénomène sonore analogue, en soufflant avec la bouche contre un biseau tranchant quel qu'il soit; et souvent pour mettre en vibration sonore l'air renfermé dans un vase de forme quelconque, on applique sur l'orifice de ce vase une lame métallique qui le bouche partiellement, et l'on souffle contre le tranchant de cette lame avec un tube aplati par l'une de ses extrémités.

Lois des harmoniques. — Il est facile de reconnaître expérimentalement qu'un tuyau donné ne renforce pas indistinctement tous les sons produits à son origine; mais il est beaucoup moins aisé de trouver une formule générale qui permette de déterminer à priori les valeurs numériques des sons, qui sont le plus énergiquement renforcés par un tuyau dont la forme et les dimensions sont données. Toutefois, le problème se résout d'une manière assez simple, lorsque les tuyaux sont cylindriques ou prismatiques, longs, étroits et ébranlés, de telle sorte que le mouvement général du gaz dont ils sont remplis reste toujours parallèle à l'axe.

Nous allons donc exposer d'abord les résultats auxquels on arrive, lorsqu'on étudie la théorie des tuyaux sonores dans le cas particulier que nous venons de définir.

Lorsqu'on cherche à renforcer le son d'un diapason en le faisant vibrer à l'un des orifices d'un tube étroit, ouvert aux deux bouts, on reconnaît que le renforcement produit est maximum, lorsque le rapport de la longueur du tube à celle de l'onde excitée à l'origine est exprimé par l'un des nombres entiers consécutifs, 1, 2, 3, 4... Quand, au contraire, la longueur du tube s'écarte de celles qui satisfont à cette condition, le renforcement diminue rapidement et bientôt disparaît.

On vérifie aisément cette proposition en faisant usage de tubes à tirage, et qui peuvent, par conséquent, entre des limites assez étendues, prendre toutes les longueurs que l'opérateur veut leur donner.

On peut aussi, comme démonstration plus complète, citer quelques résultats obtenus par M. Savart. (Ann., 2e série, t. XXIV.)

D'après cet habile acousticien, lorsqu'à la température zéro

on veut, en employant un tube de 15 lignes (0^m,0338) de diamètre, renforcer le plus fortement possible un son (la_3), dont la longueur d'onde à zéro est 172 lignes (0^m,3882), on trouve que la longueur qu'il faut donner au tube renforçant est précisément 170 lignes (0^m,383).

Réciproquement, on trouve qu'un tuyau de cette longueur renforce énergiquement les harmoniques naturels successifs du la_3, c'est-à-dire la^4 mi_5, etc.

S'il s'agit, au contraire, de tubes bouchés à un bout, on trouve que leur action renforçante est très-prononcée, quand le rapport de leur longueur à celle de l'onde qu'ils doivent renforcer est $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ . . ., et qu'elle devient rapidement insensible pour les longueurs différentes de celles-là.

Ces lois de succession des harmoniques ont été remarquées à une époque sans doute fort ancienne. Mersenne en parle dans ses ouvrages; il remarque que dans le serpent d'harmonie, on peut en graduant le vent, obtenir successivement un son fondamental, son octave, sa quinte et pas de notes intermédiaires. Sauveur s'est occupé de la même question en 1701, mais Daniel Bernouilli surtout l'a étudiée d'une manière toute particulière. Dans le récit de ses expériences (Mémoires de l'Académie 1762), il marque que si l'on bouche et les trous latéraux et l'extrémité d'une flûte ordinaire, on peut en graduant le vent en tirer une série de sons qui procèdent comme les nombres impairs 1, 3, 5.., tandis que si l'extrémité de la flûte est ouverte, la série que l'on obtiendra sera celle des harmoniques naturels.

Expériences de Daniel Bernouilli. — Il est surtout commode d'employer, pour établir ces propositions, de longs tubes de verre ou de métal, embouchés à la manière ordinaire, et dont le porte-vent est muni d'un robinet à l'aide duquel on peut graduer la force du courant d'air.

Un tube de cette espèce, long de 650 millimètres, large de 0^m,012, peut donner, pour son fondamental à 14°, une note que l'on désigne ordinairement par ut_3, et dont la longueur d'onde à 14° diffère très-peu de 0,650. Puis, en faisant varier convenablement l'ouverture du robinet, on obtient successivement les harmoniques naturels

$$ut_4 \; sol_4 \; ut_5 \; mi_5, \text{ etc.}$$

Les expériences se font d'une manière très-nette. Toutefois, pour éviter tout ambiguïté au sujet des vérifications dont il s'agit,

il faut ajouter que quand le tuyau rend un des harmoniques en question, surtout un des plus graves, on peut le faire légèrement hausser ou baisser, en ouvrant ou fermant le robinet de quantités presque imperceptibles, ou en modifiant très-légèrement la pression.

En un mot, on retrouve ici un résultat semblable à celui que l'on obtient par l'emploi du diapason, à savoir que le tuyau peut rendre une série de groupes de sons assujettis à cette double condition, que les sons de chaque groupe ne diffèrent guère les uns des autres que d'un quart de ton, et que leurs moyennes satisfassent sensiblement à la loi des harmoniques naturels.

Quand les tuyaux sont bouchés à leur partie supérieure, les nombres de vibrations des sons que l'on peut en tirer sont entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7; de plus ces tuyaux, à longueur égale, donnent sensiblement l'octave grave des tuyaux ouverts de même longueur.

Nœuds et ventres. — En cherchant à s'expliquer ces phénomènes, Daniel Bernouilli pensa que quand une colonne d'air rend successivement des harmoniques de plus en plus aigus, elle doit, ainsi que le fait une corde en des circonstances analogues, se subdiviser en plusieurs parties vibrantes à l'unisson, et séparées les unes des autres par des nœuds de vibration, par des tranches d'air où le mouvement est nul. Il admit de plus que, si l'existence de ces nœuds était réelle, on pourrait, sans changer le son du tuyau, substituer une cloison solide à la tranche d'air immobile, et de cette manière, il se trouva conduit à chercher si, en enfonçant graduellement un piston mobile dans le tuyau, il ne trouverait pas, suivant l'ordre de l'harmonique, une ou plusieurs positions dans lesquelles l'obturateur pût être placé sans qu'il en résultât aucune influence sur le son primitif.

L'expérience vérifia de tous points cette prévision, et les tubes à pistons mobiles (fig. 417) que l'on emploie maintenant dans les cours de physique permettent de manifester l'existence de quatre ou cinq nœuds dans une colonne d'air de $0^m,60$ environ.

Quelquefois encore on se sert de tuyaux dans lesquels, à la place où doit être un nœud, on a disposé une sorte de coulisse mobile ayant la forme représentée fig. 418. Quand le tuyau rend le son pour lequel un nœud existe en effet en B, on peut, en poussant plus ou moins la coulisse, boucher complétement le tuyau ou le laisser ouvert sans que le son soit modifié.

Aux nœuds, l'air est immobile ou à peu près, mais sa densité est tout à fait différente de celle de l'extérieur, aussi ne peut-on pas ouvrir le tuyau à l'endroit d'un nœud sans que le son soit

tout à fait changé. On n'apporte au contraire aucune modification au son produit en ouvrant le tuyau en un point placé à égale distance de deux nœuds consécutifs quelconques. Ces nouveaux points sont des ventres de vibrations, la densité y est sensiblement la même qu'à l'extérieur, mais le mouvement est maximum.

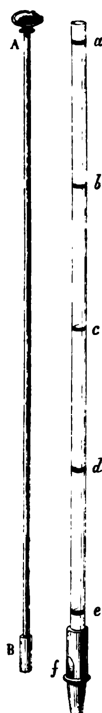


Fig. 417.

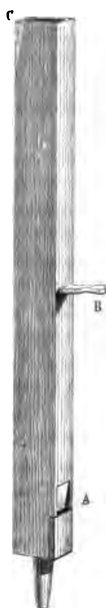


Fig. 418.

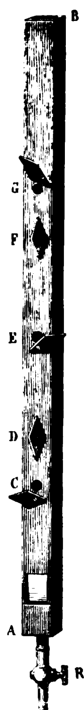


Fig. 419.

Toutes ces propriétés se démontrent avec des tuyaux dont les parois sont percées de trous munis d'opercules à l'aide desquels on peut les fermer ou les ouvrir complétement. (Fig. 419.)

Enfin, lorsqu'on a à sa disposition des tuyaux de dimensions un peu considérables, et ayant au moins l'une de leurs parois en verre, on peut étudier l'état de l'air intérieur, en y des-

cendant une légère membrane couverte de sable et supportée par un petit anneau de carton. L'anneau de carton est soutenu dans une position à très-peu près horizontale par trois fils ou par une mince tige. Dans le voisinage des ventres de vibration, le sable est fortement projeté; aux nœuds, il reste immobile, ou tout au plus il glisse avec un faible frémissement dans une direction à peu près perpendiculaire à l'axe du tube.

Pour construire les tuyaux à opercules, il faut savoir *à priori* où doivent se trouver les nœuds de vibration dans chacune des subdivisions harmoniques qui peuvent se présenter.

Or, cette connaissance résulte précisément des données suivantes, lesquelles forment du reste un des points importants de la théorie de Bernouilli.

Disposition des ventres et des nœuds. — L'expérience prouve que, quand un tuyau ouvert parle, il existe un premier nœud à une distance de l'extrémité ouverte sensiblement égale à la demi-longueur d'ondulation simple du son produit.

Elle prouve en outre que la distance de deux nœuds consécutifs ne diffère que fort peu de la longueur d'ondulation simple.

Si le tuyau est fermé, l'extrémité bouchée est un nœud, et toujours deux nœuds consécutifs quelconque sont distants d'une longueur d'ondulation simple.

Toujours aussi les ventres sont au milieu de l'espace compris entre les nœuds.

Enfin la distance du dernier nœud à l'origine quoique toujours plus courte que la demi-longueur d'ondulation simple n'en est pourtant pas très-différente.

Si la différence était nulle, l'origine occuperait la place d'un ventre, et alors il serait facile de construire des tableaux qui, résumant les principaux résultats des expériences de Bernouilli, feraient saisir d'un seul coup d'œil la manière dont se distribuent les nœuds et les ventres dans l'intérieur d'un tuyau, rendant ses divers harmoniques.

La manière dont on peut construire ces tableaux, se formule de la manière suivante :

Lorsqu'un tuyau fermé rend son n^{me} harmonique, pour avoir très-approximativement au moins la disposition des ventres et des nœuds dans son intérieur, il faut le concevoir divisé en $2n-1$ parties égales, puis compter les points de division à partir du fond du tuyau; aux numéros pairs correspondront des nœuds de vibration les ventres à ceux d'ordre impair. S'il s'agissait d'un tuyau ouvert, la division devrait être faite en $2n$ parties égales; le zéro de ces divisions étant à l'extrémité

libre, les ventres répondront aux divisions paires et les nœuds aux autres.

TABLEAUX

REPRÉSENTANT LA DISPOSITION DES VENTRES ET DES NŒUDS DE VIBRATIONS DANS LES TUYAUX SONORES, ABSTRACTION FAITE DE TOUTE PERTURBATION.

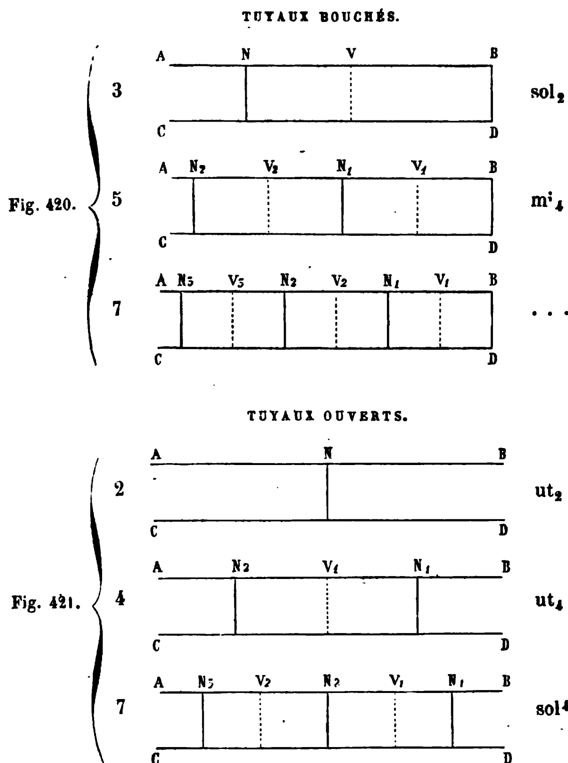


Fig. 420.

Fig. 421.

Le son ut_1 serait rendu par le bourdon ABCD (fig. 421), vibrant sans autre nœud que celui du fond BD.

L'existence des nœuds et des ventres de vibration, les rap-

ports de position qu'ils ont entre eux, les rapports de position qu'ils ont avec l'extrémité opposée à l'origine, caractérisent *d'une manière très-nette* l'état de mouvement de la colonne d'air intérieure. Or, toutes ces données expérimentales se présentent comme des conséquences nécessaires des principes précédemment posés touchant la réflexion du son et touchant les interférences des ondes directes et réfléchies.

Dans les tuyaux bouchés, en effet, la disposition des ventres et des nœuds est identique à celle que M. Savart et que M. Seebeck ont obtenue en étudiant la réflexion contre un mur indéfini.

Dans le cas des tuyaux ouverts, elle est inverse de la précédente; mais pour expliquer cet échange de position, il suffit d'admettre qu'à l'extrémité ouverte les réflexions se font sans que les vitesses changent de signe, mais avec changement des dilatations en condensations.

Les calculs s'effectuent comme à la page 49, avec l'attention seulement de changer le signe de V'.

Mais les raisonnements et les calculs auxquels nous renvoyons ici n'indiquent rien sur l'état de l'origine; et c'est en forçant un peu les indications de l'expérience que nous avons admis dans tous les cas la coïncidence de l'origine avec un ventre de vibration.

Voici donc maintenant par quelles considérations on se rend ordinairement compte de la coexistence nécessaire d'un ventre de vibration avec l'origine du tuyau dans tous les cas, et avec l'extrémité ouverte lorsqu'il s'agit de tuyaux ouverts.

Existence d'un ventre à l'origine. — Lorsqu'une masse d'air a pris un état de vibration régulier sous l'influence d'un système d'ondes directes et d'un autre système d'ondes provenant de la réflexion du premier sur un obstacle quelconque, les ventres de vibration sont définis par ce double caractère de présenter une intensité de mouvement plus grande que partout ailleurs, et une condensation nulle. L'inverse a lieu pour les nœuds de vibration.

De là résulte comme conséquence nécessaire, ou au moins très-probable, qu'aux points où un tuyau s'ouvre dans l'air il doit y avoir ventre de vibration, d'abord parce qu'en ces points la pression moyenne ne saurait différer beaucoup de celle de l'atmosphère, et ensuite parce que le renforcement du son amplifié par le tuyau sera maximum, si les couches d'air de celui-ci, qui transmettent la vibration à l'extérieur, sont celles où l'intensité du mouvement est maximum.

Influence des réflexions successives. — Toutes ces considérations sont plausibles et exactes, mais il faut ajouter qu'elles sont insuffisantes, parce qu'elles laissent inexpliqué un des points fondamentaux du phénomène, à savoir, l'énergie du renforcement.

Nous avons jusqu'ici raisonné comme si tout se trouvait produit par l'interférence d'une onde directe et d'une onde réfléchie seulement; mais, dans les meilleures conditions, dans le cas où la réflexion n'apporterait aucune perte d'intensité, l'intensité du mouvement pourrait au plus être quadruplée par le fait de cette superposition. Or, si l'on compare l'extrême faiblesse du son que rend l'embouchure d'un tuyau prise isolément à la puissance du mouvement vibratoire excité dans l'air par la résonnance de celui-ci, on reste convaincu que l'action du tuyau accroît l'intensité du son de l'embouchure dans un rapport incomparablement plus grand que celui dont nous avons donné tout à l'heure l'expression; suivant toutes probabilités, voici la raison de ce renforcement énergique : l'onde réfléchie, au moment où elle revient à l'origine du tuyau, y éprouve une réflexion nouvelle; si cette nouvelle réflexion est assimilable à celle qui a lieu à l'extrémité d'un tuyau ouvert, et si l'orifice est à une distance du fond égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde simple, l'intensité du mouvement intérieur est accrue, mais point d'autre changement, car cette nouvelle onde, qui part de l'origine absolument dans les mêmes conditions que l'onde primitive, se réfléchira comme elle au fond, et constituera, avec son onde réfléchie, un système tout semblable à celui que nous avons d'abord considéré, et qui ne fera que se superposer avec lui.

Sans doute, on pourrait objecter que la réflexion produite à l'origine du tuyau est plus compliquée que nous ne le supposons ici; car s'il y a à cet orifice un orifice par où le mouvement peut se répandre dans l'air, il y a aussi un fond solide contre lequel doit s'opérer une réflexion semblable à celle qui a lieu au fond des bourdons; les effets sont inverses, et il doit en résulter un décroissement dans l'intensité des mouvements qui proviennent de ces réflexions multiples. L'effet total de ces réflexions se trouve alors diminué; mais dans les circonstances ordinaires il reste encore très-puissant.

N. Dans ce qui va suivre, nous avons fait de larges emprunts aux travaux de M. Poisson et de M. Hopkins, et surtout à *la Théorie nouvelle des tuyaux sonores*, de M. Quet, et à *un travail inédit* de M. Ed. Desains sur les mêmes matières.

§ 2. — THÉORIE MATHÉMATIQUE DES TUYAUX SONORES.

Pour ne pas laisser trop incomplet le développement de l'importante théorie qui nous occupe, nous allons maintenant calculer le mouvement des couches gazeuses, en admettant que les réflexions qui s'opèrent aux deux extrémités des tuyaux s'opèrent avec perte d'intensité et changement dans la phase de vibration, et cette dernière hypothèse introduira dans les résultats des termes correctifs qui représenteront ce que l'on appelle d'ordinaire l'influence perturbatrice de l'origine et de l'extrémité du tuyau.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, si en un point o d'un tuyau il existe un mouvement vibratoire défini par la relation $U = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$, à une distance x du point o, les molécules de l'air auront une vitesse v égale à $a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right)$, l étant la longueur d'onde du son qui se propage, et φ le reste de la division de x par l. Il faudrait dans cette expression accentuer a si l'on supposait que des causes quelconques fissent, d'un point à l'autre du tuyau, varier la grandeur de la vitesse maximum des molécules vibrantes.

Si maintenant il arrivait que différents mouvements de cette espèce, tous dirigés suivant une même droite, vinssent concourir en un même point et y combiner leurs effets, la vitesse du mouvement résultant serait périodique. Sa période aurait une durée τ, identique à celle des mouvements composants, par conséquent enfin la vitesse V de la vibration résultante serait donnée par l'équation.

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\Phi}{l}\right) = V$$

Pour déterminer les coefficients A et Φ, on exprime que la vitesse V est la somme algébrique des vitesses composantes, v, v'... Ce qui conduit aux équations suivantes :

$$A \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\Phi}{l} - A \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\Phi}{l} =$$

$$a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\varphi}{l} - a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\varphi}{l} +$$

$$a' \sin 2\pi \frac{t}{l} \cos 2\pi \frac{\varphi'}{l} - a' \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\varphi}{l} +$$

. . . .

Cette équation doit être vraie quel que soit t, et par suite il faut que l'on ait

$$A \cos 2\pi \frac{\Phi}{l} = \Sigma a \cos 2\pi \frac{\varphi}{l}$$

$$A \sin 2\pi \frac{\Phi}{l} = \Sigma a \sin 2\pi \frac{\varphi}{l}$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad A^2 = \left[\Sigma \left(a \cos 2\pi \frac{\varphi}{l}\right)\right]^2 + \left[\Sigma \left(a \sin 2\pi \frac{\varphi}{l}\right)\right]^2$$

et

$$(2) \qquad \tang 2\pi \frac{\Phi}{l} = \frac{\Sigma a \sin 2\pi \frac{\varphi}{l}}{\Sigma a \cos 2\pi \frac{\varphi}{l}}$$

Avant d'aller plus loin il faut préciser la signification physique du quotient $\frac{\varphi}{l}$; voici comment : les vitesses données par les équations $U = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ et $v = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right)$ n'atteignant pas leurs maxima successifs aux mêmes instants ; — pour le second mouvement les époques des maxima sont en retard sur celles du premier, et le produit $\frac{\varphi}{l}.\tau$ est la mesure de ce retard.

L'angle $2\pi \frac{\varphi}{l}$ est ce qu'on appelle la phase de vibration du deuxième mouvement.

Si en particulier il s'agissait de combiner deux mouvements ayant toujours a et a' pour coefficients de vibration et pour lesquels $2\pi\frac{\varphi}{l}$, $2\pi\frac{\varphi'}{l}$ fussent respectivement égaux à ρ et ρ' — l'intensité A^2 de la vibration résultante serait donnée par l'équation.

$$A^2 = a^2 \cos^2 \rho + a'^2 \cos^2 \rho' + 2aa' \cos \rho \cos \rho'$$
$$+ a^2 \sin^2 \rho + a'^2 \sin^2 \rho' + 2aa' \sin \rho \sin \rho'$$

ou

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos (\rho' - \rho)$$

L'interprétation géométrique de cette formule est très-simple : — on en déduit en effet que pour obtenir l'intensité, il faut, au point O d'une droite quelconque OX (fig. 422), mener une ligne $OB = a$,

et faisant avec OX un angle BOX = ρ. Puis au point B, mener une autre ligne BC = a', et faisant avec OX un angle ρ', enfin joindre OC, la ligne OC représentera A, et l'angle COX sera la phase Φ_1 du mouvement résultant.
car

$$(3) \qquad tang\ COX = \frac{CD + DE}{FE + OF} = \frac{a' \sin \rho' + a \sin \rho}{a' \cos \rho' + a \cos \rho}.$$

Supposons maintenant que l'on ait un autre mouvement résultant aussi de la combinaison de deux vibrations simples, dont les coefficients soient respectivement ma et ma', et les phases

$$\rho + \Psi = B'OX \text{ et } \rho' + \Psi = C'HX,$$

l'intensité de ce nouveau mouvement sera

$$m^2 (a^2 + a'^2 + 2aa' \cos (\rho - \rho').$$

Quant à la phase, elle sera évidemment $\Phi_1 + \Psi$, car le triangle OB'C' est semblable au triangle OBC, et par suite l'angle C'OX ne diffère de l'angle COX que d'une quantité égale à la différence Ψ des angles B'OX et BOX.

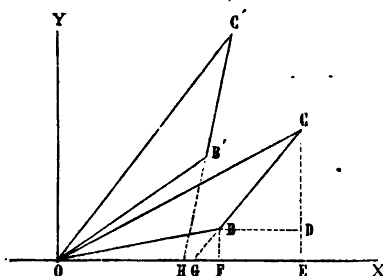


Fig. 422.

Ceci posé, il est évident que, si en un point p du tuyau, on considère deux vibrations élémentaires, l'une venant de l'origine, l'autre revenant du fond, après y avoir subi une *seule* réflexion de plus que la première, le rapport m des amplitudes de ces deux vibrations sera indépendant du nombre de réflexions que l'une ou l'autre aura antérieurement subies, et la différence χ

de leurs phases sera aussi constante; elle ne dépendra que de la distance y du point p au fond du tuyau, et du retard particulier que la réflexion sur ce fond peut déterminer. L'intensité du mouvement résultant de ces deux vibrations élémentaires aura une expression de la forme :

$$a^2 (1 + m^2 + 2m \cos \chi).$$

Sa phase ω pourra être calculée par la formule (3) en fonction de χ et de la phase ζ du premier de ces mouvements.

Que maintenant l'onde en retour continue sa route, elle se réfléchira à l'origine et reviendra de cette origine en p, en y apportant un nouveau mouvement élémentaire dont le coefficient de vibration ne sera plus a, mais amm', et dont la phase différera de celle de a d'une quantité z égale à $2\pi \left(\frac{2L}{l} + \chi'\right)$, χ' représentant la somme des retards positifs ou négatifs produits par les deux réflexions subies aux deux bouts du tuyau, et L la longueur du tuyau.

Et les choses se continueront indéfiniment de la même manière.

Donc, pour avoir le mouvement total en p, il faudra combiner une série de mouvements dont les intensités sont respectivement,

$$a^2 (1 + m^2 + 2m \cos \chi) = A^2$$
$$m'^2 a^2 (1 + m^2 + 2m \cos \chi) = m'^2 A^2$$
$$m'^4 a^2 (1 + m^2 + 2m \cos \chi) = m'^4 A^2$$

et dont les phases sont

$$\omega$$
$$\omega + z$$
$$\omega + 2z$$
$$\omega + 3z\ldots.$$

Il en résulte que, pour déterminer l'intensité du mouvement résultant définitif, on aura l'équation :

$$A_1^2 = A^2 [\cos \omega + m' \cos (\omega + z) + m'^2 \cos (\omega + 2z\ldots\ldots)]^2$$
$$+ A^2 [\sin \omega + m' \sin (\omega + z) + m'^2 \sin (\omega + 2z\ldots\ldots)]^2$$

ou, ce qui revient au même, comme on s'en assure aisément :

$$A_1^2 = A^2 (1 + m' \cos z + m'^2 \cos 2z + m'^3 \cos 3z\ldots\ldots)^2$$
$$+ A^2 (0 + m' \sin z + m'^2 \sin 2z + m'^3 \sin 3z\ldots\ldots)^2$$

Or, les sommes des séries entre parenthèse sont connues; la première est :

$$\frac{1 - m' \cos z}{1 - 2m' \cos z + m'^2}$$

la seconde est :

$$\frac{m' \sin z}{1 - 2m' \cos z + m'^2}$$

Il en résulte

$$A_1{}^2 = \frac{(1 + m'^2 - 2m' \cos z)\, A^2}{(1 - 2m' \cos z + m'^2)^2}$$

$$A_1{}^2 = \frac{A^2}{1 - 2m' \cos z + m'^2} = \frac{a^2 (1 + m^2 + 2m \cos \chi)}{1 - 2m' \cos z + m'^2}$$

La discussion de cette formule ne présente pas de difficulté.— D'abord, si m est plus petit que l'unité, l'intensité A^2 du mouvement de l'air ne pourra jamais être nulle; en effet, la plus petite valeur du numérateur est égale à $(1 - m)^2$, ce qui est une quantité essentiellement positive; mais si A_1 ne devient jamais nul, il acquerra des minima et des maxima d'autant plus prononcés que m sera plus voisin de l'unité.

La valeur du dénominateur étant indépendante de y, on obtiendra les valeurs de y qui repondent aux maxima et aux minima de la fonction, en cherchant celles qui répondent aux maxima et aux minima du numérateur.

Les premières sont données par l'équation $\cos \chi = 1$, les secondes par l'équation $\cos \chi = -1$. Or, l'angle χ est égal à $2\pi \left(\frac{2y}{l} + \frac{c}{l}\right)$, c étant le retard dû à la réflexion.

Dans le cas des tuyaux fermés, ce retard paraît différer peu d'une demi-ondulation; posons donc $\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{c'}{\lambda}$; c' serait nul si l'on adoptait rigoureusement ce que l'on appelle la théorie de Bernouilli.

De l'équation

$$\cos 2\pi \left(\frac{2y}{l} + \frac{c'}{l} + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

on tire

$$\frac{2y + c'}{l} = n - \frac{1}{2},$$

$$2y + c' = nl - \frac{1}{2}\, l = \frac{l\,(2n - 1)}{2},$$

$$y = \frac{l\,(2n - 1 - 2c')}{4} = \frac{nl}{2} - \frac{c'}{2} - \frac{l}{4}.$$

Pour déterminer la position des minima ou nœuds de vibration, il faudrait résoudre l'équation

$$\cos 2\pi\left(\frac{2y}{l}+\frac{c'}{l}+\frac{1}{2}\right)=-1,$$

d'où

$$\frac{2y}{l}+\frac{c'}{l}+\frac{1}{2}=\frac{2n+1}{2}$$

$$\frac{2y+c'}{l}=n,$$

$$y=\frac{nl-c'}{2}.$$

Ainsi deux nœuds ou deux ventres consécutifs sont toujours distants d'une quantité égale à une longueur d'ondulation simple.

Toujours la distance d'un ventre au nœud le plus voisin est égal à un quart d'onde complète ou à une demi-longueur d'onde simple.

Mais la distance qui sépare du fond même du tuyau le premier nœud que l'on rencontre en s'avançant vers l'orifice, au lieu d'être $\frac{l}{2}$, est $\frac{l}{2}-\frac{c'}{2}$. Seulement comme on le verra plus loin c' paraît être très-petit.

Quand il s'agit de tuyaux ouverts, la réflexion ne change pas le signe des vitesses. Nous laisserons alors à l'équation qui donne la valeur de x la forme sous laquelle elle se présente naturellement. Nous représenterons par c_1 le retard dû à la réflexion qui s'opère contre l'air extérieur, à l'extrémité ouverte du tuyau; et alors pour avoir les maxima ou ventres, il faudra satisfaire à la relation

$$\frac{2y+c_1}{l}=n,$$

laquelle coïncide avec celle qui donne la position des nœuds dans le tuyau fermé, au moins si on admet que $c_1=c'$, et en particulier si l'on admet que c_1 et c' soient tous deux nuls.

Réciproquement l'équation

$$\frac{2y+c_1}{l}=\frac{2n-1}{2}$$

donnerait les nœuds; l'on voit qu'elle est semblable à celle qui définissait dans le cas précédent la position des ventres.

La position des ventres et des nœuds ne dépend pas de la longueur du tuyau; en d'autres termes, elle ne dépend pas de la position de l'origine par rapport au fond.

Mais c'est de ce dernier élément que dépend, pour un tuyau, la possibilité de renforcer tel son plutôt que tel autre.

Si le tuyau est fermé, il paraît naturel d'admettre que les sons les mieux renforcés, ceux que le tuyau rendra le plus volontiers sont ceux pour lesquels l'intensité de la vibration acquerra un de ses maximum à l'origine même du tuyau, à l'endroit par lequel la vibration peut se communiquer à l'air; en un mot, au point pour lequel on a $y = L$, L étant la longueur du tuyau.

Cherchons donc pour une valeur déterminée de L quelles sont les valeurs de l qui rendent maximum l'expression

$$\frac{1 + m^2 + 2m \cos \chi_1}{1 + m'^2 - 2m' \cos z_1},$$

χ_1 et z_1 étant les valeurs que prennent χ et z au point pour lequel $y = L$. Et pour éviter, dans cette recherche, tout développement de calcul inutile, bornons-le au cas de la pratique, c'est-à-dire au cas où le tuyau renforce énergiquement le son produit à l'origine.

Pour que ce renforcement énergique ait lieu, il faut que le dénominateur $1 + m'^2 - 2m' \cos z_1$ puisse devenir très-petit, par suite m' doit être voisin de 1. La valeur de z_1, qui rend ainsi le dénominateur le plus voisin possible de zéro, est donnée par l'équation $\cos z_1 = 1$ ou

$$\cos 2\pi \left(\frac{2L}{l} + \frac{c'}{l} + \frac{c'_1}{l} + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

c'_1 étant le retard dû à la réflexion à l'origine. Posons $c' + c'_1 = K$, et l'équation précédente deviendra,

$$2\pi \left(\frac{2L}{l} + \frac{K}{l}\right) = \pi,$$
$$\dots\dots\dots\dots = 3\pi$$
$$\dots\dots\dots\dots = 5\pi$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ou

$$\frac{2L}{l} + \frac{K}{l} = \frac{1}{2} \cdot\cdot \frac{3}{2} \cdot\cdot \frac{5}{2},$$

ou enfin, en posant $l = 2l'$,

$$\frac{L}{l'} + \frac{K}{2l'} = \frac{1}{2} \dots \frac{3}{2} \dots \frac{5}{2}$$

d'où

$$l' = \frac{2(L + 1/2 K)}{1} \dots \frac{2(L + 1/2 K)}{3} \dots \frac{2(L + 1/2 K)}{5}$$

Or, les valeurs de l', ainsi déterminées, peuvent être considérées comme celles qui répondent au maximum de la fonction. En effet, posons $m' = (1 - \delta)$, δ étant fort petit; lorsque $\cos z_1 = 1$, le dénominateur devient

$$2 - 2\delta + \delta^2 - 2 + 2\delta \text{ ou simplement } \delta^2.$$

Supposons que $\cos z_1$ diminue de δ, le dénominateur devient

$$2 - 2\delta + \delta^2 - 2(1 - \delta)(1 - \delta)$$
$$2 - 2\delta + \delta^2 - 2 + 2\delta + 2\delta - 2\delta^2$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$\delta(2 - \delta).$$

Il s'est donc accru dans une proportion très-considérable; il est devenu égal à sa valeur première multipliée par $\frac{2 - \delta}{\delta}$, tandis que la valeur du numérateur a changé à peine.

Ainsi donc, les sons que le tuyau renforce le plus possible forment une série d'harmoniques impairs, et le plus grave d'entre eux a une longueur d'onde égale à $2(L + 1/2 K)$.

Sans doute, d'autres sons que ceux-là peuvent être renforcés, mais si peu qu'un son s'éloigne de la série que nous venons de définir, l'intensité en diminue, comme nous venons de le voir, avec une rapidité telle qu'on ne peut plus le considérer comme réellement renforcé par le tuyau.

Si le tuyau était ouvert, pour avoir rigoureusement la condition du renforcement maximum à l'extrémité, opposée à l'embouchure, il faudrait, en cherchant la condition du maximum de A^2, supposer que χ et z ont les valeurs qui répondent à $y = 0$. Alors l'angle χ se réduit à $2\pi \frac{c_1}{l}$, c_1 étant le retard possible dû à la réflexion contre l'air. z est égal à $2\pi \left(\frac{2L}{l} + \frac{c_1}{l} + \frac{c'_1}{l}\right)$, c'_1 conservant la même valeur que dans le cas précédent.

La valeur de l, qui répond au maximum, est donnée par l'équation

$$\cos 2\pi \left(\frac{2L}{l} + \frac{c_1 + c'_1}{l}\right) = 1,$$

et il est à remarquer que cette valeur fait aussi acquérir à l'intensité du mouvement à l'origine une valeur qui ne diffère pour ainsi dire pas du maximum relatif à cette origine.

Si l'on résout l'équation

$$\cos 2\pi\left(\frac{2L}{l}+\frac{c_1+c'_1}{l}\right)=1,$$

en posant

$$l=2l' \text{ et } c_1+c'_1=K',$$

on en tire

$$2\pi\left(\frac{L}{l'}+\frac{K'}{2l'}\right)=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \ldots$$

$$\frac{L}{l'}+\frac{K'}{2l'}=1,\ \ldots 2\ \ldots\ 3\ldots$$

$$L+\frac{1}{2}K'=l',\ \ldots\ 2l'\ \ldots\ 3l'\ldots$$

$$l'=L+\frac{1}{2}K'$$

$$=\frac{1}{2}(L+1/2\,K')$$

$$=\frac{1}{3}(L+1/2\,K').$$

. . . .

§ 2. — DISCUSSION EXPÉRIMENTALE.

Pour discuter ainsi que nous venons de le faire l'équation

$$A^2=\frac{a^2(1+m^2+2m\cos\chi)}{1+m'^2-2m'\cos z},$$

nous avons admis que les retards possibles dus aux réflexions à chaque bout du tuyau ne dépendent ni de la longueur d'onde ni de celle du tuyau. Cette hypothèse était la plus simple, et l'expérience la confirme.

Recherches de M. Wertheim. — M. Wertheim a reconnu, en effet, que si l'on fait parler différents tuyaux ouverts, tous formés en ajustant sur la même embouchure des tubes de même diamètre, mais d'inégale longueur, les sons que l'on en tire satisfont toujours à cette condition que leur longeur d'onde s'obtient en divisant par l'ordre de l'harmonique obtenu la longueur L du tuyau accrue d'une quantité Z, qui reste la même dans tous les cas.

Cette correction Z varie avec le diamètre du tuyau, et elle augmente avec lui.

Elle change peu lorsqu'on transforme un tuyau ouvert en bourdon, et dans ces circonstances elle paraît éprouver une légère diminution. Il est bien entendu, toutefois, que, dans le cas des bourdons, pour obtenir l'onde du n^{me} harmonique, on doit diviser par $2n-1$ non plus $L+Z'$, mais $2(L+Z')$.

Le peu de différence qui existe entre Z et Z' peut porter à croire que les perturbations, en vertu desquelles les corrections dont nous parlons sont nécessaires, ont lieu surtout à l'origine, et c'est en vertu de leur action que la distance du premier nœud à l'embouchure est toujours notablement moindre que la demi-longueur d'ondulation *simple* du son produit.

Mais dans l'intérieur du tuyau, quand on se place en des conditions convenables, l'intervalle de deux ventres ou de deux nœuds consécutifs paraît être égal, ainsi que la théorie l'indique, à la longueur d'ondulation simple, ou, si l'on aime mieux, à la demi-longueur d'ondulation complète.

Bernouilli l'admettait comme résultat de ses expériences, et à l'appui de cette opinion, nous indiquerons deux séries d'observations qui peuvent être aisément répétées.

Les collections d'acoustique renferment presque toujours une flûte formée de cinq parties pouvant s'ajuster les unes sur les autres : la première constitue une sorte de sifflet, qui, monté sur la soufflerie, donne un son bien net et connu; or, cette première partie est toujours plus courte que l'onde du son qu'elle rend; les autres ont chacune exactement la longueur de cette onde, et l'on ne modifie en rien le son produit en les ajustant successivement sur la première.

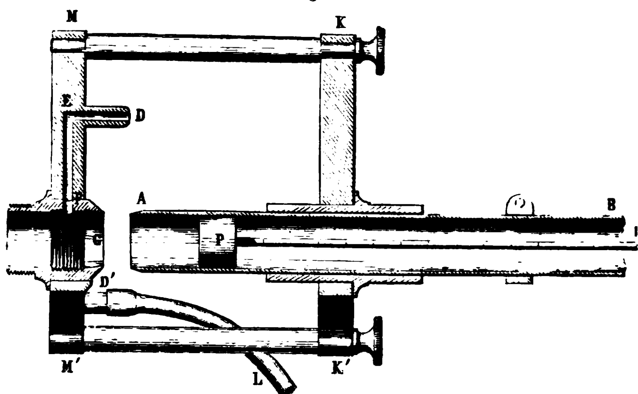
Recherches de M. Masson. — Ainsi, d'après M. Masson (*Ann. de Ph. et Ch.*, t. XL, page 462), une flûte de ce genre rendait comme harmonique, à la température de 10° un son caractérisé par une longeur d'onde de $0^m,1385$. Or, la première partie de la flûte, celle qui portait l'embouchure, avait seulement une longueur de $0^m,103$ tandis que les autres étaient longues précisément de $0^m,138$ comme la théorie l'indique.

Recherches de MM. Lissajous et P. Desains. — La seconde preuve que je citerai à l'appui de l'assertion de Bernouilli résulte d'une série d'expériences que nous avons faites, M. Lissajous et moi, pour reconnaître si la distance de deux nœuds dans un tuyau qui rend un harmonique supérieur est bien égale, comme la théorie l'indique, à la longueur de l'ondulation simple du son rendu par le tuyau.

Pour nous rapprocher autant que possible des conditions admises dans le calcul, nous opérions avec un tuyau long [1], étroit et embouché sur tout son pourtour.

La disposition générale en est indiquée sur la figure 423.

Fig. 423.



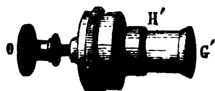


Fig. 424.

Le tube principal AB aminci en biseau vers son bord A, passe à frottement dans une bague soutenue par la traverse KK'; cette traverse se relie au moyen des tiges KM, K'M', à la pièce MM' dans laquelle est fixé le porte-vent.

Le porte-vent se compose :

1° De trois tubes DF, D', F' (fig. 425) disposés symétriquement autour de l'axe du tuyau; l'un de ces tubes est visible en DEF (fig. 423);

2° D'une cavité comprise entre la partie intérieure du tube G (fig. 423) et la surface extérieure, de la pièce OH'G' (fig. 424) qui se fixe dans le tube G.

Quand cette pièce est en place, il existe entre son rebord extrême G' et le pourtour du tube G une fente circulaire faisant

1. La longueur du tuyau était de 1m, sa largeur de 0m02.

fonction de lumière, et par laquelle l'air s'échappe pour venir frapper contre la lèvre A.

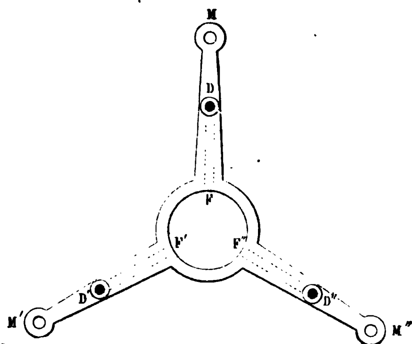


Fig. 425.

Le vent arrive dans le porte-vent par les trois tubes DF, D'F', D''F'' (fig. 425), et la vis permet de faire mouvoir graduellement la pièce cylindrique G' (fig. 424) de manière à modifier légèrement la forme de l'embouchure, et à rendre, par là même, facile la sortie du son que le tuyau doit donner.

Le tuyau AB, intérieurement bien cylindrique, reçoit un piston mobile à frottement régulier, mais un peu dur, et dont la tige était exactement divisée en millimètres.

On commençait par disposer l'embouchure de telle sorte que le tuyau, complétement ouvert, rendît nettement le deuxième ou le troisième harmonique, et l'on en déterminait la valeur. Puis on enfonçait graduellement le piston ; le son était modifié, mais bientôt on retrouvait une nouvelle position du piston pour laquelle il sortait de nouveau. Or, en ces circonstances, conformément à la théorie et contrairement à ce que l'on énonce souvent, la distance des deux positions consécutives dans lesquelles il fallait placer le piston pour reproduire le même son s'est toujours trouvée égale à la longueur d'onde qui caractérisait, à la température de l'expérience, le son rendu par le tuyau.

Loi du père Mersenne. — Dès que les molécules gazeuses comprises dans le tuyau sonore ne sont plus, à toute époque de leur mouvement, animées de vitesses parallèles entre elles et à l'axe du tuyau, l'expérience cesse nécessairement de vérifier les résultats d'un calcul fondé sur l'hypothèse de ce parallélisme, et

il n'existe pas encore de théorie générale qui rende compte du phénomène acoustique produit dans ces nouvelles circonstances. On sait seulement, d'après les travaux du P. Mersenne que si des tuyaux sont géométriquement semblables, et embouchés comme à l'ordinaire suivant une de leurs arêtes toute entière, les valeurs numériques de leurs harmoniques de même ordre sont réciproquement proportionnelles aux dimensions homologues de la masse gazeuse mise en vibration. M. Savart a vérifié ces résultats, et depuis son travail on trouve souvent dans les collections d'acoustique plusieurs groupes de tuyaux à l'aide desquels on en rend sensible l'exactitude.

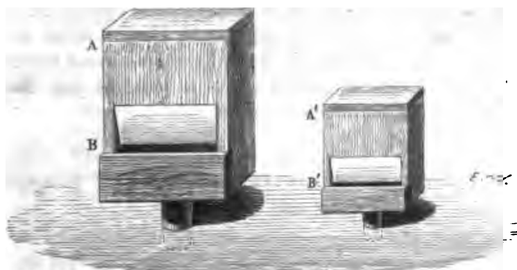


Fig. 426.

La figure 426 représente deux petits bourdons cubiques qui sont à l'octave l'un de l'autre; leurs dimensions homologues A'B', A B, sont dans le rapport de 1 à 2.

On répète encore l'expérience avec des tuyaux prismatiques triangulaires embouchés par toute une de leurs arêtes de base.

Recherches de M. Savart. — Quand les tuyaux ne sont pas semblables, on ne connaît pas d'énoncé simple qui permette de déduire la valeur du son fondamental qu'ils doivent rendre, de la seule connaissance de leurs dimensions. Toutefois, M. Savart, qui s'est tant occupé de ces questions, a laissé sur ce point quelques données importantes.

D'après lui, quand il s'agit d'un tuyau prismatique embouché à la manière ordinaire, c'est-à-dire par tout un des côtés de la base, le nombre de vibrations ne dépend pas de la dimension de ce côté; il dépend de l'étendue de l'autre côté et diminue quand elle augmente.

Il n'est pas besoin d'ajouter que le son monte quand la longueur du tuyau diminue, et dès lors on conçoit que l'embou-

chure restant la même, on peut tirer le même son de tuyaux de dimensions très-différentes, les uns longs et plus étroits, les autres profonds, mais très-surbaissés.

Enfin, dans le cas des tuyaux prismatiques à base carrée, M. Savart a reconnu que, si le rapport de la longueur à la largeur est compris entre 6 et $\frac{1}{6}$, le son conserve une valeur constante lorsque le produit de ces deux dimensions reste lui-même invariable.

M. Wertheim et M. Masson sont revenus sur ces questions. Ils ont cherché des formules empiriques qui pussent permettre de calculer à l'avance le son rendu par un tuyau ou vase de forme quelconque, lorsqu'on en assigne les dimensions ainsi que celles de l'embouchure. Mais la discussion comparée de leurs résultats, et de ceux qu'avait obtenus M. Savart nous entraînerait hors des limites dans lesquelles nous devons nous restreindre, lorsqu'il s'agit de points sur lesquels il n'existe pas encore de corps de doctrine généralement admis.

§ 4. — Vitesse de propagation du son dans les gaz et dans les liquides.

L'air et l'eau sont les seuls milieux que l'on ait en masse homogène assez considérable pour qu'on puisse y étudier directement la propagation des ondes sphériques. Pour les autres fluides il faut recourir à une méthode indirecte : c'est la théorie des tuyaux qui y conduit.

Si en effet la théorie et l'expérience s'accordent pour prouver que, quand on fait rendre dans l'air à un tuyau convenablement disposé l'un de ses harmoniques supérieurs, la distance de deux nœuds consécutifs est bien égale à la longueur d'onde du son produit, il en résulte que, pour avoir la vitesse de propagation du son dans un gaz quelconque, il doit suffire de faire parler, au milieu d'un réservoir plein de ce gaz, un tuyau semblable à ceux qui ont conduit aux résultats que nous venons de rappeler, et de chercher, à l'aide d'un piston mobile, la distance qui sépare deux nœuds consécutifs, lorsque l'on aura obtenu le troisième ou le quatrième harmonique.

Le produit de cette distance par le nombre de vibrations du son produit sera la vitesse cherchée.

Il est vrai que si le tuyau n'était pas assez long, ou s'il n'était pas embouché sur tout son pourtour, la distance de deux nœuds consécutifs lors de la production d'un harmonique quel-

conque, ne serait pas égale à la longueur d'onde du son obtenu. Mais alors, il résulte des travaux de M. Wertheim qu'en ajoutant à la longueur L du tuyau une certaine quantité Z indépendante de la nature du gaz sur lequel on opère, on reproduit toujours la longueur d'onde du son fondamental. Dès lors pour avoir le rapport des vitesses du son dans deux gaz quelconques, il suffira de faire rendre le même harmonique à un même tuyau parlant successivement dans ces deux gaz, et de prendre le rapport des nombres de vibrations exécutées dans les deux cas.

M. Dulong a, le premier employé cette méthode, et il a obtenu les résultats suivants :

TABLEAU DES VITESSES DU SON DANS DIFFÉRENTS GAZ A LA TEMPÉRATURE ZÉRO.

Noms des gaz.	Vitesses de propagation.
Oxygène	318m 17
Hydrogène	1269. 50
Acide carbonique	216. 6
Oxyde de carbone	337. 4
Oxyde d'azote	261. 9
Hydrogène bicarboné	314. 00

Vitesse du son dans les liquides. — M. Wertheim après avoir légitimé la méthode de M. Dulong, lui a donné une extension considérable. Il a démontré que, pour un même tuyau, l'influence de l'embouchure est la même, soit que le tuyau parle dans l'air, soit qu'il parle dans un liquide quelconque; et les recherches qui l'ont conduit à ce théorème, lui ont fait connaître en même temps la vitesse avec laquelle le son se propage dans des colonnes cylindriques de fluides quelconques.

Dans les expériences de M. Wertheim les tuyaux étaient ouverts et embouchés à la manière ordinaire; comme ils étaient d'ailleurs formés de plusieurs bouts s'ajustant à vis les uns sur les autres, on en pouvait faire varier la longueur.

On les maintenait complétement immergés dans le liquide sur lequel on voulait opérer, et l'on prenait des soins extrêmes pour qu'aucune bulle d'air ne restât fixée dans la lumière.

L'embouchure était mise en communication par un tube métallique avec une pompe foulante munie d'un réservoir à air comprimé; le jet de liquide qui s'en échappait venait toujours avec la même vitesse se briser contre la lèvre supérieure de la bouche et faisait parler l'appareil.

La réussite complète des expériences présente de grandes difficultés, parce que l'on est souvent exposé à confondre avec les vrais sons de la colonne liquide, des sortes de sifflements qui paraissent dus à l'embouchure seule. Mais toutes les fois qu'un doute était possible, M. Wertheim le faisait disparaître en forçant le tuyau à rendre successivement plusieurs des harmoniques du son fondamental, et alors toute ambiguïté se trouvait écartée.

Après avoir ainsi déterminé les valeurs N, N', N'' des sons fondamentaux qui correspondaient à une série de tuyaux identiques de tous points à la longueur près, on cherchait la valeur de Z qui satisfaisait aux équations :

$$N(L+Z) = N'(L'+Z) = N''(L''+Z) \ldots\ldots$$

et lorsqu'on l'avait déterminée, une quelconque des équations

$$N(L+Z) = V$$
$$N'(L'+Z) = V \ldots\ldots$$

donnait la valeur V de la vitesse de propagation du son dans une colonne cylindrique du liquide employé.

La détermination directe de la correction Z n'est possible que sur des liquides dont on peut se procurer de grandes quantités, parce qu'elle suppose que l'on peut faire varier dans des limites étendues la longueur du tuyau, et que, par conséquent, on opère dans de grands réservoirs.

Mais comme on l'a trouvée la même dans l'air, dans l'eau et dans tous les liquides qui se sont prêtés à une détermination directe, on a pu admettre qu'elle reste constante toutes les fois qu'on emploie le même tube et la même embouchure, et dès lors lui assigner constamment la même valeur dans toutes les expériences faites avec le même tuyau.

Dans le cas de l'eau, la valeur de la vitesse V doit être multipliée par $\sqrt{\frac{3}{2}}$ pour reproduire celle que MM. Colladon et Sturm avaient trouvée pour la propagation des ondes sphériques dans le lac de Genève. Mais cela n'est en aucune sorte contradictoire. En effet, de la discussion complète du problème de la propagation du son dans les fluides, M. Wertheim a déduit que cette différence doit en effet exister, et avoir la valeur donnée par la comparaison des deux séries d'expériences que nous venons de citer.

VITESSES DU SON DANS DES COLONNES CYLINDRIQUES DE DIFFÉRENTS LIQUIDES.

Noms des liquides.	Température.	Vitesses.
Eau de Seine..............	15°	1173m 4
—	40	1324. 5
—	60	1408. 2
Alcool absolu..............	23	947. 0
Essence de térébenthine ...	24	989. 0

En multipliant par $\sqrt{\frac{3}{2}}$ les vitesses inscrites en ce tableau, on obtiendrait celles qui eussent été trouvées dans une masse indéfinie.

CHAPITRE VIII

VIBRATIONS LONGITUDINALES DES VERGES RIGIDES.

§ 1. — LOIS DES VIBRATIONS LONGITUDINALES DES VERGES.

Une verge vibre longitudinalement lorsque les oscillations des molécules qui la composent se font suivant des droites parallèles à sa plus grande longueur. — Les sons qui correspondent aux vibrations dont il s'agit ici sont en général très-purs, mais en même temps ils sont fort aigus, à moins que les verges n'aient de très-grandes dimensions. Dans tous les cas l'ensemble des propositions que nous allons exposer prouve que les lois des vibrations longitudinales des verges sont identiques à celles des tuyaux sonores, et cela n'a rien de surprenant, puisqu'à proprement parler le gaz qui vibre dans un tuyau constitue une verge de fluide aériforme délimitée par des parois qui n'ont d'autre effet que de la séparer de l'air extérieur.

Pour faire vibrer longitudinalement une verge de bois ou de métal, on la frotte sans effort dans le sens de sa longueur avec un morceau de drap saupoudré de colophane finement pulvérisée. Quant aux verges de verre, on emploie de préférence pour frottoir du drap humecté d'eau légèrement acidulée. Dans tous les cas, il faut apporter une attention spéciale à la manière dont on soutient la verge, parce qu'avec la position des points que l'on fixe changent les conditions du mouvement.

Verges libres aux deux bouts. — Quand la verge est libre aux deux bouts, elle est assimilable à un tuyau ouvert. Pour le faire voir, il nous suffira de prouver que toutes les conséquences de cette assertion sont rigoureusement vérifiées par l'expérience. La première sur laquelle nous insisterons, c'est que les nombres de vibrations des sons fondamentaux que l'on peut tirer d'une série de verges de même section et de même nature, mais de longueurs différentes, sont inversement proportionnels à ces longueurs. — L'expérience ne présente aucune difficulté; car on obtient le son fondamental en tenant d'une main la verge par son milieu, et la frottant de l'autre vers l'une de ses extrémités.

Pour les verges comme pour les tuyaux suffisamment étroits, les dimensions transversales n'influent pas sur le son produit. La forme de la section est également indifférente; mais des verges de même longueur et de nature différente, d'acier, de laiton, de bois, etc., donnent des sons très-différents les uns des autres.

Enfin, les harmoniques qu'on peut tirer d'une verge libre aux deux bouts forment une série toute semblable à celle que fournissent les tuyaux ouverts. Pour obtenir l'un de ces harmoniques, il faut fixer la verge en un ou plusieurs des points où la théorie de Bernouilli, appliquée à cette verge, indiquerait l'existence d'un nœud. Par exemple, au quart de la verge si l'on veut obtenir l'octave du son fondamental, au sixième s'il s'agit d'avoir le son trois, et ainsi de suite.

Verges fixées à un bout. — Les verges fixées à un bout vibrent comme des tuyaux bouchés; et de même que l'on peut faire une gamme avec sept bourdons dont les longueurs ont entre elles les rapports convenables, de même aussi, lorsqu'on implante dans un même socle de bois sept baguettes de sapin de longueurs rigoureusement ajustées, on peut en tirer les sept notes de la gamme naturelle. Pour terminer la démonstration de la proposition énoncée au commencement du chapitre, il reste à établir, par des expériences directes, l'existence des ventres et des nœuds de vibration dans les verges vibrantes.

Ventres et nœuds de vibration. — On démontre d'ordinaire l'existence d'un ventre de vibration à l'une des extrémités d'une verge fixée en son milieu. — Pour cela, comme nous l'avons déjà indiqué page 2, on approche de l'extrémité que l'on considère une bille d'ivoire suspendue à un fil et formant pendule. Les déplacements moléculaires sont assez considérables pour que les chocs qui en résultent contre la bille la projettent à une grande hauteur.

Pour que l'expérience soit tout à fait concluante, il est bon de

ne pas tenir la verge dans un étau, mais de la fixer sur un support solide avec un mastic très-cassant. Alors, en effet, le moindre déplacement du point fixé briserait le mastic, et comme ce phénomène ne se présente pas, on est bien sûr que les chocs ne proviennent pas d'un transport général de la barre.

Le déplacement absolu de la tranche terminale peut se mesurer au sphéromètre; pour y arriver, on établit un appareil de cette espèce de manière que sa vis soit dans le prolongement de l'axe de la barre, et avant que la vibration ne commence, on approche la pointe au contact de l'extrémité, et l'on note la division de la tête qui correspond au repère; on recule la vis, puis on produit les vibrations, et tandis que le mouvement persiste, on approche lentement la pointe jusqu'à ce que, dans ses excursions extrêmes, la barre vienne la choquer. Enfin, on compare la position de la tête de la vis à celle qu'on avait notée d'abord, et l'on a évidemment tout ce qui est nécessaire pour obtenir l'allongement cherché. M. Savart est l'auteur de l'expérience dont nous venons de donner la description. Il a déduit de ses déterminations que l'allongement, ainsi produit par des vibrations excitées sans aucun effort, égale souvent celui que l'on ne produirait sur les mêmes barres que par des tractions supérieures à un millier de kilogrammes.

Expérience de M. Biot. — Quant à l'existence des nœuds, elle a été mise en évidence par une expérience très-remarquable de M. Biot.

Lorsqu'un rayon de lumière, polarisé par son passage à travers un prisme de Nichol [1], tombe sur un spath, il se bifurque en général, à moins toutefois que la section principale du spath ne soit parallèle ou perpendiculaire à celle du prisme; dans ce cas, l'une des images est éteinte. L'interposition d'une lame de verre ordinaire ne la fait point reparaître; mais les phénomènes changent lorsque l'on vient à exercer sur la lame de verre une compression un peu énergique et inégalement distribuée sur les différents points de sa surface; alors le second rayon devient visible de nouveau. Or, s'il est vrai qu'aux points où les nœuds se développent, une lame qui vibre éprouve dans sa densité un changement notable, et tel que pourrait le produire une traction ou une compression puissante exercée dans le sens de sa longueur, un rayon polarisé qui la traversera en ces points devra être modifié comme il l'est par son passage à travers un verre comprimé. C'est précisément ce qui arrive.

1. Pour la description du prisme de Nichol, voir plus loin au livre de l'optique.

Pour faire commodément l'expérience en projection, on peut employer indistinctement les rayons solaires ou ceux de la lampe électrique. Avec cette dernière source lumineuse, la disposition suivante donne de bons résultats : l'ouverture de la lanterne reçoit un Nichol dont la section principale sera verticale ; avec une lentille de convergence, on projette la lumière sur un prisme de spath ordinaire. On obtient ainsi sur un tableau blanc deux images lumineuses; mais en croisant les sections des deux appareils biréfringents, on fait disparaître l'une de ces images. On interpose alors sur le trajet du rayon, et un peu avant le spath analyseur, une verge de verre tenue obliquement entre les mâchoires d'un étau, et l'on s'arrange de façon que le rayon la traverse près du nœud. Alors chaque fois que l'on fait vibrer la verge, on voit la seconde image reparaître; et de plus quand le phénomène acquiert tout son développement, les deux images se colorent de nuances complémentaires.

Il semblerait, au premier abord, très-naturel et très-commode de recourir à l'emploi du sable pour mettre en évidence l'existence des nœuds correspondants aux vibrations longitudinales, et même pour en fixer la position. En effet, lorsqu'on projette un peu de sable sur une verge plate animée de ce genre de mouvement, on le voit glisser à sa surface, parallèlement à l'axe de la verge, et se rassembler en lignes très-nettes, mais ces lignes ne sont pas à une distance égale à la longueur de l'onde qui répond dans la verge au son longitudinal produit, de plus elles ne se répondent pas sur les deux faces de la verge. — Loin de là, si, après avoir marqué sur l'une de ces faces la position qu'elles occupent, on retourne la verge et qu'en la soutenant au même point on en tire le même son, on voit sur la seconde face, actuellement supérieure, les amas de sable se former juste à égale distance des positions qu'ils occupaient dans la première expérience. Nous reviendrons, à la fin du chapitre suivant, sur l'explication de ces phénomènes.

§ 2. — THÉORIE DU MOUVEMENT LONGITUDINAL DES VERGES.

L'équation du mouvement longitudinal d'une verge homogène, droite, cylindrique ou prismatique, s'obtient sans difficulté.

Soit ω la section de cette verge, et admettons qu'au même instant toutes les molécules d'une même tranche soient animées de vitesses égales et parallèles à l'axe de la barre.

Soit toujours, au bout du temps t, $x + u$ l'abscisse d'une molecule dont l'abscisse primitive était x.

Il s'agit de déterminer u en fonction de x et de t.

Soit ω la section primitive de la barre; p le poids spécifique de la matière qui la forme.

$\frac{du}{dt}$ est au bout du temps t la vitesse de la molécule définie par l'abscisse initiale x; et $\frac{d^2u}{dt^2}\,dt$ l'accroissement que subit cette vitesse pendant le temps dt.

L'élément dont la longueur primitive était dx et le poids $p\,\omega\,dx$ reçoit en tous ses points cet accroissement de vitesse, et cela, sous l'influence d'une force qui provient de la différence des tensions qui sont exercées, au bout du temps t, sur les deux faces de cet élément. Soit $\omega \frac{dT}{dx}\,dx$ cette force; on aura

$$\omega \frac{dT}{dx}\,dx = \frac{\omega p}{g}\,dx. \quad \frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{p}{g}\,\frac{d^2u}{dt^2}$$

la différentielle $\frac{dT}{dx}\,dx$ peut s'exprimer en fonction de la dérivée de u prise par rapport à x.

En effet, l'élément de longueur primitive dx est devenu, pendant le mouvement, $dx + \frac{du}{dx}\,dx$, ou $dx\left(1 + \frac{du}{dx}\right)$.

Sa tension est proportionnelle à la fraction qu'il faut ajouter à l'unité pour avoir le rapport de la longueur actuelle à la longueur primitive. Cette fraction est $\frac{du}{dx}$. Ainsi, en désignant par Q une constante, on a :

$$T = Q\,\frac{du}{dx}$$

et par conséquent

$$\frac{dT}{dx}\,dx = Q\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{Qg}{p}\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

ou enfin

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

si l'on pose

$$a^2 = \frac{Qg}{p}.$$

Cette équation est identique à celle que nous avons trouvée pour point de départ dans la théorie de la propagation du son dans les tuyaux cylindriques, et par conséquent on pourrait répéter ici tout ce qui a été dit au chapitre précédent. Nous ne nous arrêterons pas à ces redites inutiles, mais nous ferons remarquer que la quantité Q est précisément ce qu'on appelle le coefficient d'élasticité de la barre; car si dans l'équation $T = Q \frac{du}{dx}$ on supposait que l'allongement du devînt égal à dx, c'est-à-dire à l'élément lui-même, on aurait $T = Q$; Q est donc la tension qui doublerait la longueur de la verge, c'est le coefficient d'élasticité de la matière qui la forme, (voir t. I, page 563).

$\frac{p}{g}$ est la densité de la barre.

a, d'après ce que nous avons vu, représente, la vitesse de propagation du mouvement dans cette barre. — Ainsi l'on se trouve ramené à l'équation

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

que l'on cite ordinairement comme donnant la vitesse de propagation d'un mouvement vibratoire dans un milieu élastique, et dans laquelle e et d représentent respectivement l'élasticité et la densité du milieu qui transmet le mouvement.

Pour obtenir commodément la vitesse de propagation des sons dans une barre, sans passer par la détermination du coefficient d'élasticité, on raisonnerait comme nous l'avons déjà fait en traitant de la propagation du son dans des fluides quelconques :

Lorsqu'une verge ébranlée longitudinalement rend le son fondamental qui lui est propre, la longueur de la verge est égale à la longueur d'onde de ce son. Elle est donc égale au quotient que l'on obtient en divisant par le nombre de vibrations du son, l'expression numérique de la vitesse avec laquelle le mouvement longitudinal se propage dans une colonne cylindrique du milieu dont la verge est faite. En opérant ainsi, Chladni avait dressé le tableau suivant :

VITESSES DES SONS DANS LES VERGES SOLIDES.

Noms des substances.	Vitesses à zéro.
Sapin...........................	5994 m.
Bouleau. } Orme... }	4862

Noms des substances.	Vitesse à zéro.
Laiton .. } Chêne... } Noyer... }	3530 m.
Argent	2997
Étain	2497

Enfin, il faut se rappeler que, d'après M. Wertheim, dans un milieu solide indéfini et non cristallisé, les ondes sphériques ont une vitesse de propagation supérieure à celle de la transmission du mouvement sonore dans les verges cylindriques ou prismatiques. Le rapport de ces vitesses inégales est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$.

CHAPITRE IX

VIBRATIONS TRANSVERSALES.

§ 1. — LOIS DES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES VERGES.

Un des plus anciens instruments dans lesquels on ait utilisé les vibrations transversales des verges est celui que l'on désigne souvent du nom de claque-bois, et que Mersenne appelle *Ligneum psalterium* à la proposition XVII du quatrième livre *des instruments*. Cet appareil ABCD (fig. 427) paraît remonter à une très-haute antiquité. Il est ordinairement formé de douze tiges de bois soutenues par une double corde en des points qui se trouvent environ au cinquième et aux cinq sixièmes de sa longueur. On le tient par le point de jonction des deux cordons E, et pour le faire parler on frappe les tiges en leur milieu avec une sorte de marteau suffisamment dur (fig. 427).

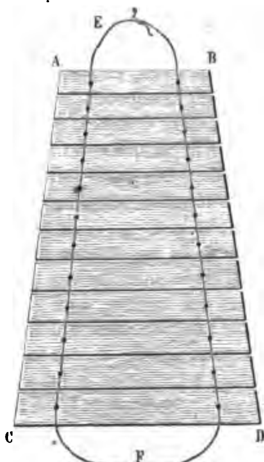


Fig. 427.

Dans le claque-bois, les verges sonores sont libres à leurs deux extrémités. Dans d'autres instruments, dont elles constituent encore la partie essentielle, elles sont fixées à un bout, et, pour les

mettre en vibration, on les infléchit légèrement à leur autre extrémité. C'est ce qui arrive, par exemple, dans les anches (voir page 121) et aussi dans les *boîtes à musique.*

Au reste, quelle que soit la manière dont une verge soit soutenue, il est toujours facile de l'ébranler transversalement à l'aide d'un archet ordinaire ou d'un archet de contre-basse. Si, comme il arrive souvent, les verges sur lesquelles on opère sont aplaties en forme de règles, la direction dn frottement doit être perpendiculaire à l'une de leurs faces, et dans tous les cas possibles elle doit être constamment parallèle à leur section droite.

En employant ce mode d'ébranlement, et en faisant varier convenablement soit la position des points par lesquels on touche la verge, soit la position de ceux que l'archet attaque directement, on arrive aisément à obtenir des séries de sons très-différents les uns des autres, et qui rappellent les séries d'harmoniques des tuyaux, sans toutefois leur être identiques.

Le développement successif de ces différents sons indique que dans les mouvements qui répondent aux harmoniques supérieurs la verge se divise spontanément en parties de plus en plus nombreuses et qui vibrent à l'unisson. En effet, pour constater la réalité de cette subdivision, il suffit de jeter du sable sur la surface supérieure de la verge. On voit alors se dessiner de véritables lignes nodales, que l'on peut toucher sans altérer le son; elles se correspondent sur les quatre faces, et, par conséquent, elles indiquent l'existence de plans nodaux qui sont perpendiculaires à l'axe, comme les lignes suivant lesquelles ils coupent les faces de la verge.

Travaux d'Euler. — Il est évident que, pour se former une idée exacte et complète de tous les mouvements transversaux que peut prendre une verge, il suffirait de déterminer, pour chacun des harmoniques possibles, et la durée des vibrations qui le produisent, et la disposition des lignes nodales qui l'accompagnent.

Lois de succession des harmoniques. — C'est, en effet, sous ce double point de vue qu'Euler a envisagé la question des vibrations des verges. Les recherches qu'il a publiées sur cette matière l'ont conduit à des équations générales à l'aide desquelles on peut, quel que soit le mode de suspension de la verge, déterminer à la fois et la loi suivant laquelle se succèdent les harmoniques possibles, et la loi suivant laquelle se distribuent les lignes nodales de part et d'autre desquelles s'accomplissent les mouvements moléculaires.

Les équations dont nous parlons une fois posées, Euler s'était surtout attaché à en déduire la loi de succession des harmoniques

dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur les conditions auxquelles les extrémités de la barre sont assujetties pendant le mouvement.

Ces hypothèses sont les suivantes :

Les extrémités peuvent être complétement libres. — Les deux extrémités peuvent être fixées normalement dans des obstacles inébranlables ; et alors, non-seulement elles restent immobiles pendant le mouvement, mais, de plus, la courbure de la barre en ces points est toujours forcément tangente à la normale aux obstacles.

Les deux extrémités sont seulement appuyées contre des obstacles inébranlables. — Alors elles sont immobiles comme eux ; mais leurs flexions ne sont point gênées, et leurs courbures extrêmes peuvent couper sous un angle quelconque les normales aux obstacles.

Enfin, il peut se faire que l'une des extrémités se trouvant assujettie à l'une des conditions que nous venons de définir, la seconde soit assujettie à une autre de ces trois mêmes conditions.

En tout, six cas distincts que nous grouperons de la manière suivante :

1° Les deux extrémités de la lame vibrante sont appuyées contre des obstacles fixes ;

2° Les deux extrémités sont libres ;

3° Les deux extrémités sont fixées dans des obstacles immobiles ;

4° Une des extrémités est fixée, l'autre est libre ;

5° Une des extrémités est libre, l'autre appuyée ;

6° Une des extrémités est fixée, l'autre appuyée.

Dans le premier cas, les nombres de vibrations des harmoniques croissent comme les carrés des nombres naturels

$$1, \quad 2, \quad 3 \ldots \quad n-1.$$

Dans les trois suivants, les valeurs numériques des harmoniques sont proportionnelles aux carrés des nombres impairs

$$3, \quad 5, \quad 7 \ldots \quad 2n-1.$$

Dans les deux derniers cas, ces valeurs sont proportionnelles aux carrés des nombres

$$5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad 21 \ldots \quad 4n-3.$$

n représente ici le nombre des nœuds correspondant à l'har-

monique que l'on considère; seulement, il est entendu que l'on compte comme nœud chaque extrémité fixe ou appuyée.

Ces lois de succession des harmoniques sont très-simples; il est bien vrai que, si l'on voulait énoncer rigoureusement les résultats de l'analyse, il faudrait dire que les nombres des vibrations qu'il s'agit de comparer croissent proportionnellement, non pas à

$$(n-1)^2, \qquad (2n-1)^2, \qquad (4n-3)$$

mais bien à

$$(n-1)^2+\delta_1 \qquad (2n-1)^2+\delta_2 \qquad (4n-3)^2+\delta_3.$$

δ_1, δ_2, δ_3 étant des quantités très-petites et variables avec le rang de l'harmonique. Mais ces quantités sont si faibles dès que n dépasse 2 ou 3, que leur influence sur la loi de succession est tout à fait insensible.

Seulement, dans aucune série elle n'est complétement négligeable quand il s'agit du premier harmonique et peut-être encore du second; aussi, l'expérience montre-t-elle que ces deux harmoniques et surtout le premier s'écartent un peu des lois plus simples auxquelles tous les autres satisfont. En cela, comme en tous les autres points, les observations de Chladni et de Savart ont confirmé les indications de la théorie.

Il est à remarquer aussi que dans le cas n° 4 les sons pour lesquels il n'y a d'autre nœud que celui de l'extrémité fixe ne rentrent pas dans la série harmonique. Le premier terme que l'on doit considérer est celui pour lequel $n=2$; c'est là ce que la théorie indique.

Recherches de M. Lissajous. — Dans un seul cas seulement, celui où les deux extrémités de la barre sont appuyées, Euler avait cherché la position des nœuds qui répondent aux divers harmoniques. Il avait aisément reconnu que la verge se subdivise toujours en parties égales, et dont, par conséquent, la longueur était égale au quotient de celle de la barre par $n-1$, n étant le nombre des nœuds.

Dans les cinq autres hypothèses possibles, la solution de l'équation qui donne les nœuds présente plus de difficultés, mais elle conduit toujours à des résultats que l'expérience vérifie avec une grande précision. Deux séries de recherches, indépendantes l'une de l'autre, ont été publiées sur ce point par M. Strehlke en Allemagne et par M. Lissajous en France. Nous reproduisons ici une partie des résultats obtenus par ce dernier physicien.

Valeurs des internœuds. — Dès l'instant qu'il s'agit d'un har-

monique plus élevé que celui dont le nombre des nœuds est trois, la barre dans sa partie moyenne présente une série de nœuds équidistants.

Dans les cas 2, 3 et 4, c'est-à-dire dans ceux où ni l'une ni l'autre des extrémités de la barre n'est appuyée contre un obstacle fixe, la distance de deux nœuds consécutifs pris dans la partie moyenne de la barre est donnée par la formule

$$d = \frac{2a}{2n - 1}$$

a étant la longueur de la barre et *n* le nombre total des nœuds.

Dans les deux autres cas, la valeur constante d'un *internœud* moyen est

$$d' = \frac{4a}{4n - 3}$$

Position des nœuds. — La distance des nœuds ainsi définie, pour achever d'en déterminer les positions, il suffit de remarquer que, dans les cas 5 ou 6, où la barre a l'une de ses extrémités appuyée, la distance de cette extrémité au nœud le plus voisin satisfait à la formule

$$d' = \frac{4a}{4n - 3}$$

qui donne la valeur d'un internœud moyen.

Dans les cas 2 et 3, où les deux extrémités sont libres toutes deux ou toutes deux fixées, le milieu de la barre est nécessairement un nœud ou un ventre, suivant que l'harmonique est impair ou pair.

Enfin dans les cas 3 et 4, les distances du bout fixé au nœud le plus voisin sont les mêmes dès l'instant que la valeur de l'internœud moyen a la même valeur.

L'étude comparative des nœuds dans les cas 2, 3 et 4 conduit encore à quelques conséquences intéressantes.

Longueurs des subdivisions extrêmes. — Soit, dans le cas n° 2, E l'intervalle qui sépare de chacune des extrémités de la barre le second nœud et l'avant-dernier ; on devra avoir

$$(n - 3)\, d + 2\mathrm{E} = a$$

ou, en mettant pour *d* sa valeur $\frac{2a}{2n - 1}$,

$$\frac{(n-3)\, 2a}{2n - 1} + 2\mathrm{E} = a$$

d'où

$$2E = a - \frac{2a(n-3)}{2n-1}.$$

$$2E = \frac{2na - a - 2na + 6a}{2n-1}$$

$$E = \frac{5a}{2(2n-1)}$$

Soit de même, dans le cas n° 3, E′ la distance qui sépare chaque extrémité du nœud le plus voisin ; on aura encore

$$2E' + (n-3)d = a$$

et par conséquent

$$E' = E.$$

L'expérience vérifie complétement ce résultat.

Ainsi, comme le fait remarquer M. Lissajous, quand on passe du cas 2 au cas 3, on voit les nœuds les plus voisins des extrémités venir se confondre avec elles.

Quant à la distance E (cas n° 2), elle est partagée par un nœud en deux parties inégales dont la plus grande est environ les 10/11 de l'internœud correspondant.

Enfin, quand la barre est fixée par une de ses extrémités seulement et libre à l'autre, la distance de son extrémité fixée aux différents nœuds est, pour une même valeur du son obtenu, exactement la même que dans le cas n° 3.

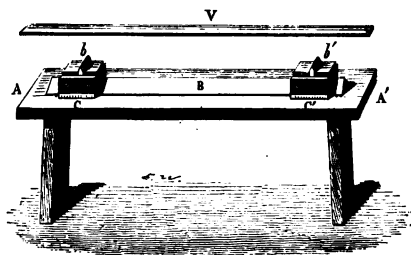


Fig. 428.

Pour vérifier commodément tous ces résultats, on peut employer un appareil disposé dans ce but par M. Lissajous (fig. 428).

Il se compose essentiellement d'une petite table A A' bien solide, supportant deux chevalets C et C' mobiles sur un rail de bois B. Ils portent deux morceaux de liége *b* et *b'* taillés en biseau et sur lesquels on fait reposer la verge.

Si la verge doit être fixée à l'une de ses extrémités, on la fait pénétrer normalement dans une masse métallique pesante où on la soude solidement, et ainsi fixée elle ne peut manquer, lorsqu'elle se courbe, de rester tangente à la normale à l'obstacle dans lequel elle pénètre.

D'après ce qui précède, lorsque, pour un mode de suspension déterminé, on compare les harmoniques supérieurs d'une barre, on voit que leurs valeurs numériques sont inversement proportionnelles aux carrés des longueurs des internœuds moyens.

La barre restant la même, si l'on change le mode de suspension, on peut obtenir des séries d'harmoniques toutes différentes des précédentes; mais si, après avoir déterminé dans l'une de ces séries complétement distinctes la valeur d'un terme et la longueur de l'internœud correspondant, on répète les mêmes déterminations pour un autre terme de la seconde série, on trouvera encore que les nombres de vibrations des deux sons déterminées seront très-sensiblement en proportion inverse avec les carrés des longueurs des internœuds qui y correspondent.

Influence des dimensions d'une verge sur la valeur du son qu'elle rend. — Enfin, lorsque la longueur, mais la longueur seule, de la barre vient à changer, on remarque que si le mode de suspension et le rang de l'harmonique sont les mêmes, les valeurs numériques des sons rendus se trouvent encore réciproques aux carrés des longueurs de cette barre,

Si la section de la verge est un rectangle, et si l'ébranlement a lieu, comme nous l'avons toujours supposé, parallèlement à l'un

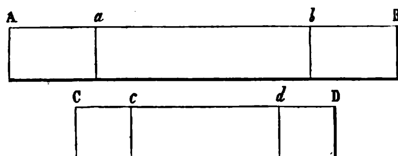


Fig. 429.

des côtés de la section, lequel sera pris pour épaisseur de la verge, on pourra aussi reconnaître que les nombres de vibrations sont proportionnels aux épaisseurs et indépendants de la largeur.

Toutes ces expériences se font aisément avec des verges de bois de sapin libres aux deux bouts. On en tire le premier harmonique en les soutenant aux points *a* et *b* (fig. 429), et on les ébranle avec l'archet sur un de leurs côtés.

Les verges AB et CD de la figure 429 ont même épaisseur, même largeur et des longueurs qui sont entre elles comme 1 et $\sqrt{2}$; la plus courte est à l'octave aiguë de l'autre.

Verges semblables. — En rapprochant ces différents résultats, on arrive évidemment à cette conséquence que des verges semblables, pour un même mode de division, rendent des sons inversement proportionnels à leurs dimensions homologues. Si, en effet, deux verges satisfont à cette condition, la plus grande, ayant une longueur double de l'autre, devrait par cette seule cause exécuter quatre fois moins de vibrations à la seconde. Mais, d'autre part, comme elle est deux fois plus épaisse que la deuxième, elle oscille deux fois plus vite qu'elle ne le ferait s'il y avait égalité entre leurs épaisseurs; donc enfin la hauteur du son de la première des deux verges est seulement moitié de la hauteur du son rendu par la seconde.

Influence de l'élasticité de la verge — Jusqu'ici il n'a pas été question de l'influence que la nature de la verge exerce sur la valeur des sons rendus. — Toutes choses égales d'ailleurs, le nombre des vibration exécutées dans l'unité de temps par une verge que l'on ébranle transversalement est directement proportionnel à la racine carrée de son coefficient d'élasticité, et inversement proportionnel à la raeine carrée de sa densité.

Pour séparer commodément l'influence de l'élasticité de celle qui est due au poids spécifique de la matière dont la barre est formée, on peut opérer de la manière suivante :

Dans une forte pièce de bois on fait tailler deux verges, l'une parallèle aux fibres, l'autre perpendiculaire, en prenant soin de leur donner mêmes dimensions. Ces deux verges ont même nature et même poids, et cependant, pour le même mode de division, elles donnent des sons très-différents. La première, qui résiste beaucoup mieux à la flexion transversale, donne un son beaucoup plus aigu. Rien n'est plus simple, du reste, que de rendre visible l'inégalité des réactions élastiques des deux barres.

On les place successivement sur un même support A B *t t'* (fig. 430) dans lequel elles ne sont retenues que par leurs extrémités C et D; et quand elles sont ainsi placées, on fait agir en leur milieu un poids toujours le même, et qui les infléchit très-inégalement. — Pour rendre l'inflexion aisément mesurable, on

fixe au poids p une pointe qui, appuyant sur la petite branche d'un levier coudé $o\,e$, force l'extrémité de la grande branche à

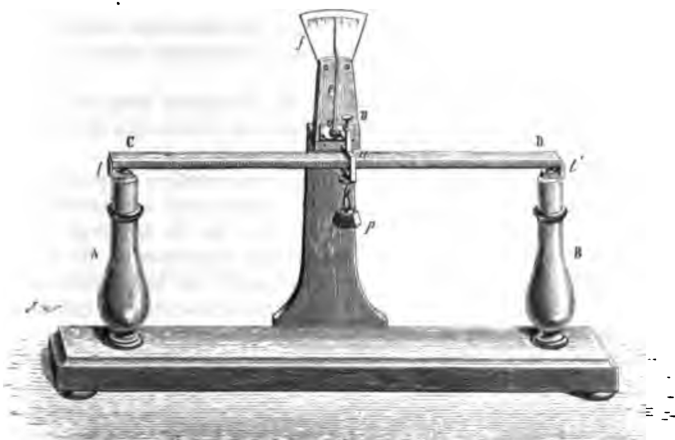


Fig 430.

se déplacer sur un cadran f d'une quantité d'autant plus grande que l'inflexion a été plus considérable.

§ 2. — COEXISTENCE DES MOUVEMENTS LONGITUDINAUX ET TRANSVERSAUX DANS LES VERGES.

Recherches de Savart — Les lignes nodales, que l'on voit souvent se former à la surface des verges ébranlées longitudinalement, paraissent dues à un mouvement transversal qui se développe dans la verge tandis qu'elle vibre parallèlement à sa longueur.

Savart avait déjà énoncé cette opinion, et dans les Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet il insiste pour établir que le mouvement transversal, auquel il attribue les lignes nodales dont il cherche l'explication, est à l'unisson du son longitudinal. — La preuve de cet unisson, c'est que, si l'on quadruple la longueur de la verge, la distance des lignes nodales double; or, pour un même mode de division, quand on double la longueur d'un in-

ternœud transversal, le son passe à la double octave grave aussi bien que quand on quadruple la longueur des parties vibrantes dans le cas des ébranlements longitudinaux.

Mais, tout en apportant ainsi à l'appui de son assertion des preuves très-réelles, Savart n'énonçait que des idées inadmissibles touchant la nature du mouvement transverse dont il avait compris l'existence.

Recherches de M. Terquem. — M. Terquem vient de faire disparaître la plupart des difficultés que les recherches de Savart avaient laissées sans solution.

La condition essentielle pour que le phénomène se produise, c'est qu'il existe un harmonique transversal *sensiblement* à l'unisson du son longitudinal que l'on tire de la verge; par exemple, *sensiblement* à l'unisson du son fondamental de cette dernière si, comme cela a lieu d'ordinaire, on la soutient par son milieu; à l'unisson du son 2, si on la soutient au quart et aux trois quarts de sa longueur, et ainsi de suite.

En effet, lorsqu'on a obtenu les lignes nodales de Savart, si l'on fait reposer la barre sur des chevalets qui correspondent à deux de ces lignes, et si alors on l'ébranle transversalement à l'archet en agissant directement sur l'une de ses extrémités libres, on obtient par les vibrations transversales ainsi excitées l'unisson très-approché du son longitudinal que l'on avait d'abord; et quelquefois alors il arrive que l'on obtient seulement des nœuds alternes sur les deux faces, absolument comme si l'on eût continué à ébranler la verge longitudinalement.

Quand il n'existe pas d'harmonique transversal voisin du son longitudinal que la verge peut rendre, on n'obtient pas d'abord les lignes nodales de Savart; seulement alors, en raccourcissant graduellement la verge de très-petites quantités, on parvient aisément à les faire apparaître, parce qu'en opérant ainsi on finit bientôt par réaliser la condition requise. En effet, ce faible raccourcissement fait peu changer le son longitudinal, qui varie en raison inverse seulement de la longueur, mais il fait monter beaucoup plus vite le son transversal, parce que ce dernier croît en raison inverse des carrés des longueurs.

Ce premier point établi, voici comment M. Terquem explique par la coexistence des deux mouvements l'alternance des lignes nodales sur les deux faces.

Soit AB un nœud du mouvement transversal ne coïncidant pas avec le milieu de la verge. De part et d'autre de ce nœud les mouvements transversaux sont au même instant dirigés en sens inverse, l'un suivant *mq*, l'autre suivant *m'q'*. Les mouvements

longitudinaux sont dans le même sens : mp, $m'p'$ (fig. 431) ou $m_1 q_1$, $m'_1 p'_1$ (fig. 432).

Fig. 431.

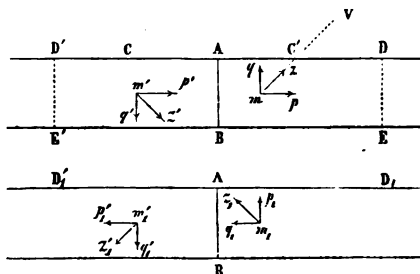


Fig. 432.

Les molécules m et m' se meuvent donc suivant des droites inclinées à l'axe de la barre, telles que mz et $m'z'$ (fig. 431) ou $m_1 z_1$, $m'_1 z'_1$ (fig. 432).

Considérons d'abord ce qui arrive dans le cas représenté fig. 431.

Lorsque m s'élève, le sable de la portion AD, de la face supérieure, est projeté obliquement dans la direction C'V, c'est-à-dire vers le nœud DE du mouvement transversal. Quand m s'abaisse, le sable reste en repos sur AD, mais alors m' se lève, la vibration longitudinale change de sens et le sable de AC est projeté vers D'E'.

Il serait facile de voir que le sable de la portion de verge située à droite de DE serait de même lancé vers le point D.

Ainsi, sur la face supérieure les nœuds D D' seront fortement accusés, tandis que le sable quittera le nœud intermédiaire A.

Dans le cas représenté fig. 432 ce serait, au contraire, le nœud A qui se trouverait visible sur la face $D_1 D'_1$.

D'après cette explication on voit que sur chacune des moitiés de la règle les nœuds que l'on aperçoit doivent être distants l'un de l'autre d'une quantité égale au double de l'internœud qui répond à l'harmonique transversal que l'on entend. C'est bien, en effet, ce que l'expérience confirme.

Quand le nombre des nœuds de l'harmonique transversal est pair, les deux plus voisins du milieu de la barre sont placés symétriquement par rapport au nœud longitudinal. Ces deux

nœuds se dessinent toujours alors sur l'une des faces, et le nœud longitudinal sur l'autre.

Si le nombre des nœuds transversaux est impair, celui du milieu est au milieu de la barre.

Celui qui le précède paraît sur l'une des faces, celui qui le suit sur l'autre. La disposition des nœuds sur la partie supérieure de l'une des moitiés de la barre est identique à celle que l'on observerait sur l'autre moitié si l'on retournait la barre.

Pour se rendre compte de toutes ces particularités, il suffit d'appliquer à chacun de ces cas des raisonnements tout semblables à ceux que nous avons développés à la page précédente.

Toujours d'après les mêmes principes, M. Terquem a expliqué la disposition des nœuds que l'on obtient sur une verge lorsqu'elle donne son harmonique longitudinal.

L'apparition des nœuds exige encore que la verge puisse donner un harmonique transversal à très-peu près à l'unisson du son longitudinal. — Et la combinaison des mouvements dus à cet harmonique avec les mouvements propres à l'autre son explique toutes les particularités du phénomène.

Enfin, certaines verges soumises à un ébranlement énergique rendent souvent et par intermittences un son à l'octave grave du son fondamental longitudinal. M. Terquem a constaté que, pour que cet effet apparaisse sûrement, il faut et il suffit qu'un des harmoniques transversaux de la verge soit très-sensiblement l'octave grave du son longitudinal, et dès lors il est naturel d'admettre que le développement de cet harmonique transversal est la cause du son entendu.

§ 3. — DIAPASONS.

Les diapasons sont des verges courbées en forme d'U; ils sont d'un usage continuel en acoustique et en musique, à cause de la fixité du son qu'ils rendent. On peut les faire vibrer à l'archet, ou bien encore en les frappant sur un corps quelconque, ou enfin en en écartant légèrement les branches à l'aide d'un cylindre de bois que l'on fait passer de force à travers l'ouverture supérieure. Le mouvement naturel de ces appareils se fait dans le plan des deux branches; aussi, lorsqu'on les attaque à l'archet, est-ce dans ce plan qu'il faut opérer la friction. Le pied qui les supporte d'ordinaire fait corps avec eux. Il vient du même jet de fonte lorsqu'ils sont en bronze, et on le fait sortir au marteau de la même barre quand ils sont en acier.

Les diapasons peuvent rendre divers harmoniques. Les figures 433 et 434 représentent les modes de division les plus simples que l'on en puisse tirer.

Quand on raccourcit les branches d'un diapason on fait hausser le son qu'il rend. On le fait baisser quand on les rend plus minces; de là, la manière dont on accorde ces instruments. Comme les verges ordinaires, du reste, ils suivent, lorsqu'ils sont semblables, la loi de la raison inverse des dimensions homologues, et cette loi sert à guider dans leur fabrication. Il faut enfin avoir grand soin de rendre leurs deux branches bien égales; une dissymétrie un peu exagérée en rendrait la vibration impossible. Si l'une des branches est faiblement surchargée, le son devient un peu moins éclatant, mais en même temps baisse, et l'abaissement dépend de la position qu'occupe la masse additionnelle sur la branche du diapason.

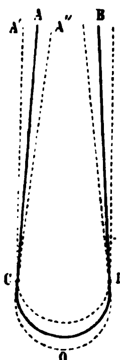


Fig. 433.

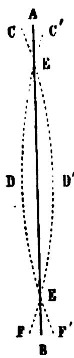


Fig. 434.

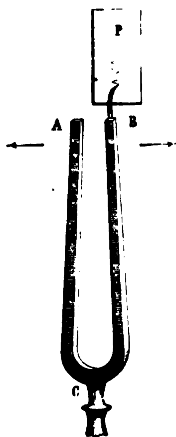


Fig. 435.

Enfin, l'emploi du diapason permet de manifester très-aisément la réalité d'un principe sur lequel nous avons déjà insisté et sur lequel nous reviendrons encore : celui de la coexistence des petits mouvements.

Que l'on prenne un diapason un peu grand, sonnant ut_2 par exemple, si on l'attaque à l'archet près du bord supérieur de l'une de ses branches, on en tire le son fondamental; en l'attaquant au contraire vers le milieu de sa longueur, on lui fait

rendre assez aisément le second harmonique, et si enfin on donne alternativement un coup d'archet en chacune des deux positions que nous venons d'indiquer, on obtiendra à la fois les deux sons. Or, si en ces circonstances on prend le tracé des vibrations, en opérant comme nous l'avons expliqué plus haut et comme on le voit de nouveau (fig. 435), on obtient comme résultat la figure 436.

Il est impossible de ne pas être frappé de la netteté avec laquelle sont accusés les deux modes de vibration qui coexistent dans les branches du diapason : le large feston représente la vibration du son fondamental ; les dentelures secondaires donnent le mouvement de l'harmonique.



Fig. 436.

Nous ne terminerons pas ce sujet sans décrire un appareil très-simple que M. Lissajous a fait exécuter pour la première fois pour la Faculté des sciences de Paris, et à l'aide duquel on peut aisément rendre visibles les rapports musicaux qui existent entre les quatre notes d'un accord parfait.

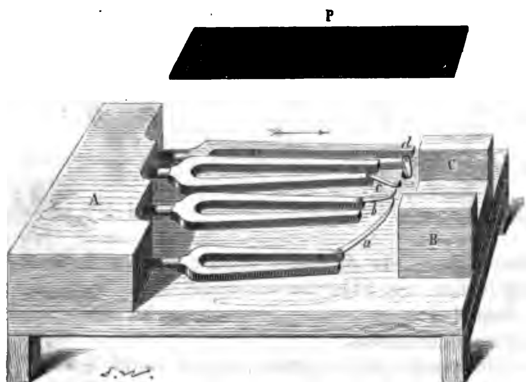


Fig. 437.

Dans une pièce de bois massive A (fig. 437) on fixe horizon-

talement quatre diapasons en s'arrangeant de manière que leurs plans de vibration soient parallèles, mais sans coïncider.

Chacun des diapasons porte une pointe élastique *a, b, c, d,* qui se recourbe vers le haut.

On s'arrange de façon que les extrémités de ces quatre pointes soient mobiles dans le même plan.

On ébranle à l'archet les quatre diapasons, et en passant au-dessus des pointes une lame enduite de noir de fumée, on obtient quatre tracés parallèles (voir en P, fig 437). Entre deux lignes menées perpendiculairement à la direction du mouvement, on compte, dans les quatre tracés voisins, des nombres de vibrations égaux ou proportionnels aux nombres 4, 5, 6, 8; et si l'on veut enfin rendre le fait visible à la fois pour un grand nombre de personnes, il suffit de prendre la plaque pour objet dans un microscope électrique. Toute la démonstration du théorème musical se trouve d'un coup projetée sur le tableau.

CHAPITRE X.

VIBRATIONS DES PLAQUES RIGIDES.

Influence des dimensions. — Les plaques acoustiques sont des cylindres ou des prismes droits très-surbaissés. — Les vibrations que l'on y excite ordinairement sont perpendiculaires à leurs bases, c'est-à-dire à leurs grandes surfaces. En un mot, les vibrations dont il s'agit sont, quant à leur direction, analogues aux vibrations transversales des verges; aussi sont-elles soumises à certaines lois générales que précédemment déjà nous avons énoncées à l'occasion du mouvement des verges. D'abord, des plaques de même nature et de forme géométriquement semblables exécutent dans le même temps, lorsqu'elles se divisent de la même manière, des nombres de vibrations inversement proportionnels à leurs dimensions homologues. Ainsi, que l'on ébranle deux plaques circulaires de façon à obtenir sur chacune la figure formée de deux diamètres se coupant à angle droit, si la première a une épaisseur et un rayon doubles de l'épaisseur et du rayon de la seconde, elle fera entendre l'octave grave du son rendu par cette dernière.

Pour un même mode de division, deux plaques, dont les sur-

faces sont identiques de forme et d'étendue, rendent des sons numériquement proportionnels aux épaisseurs.

A épaisseurs égales et toujours pour le même système de lignes nodales, deux plaques de surfaces semblables donnent des sons qui correspondent à des nombres de vibrations réciproques aux étendues des surfaces.

Ainsi, pour deux plaques circulaires ayant même épaisseur et des rayons doubles l'un de l'autre, les harmoniques de même ordre seront précisément à deux octaves de distance.

On vérifie ordinairement ces différentes propositions à l'aide d'une collection de six plaques. Trois circulaires A, A', A'', trois carrées B, B', B''. — A et A', B et B' ont même surface, mais l'épaisseur de A est double de celle de A', et celle de B double de celle de B'. A'' et B'' ont même épaisseur que A' et B', mais leurs surfaces sont respectivement quatre fois moindres.

Ces principes généraux posés, reste à donner quelques détails sur la nature et la succession des figures très-variées que l'on peut tirer de chaque espèce de plaque en particulier.

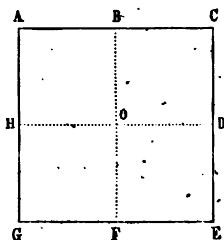


fig. 438.

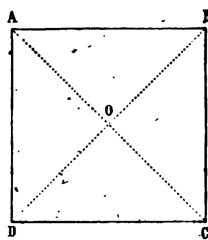


fig. 439.

Plaques carrées. — Le son le plus grave qu'on puisse tirer d'une pareille plaque correspond au mode de division représenté figure 438. Deux parallèles aux côtés, passant par le centre de figure de la plaque, la partagent en quatre carrés égaux. Vient ensuite un son à la quinte du précédent et pour lequel les lignes nodales coïncident avec les diagonales AC, BD du carré (fig. 439).

On obtient aussi assez facilement une troisième figure exclusivement composée des diagonales et des parallèles à ces lignes, telles que EF, GH, GE, HF (fig. 440).

Le plus ordinairement, des lignes nodales courbes se combinent avec les deux diagonales pour constituer la figure acoustique totale; mais alors encore, malgré la complication

de l'ensemble, l'œil y distingue comme des vestiges d'une sorte de canevas primitif formé de parallèles aux côtés ou de parallèles aux diagonales. On en jugera à l'inspection de la figure 441, qui représente un des systèmes que l'on obtient le plus aisément avec les plaques carrées.

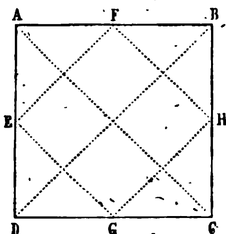


fig. 440.

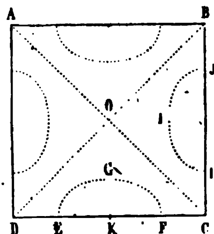


fig. 441.

Pour obtenir les modes de division les plus simples, il est bon d'employer des plaques un peu épaisses. Il faut en prendre de plus minces quand on veut obtenir des figures plus compliquées; dans tous les cas, il faut fixer ou toucher la plaque en deux ou trois des points qui doivent appartenir à des lignes de repos, et attaquer à l'endroit d'un ventre. Ainsi, pour obtenir la fig. 441, on fixe la plaque en son centre, on touche en E et l'on attaque en K.

Pour obtenir la fig. 440, on touche en E et l'on attaque au milieu de GD.

Plaques circulaires. — Quand il s'agit de plaques circulaires, les lignes nodales sont ordinairement des diamètres et des cercles ayant leur centre au centre même de la plaque. Il faut ajouter toutefois que la combinaison des unes et des autres peut donner naissance à des espèces de festons qui se dessinent sur tout le pourtour de la plaque.

Lorsque les plaques sont soutenues par leur centre sur un pied solide et ébranlées à l'archet, toutes les figures qu'on obtient présentent des lignes nodales diamétrales. Pour obtenir des lignes circulaires seules, il est très-commode de souder au centre même de la plaque et perpendiculairement à sa surface une longue tige et d'ébranler celle-ci longitudinalement (fig. 442); le mouvement se communique sans changer de direction, et la plaque qui vibre alors transversalement se subdivise en portions d'autant plus nombreuses que le son tiré de la verge est plus aigu.

On peut encore trouer la plaque en son centre, la faire soutenir en deux ou trois points d'une des lignes circulaires que l'on veut obtenir et passer vivement sur le bord du trou central une mèche de crin saupoudrée de colophane.

Influence de l'élasticité. — Pour les plaques comme pour les verges, le nombre des vibrations qui répondent à un même harmonique croît avec le coefficient d'élasticité et diminue quand la densité augmente. Ce que nous avons dit au chapitre précédent nous dispense d'insister sur ce point; mais il existe entre l'élasticité des plaques et leurs mouvements transversaux des relations d'un autre genre que M. Savart a étudiées avec soin et qui présentent aussi une véritable importance. Si une plaque circulaire était parfaitement homogène, quel que fût le point de la circonférence que l'on fixât en y appliquant le doigt, on pourrait toujours, en passant l'archet à 45° de ce point, obtenir un système de diamétrales parfaitement stable. Or, il n'en est pas ordinairement ainsi. Le plus souvent, à l'aide de quelques tâtonnements, on arrive à trouver sur le pourtour huit points situés à 45° les uns des autres et qui déterminent deux systèmes de diamétrales que l'on peut appeler fixes, parce qu'au moment où l'on enlève le doigt, ou plus généralement l'appui qui avait déterminé leur formation, le sable, qui en accuse l'existence, reste en place, tandis que la vibration générale se prolonge encore. Mais ces deux systèmes sont les seuls qui jouissent de cette fixité. Si l'on en produit un autre, aussitôt qu'on cesse pour ainsi dire de le maintenir forcément, il disparaît; ou bien, si les lignes nodales obtenues étaient peu distantes des positions dans lesquelles elles eussent pu se maintenir, on les voit d'elles-mêmes revenir à ces positions et s'y fixer après quelques oscillations.

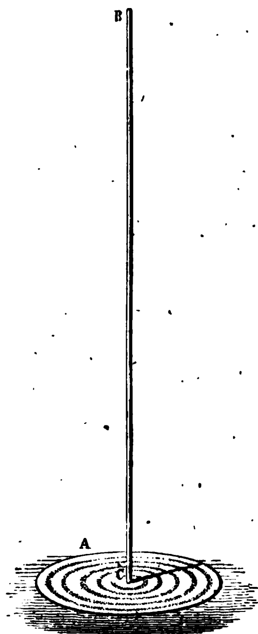


Fig. 442.

De plus, si les plaques employées, au lieu d'être à peu près

homogènes, présentent en deux sens rectangulaires des résistances à la flexion notablement différentes, le seul système de deux lignes diamétrales rectangulaires que l'on puisse vraiment obtenir est celui dans lequel l'une de ces lignes est dirigée suivant la direction où la résistance à la flexion est maximum, et si l'on cherche à en obtenir un second, dans lequel les lignes nodales seraient à 45° des précédentes, on ne peut produire qu'une sorte d'hyperbole dans laquelle les axes coïncident avec les directions de plus grande et de moindre flexibilité.

Si dans ces circonstances enfin on ébranle la plaque comme on le fait pour obtenir des lignes circulaires, à la place de celles-ci, le sable dessine des lignes elliptiques ayant leur centre au centre de la plaque, et leurs axes suivant les directions de plus petite et de plus grande résistance à la flexion.

Pour faire cette dernière expérience, M. Savart employait une plaque de laiton striée.

L'un des axes de l'ellipse produite était alors parallèle aux stries.

Quant aux lignes hyperboliques, on les produit sans peine en employant une plaque de bois taillée dans une planche dont la surface est parallèle aux fibres ligneuses. La direction des fibres est celle de l'axe de l'hyperbole qui ne rencontre pas la courbe.

Coexistence des petits mouvements. — Nous terminerons l'étude des vibrations des plaques en montrant comment on en peut déduire de nouvelles vérifications du principe de la coexistence des petits mouvements.

Lorsqu'on tire d'une plaque circulaire un harmonique élevé, il arrive souvent que l'on entend à la fois plusieurs sons distincts et ayant entre eux des rapports simples, tels que l'octave, la quinte, etc. En ces circonstances, si l'on examine la figure 443 que produit le sable jeté à la surface, on voit quelquefois se résoudre en deux autres distinctes : l'une, marquée vers le centre, correspond à l'un des deux sons, c'est-à-dire est identique à celle que l'on obtiendrait si la plaque rendait uniquement ce premier son; l'autre, au contraire, existe vers les bords de la plaque, et ordinairement alors cette figure caractéristique du

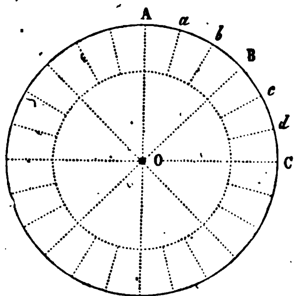


fig. 443.

deuxième son se trouve modifiée par des vestiges de la figure centrale.

Ainsi l'oreille et l'observation des lignes nodales concourent dans les indications qu'elles donnent touchant la coexistence de deux mouvements dans la plaque.

Dans ses recherches sur les vibrations des plaques, M. Duhamel mettait cette superposition en évidence à l'aide du procédé graphique qui est si utile dans les études acoustiques.

Il fixait sur le bord d'une plaque carrée trois petites pointes, l'une près d'un angle, l'autre au milieu du côté, la troisième au quart, puis il attaquait la plaque de façon à lui faire rendre à la fois le son fondamental et la quinte. Enfin, pendant le mouvement il prenait le tracé des trois pointes : la première écrivait les vibrations du son fondamental seul ou à peu près; la seconde, celles de la quinte; la troisième donnait un tracé complexe résultant de la superposition des deux tracés répondant aux deux harmoniques de la plaque. — Cela se conçoit, car près des angles le mouvement qui donne la quinte est nul, et au milieu des côtés le mouvement du son fondamental l'est à son tour.

On peut enfin, lorsque la plaque rend simultanément deux sons distincts, renforcer exclusivement l'un des deux, de telle sorte que l'autre ne soit plus entendu même lorsque primitivement il prédominait d'une manière notable. Pour cela, si la plaque est carrée, et si, comme nous le supposons ici, on lui fait rendre à la fois ses deux premiers harmoniques il suffit, pour faire dominer le son fondamental, d'étouffer, à l'aide d'un écran convenable (fig. 444), les vibrations du premier et du troisième des quatre carrés dans lesquels elle se divise pour rendre ce son fondamental.

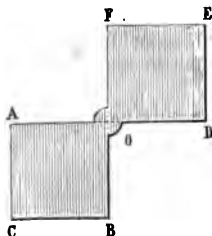


Fig. 444.

Figures tracées par le lycopode. — Lorsqu'on cherche à obtenir des figures acoustiques, on voit souvent la partie la plus fine du sable, ou surtout les poussières qui s'y trouvent mêlées, se réunir en amas globuleux sur les ventres de vibration. Si l'on opère avec une plaque circulaire un peu grande et que l'on s'arrange de manière à obtenir l'oscillation des lignes nodales, les amas dont il s'agit oscillent eux-mêmes avec énergie. Enfin, si au lieu de sable on projette sur la plaque une poudre très-fine comme du lycopode, il n'est pas rare de voir, après quelques oscillations, le lycopode prendre un mouvement de rotation que

l'on entretient facilement en continuant à passer vivement l'archet contre la plaque.

Ces phénomènes paraissent intimement liés aux mouvements que prend l'air au-dessus de la plaque vibrante; car, dans le vide, le sable et le lycopode se réunissent toujours sur les véritables nœuds de vibration.

Vibrations des corps solides de forme quelconque. — Nous n'insisterons pas davantage sur l'étude des vibrations des corps rigides par eux-mêmes.

Nous ferons seulement remarquer que les timbres et les cloches peuvent, comme les verges et les plaques, rendre plusieurs harmoniques. Pour chacun de ces harmoniques, ils affectent un mode de division particulier.

Le son le plus grave répond à une division en quatre parties égales; pour les autres, les nombres des parties vibrantes sont successivement 6, 8, 10.

D'ailleurs, pour un même mode de division, les nombres de vibrations de timbres ou de cloches semblables de forme sont toujours réciproques aux dimensions homologues; et la loi de Mersenne devient ainsi l'une des règles d'après lesquelles on se guide dans la fabrication de ces appareils.

Au reste, quoique cette loi ne soit pas encore formulée depuis bien longtemps, l'influence qu'exercent les dimensions des corps solides sur les sons qu'ils peuvent rendre sous l'action d'un ébranlement quelconque n'en était pas moins connue de toute antiquité. Aux premiers chapitres de la Genèse, il est fait mention des instruments de musique; et dès lors il n'est pas douteux que dès les premières générations d'hommes on appliquait déjà dans leur construction les notions que l'on avait touchant cette influence.

Ἦν δὲ Ἰουβαλ ὁ καταδείξας ψαλτήριον καὶ κιθάραν.

L'un des différents récits qui indiquent la manière dont Pythagore est arrivé à la représentation numérique des accords porte qu'il a comparé les dimensions de vases dont la percussion donnait naissance à des sons ayant entre eux des intervalles musicaux facilement appréciables [1].

Enfin, pour se convaincre de cette influence, il n'est pas nécessaire de restreindre les observations aux cas où les vibrations

1. Voir, sur ce point, un travail de M. Vincent inséré au tome XVI de la *Collection des manuscrits*, 2e partie.

produites persistent assez longtemps pour que le son ressemble à ceux que l'on emploie en musique.

Les chocs ordinaires paraissent au premier abord ne produire que des bruits sans caractère musical; mais qu'on les rapproche et l'on saisira souvent entre eux des rapports parfaitement tranchés.

Par exemple, que l'on suspende 4 sphères de même bois et dont les diamètres soient entre eux comme les nombres 4, 5, 6, 8, et qu'on frappe chacune avec une sphère égale portée au bout d'une baguette, les quatre bruits entendus donneront la sensation de l'accord parfait. On arrive encore au même résultat en jetant sur une dalle quatre verges de bois de formes géométriquement semblables et ayant entre leurs dimensions homologues les rapports que nous venons d'indiquer.

CHAPITRE XI.

VIBRATIONS DES CORDES.

§ 1. — VIBRATIONS TRANSVERSALES.

Une corde tendue résonne quand on la frotte avec un archet soit parallèlement, soit perpendiculairement à sa longueur; les sons rendus dans ce dernier cas sont ceux que l'on utilise dans tous les instruments à cordes; et comme l'usage de ces instruments remonte à l'antiquité la plus reculée, on a dû connaître pour ainsi dire de tout temps les principales circonstances qui influent sur le mouvement transversal des cordes.

La recherche des lois de ce mouvement paraît même bien ancienne. — Au dire de quelques commentateurs, Pythagore avait essayé de formuler l'influence que la tension exerce sur la valeur musicale du son rendu par une corde. — Suivant d'autres, il avait reconnu que deux cordes de même nature, également tendues et de longueurs doubles l'une de l'autre, rendent des sons distants d'une octave. Mais quant à la relation qui existe entre ces différents éléments et le nombre de vibrations exécutées à la

seconde, elle n'a pu être établie que lorsqu'on a su mesurer un nombre de vibrations; et c'est au père Mersenne qu'est due cette dernière découverte.

Expériences du P. Mersenne. — On trouve dans les écrits de ce savant religieux les énoncés les plus précis sur les lois dont il s'agit. Nous allons citer presque textuellement :

1° Deux cordes de même nature, de même grosseur, et également tendues, exercent dans le même temps des nombres de vibrations inversement proportionnels à leur longueur. En effet, dit Mersenne (*Harmoniorum*, livre II, prop. 18) : « J'ai reconnu par l'expérience qu'une corde de chanvre de 90 pieds de roi fait chacune de ses oscillations en 1/4 de seconde lorsqu'elle est tendue par un poids de 35 livres, et qu'elle a un diamètre de 1 ligne. J'ai vu de même qu'une corde de cuivre de 138 pieds de long, pesant un quart de livre, ayant un diamètre de 1/4 de ligne et une tension de 4 livres, fait son oscillation à très-peu près en une seconde; mais si ces cordes sont réduites à moitié, elles font le même nombre d'oscillations en un temps moitié moindre, et toujours le nombre des oscillations croît dans le rapport où la longueur de la corde diminue. »

2° Toutes choses égales d'ailleurs, les nombres de vibrations exécutées par une corde en un temps donné sont proportionnels aux racines carrées des poids tendants.

En effet, continue Mersenne (même proposition) : « J'ai éprouvé qu'une corde de boyau, longue de 15 pieds, tendue par 4 livres 1/2, fait dix oscillations en une seconde, et que, tendue par 19 livres 1/2, elle fait 20 oscillations dans le même temps. »

La tension, la longueur, la nature de la corde restant la même, le nombre de vibrations est inversement proportionnel au rayon de la corde.

Enfin toutes choses égales d'ailleurs, ce nombre varie avec la nature de la corde.

Toutes ces lois sont résumées dans la formule

$$n = \frac{1}{2Rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi D}}$$

dans laquelle g représente, suivant l'usage, le nombre 9.8088, D le poids spécifique de la corde, l et R sa longueur et son rayon, P le poids qui la tend, et enfin n le nombre d'oscillations doubles faites à la seconde.

Sonomètre. — Dans les expériences de Mersenne, les cordes

étaient très-longues et vibraient sans rendre de son. Actuellement, quand on veut vérifier les propositions que nous venons d'énoncer, c'est à l'aide de la sirène que l'on compte les vibrations. Les cordes sont tendues sur une caisse sonore (fig. 445), ou mieux sur une poutre massive HH', parallèlement à laquelle elles sont maintenues par deux chevalets fixes C et D; à l'une de leurs extrémités elles sont fixées à des chevilles B, autour desquelles elles s'enroulent comme dans les violons. A l'autre extrémité, elles peuvent ou bien être tendues de même par des chevilles A semblables aux premières, ou bien passer sur une poulie G et soutenir des poids plus ou moins considérables.

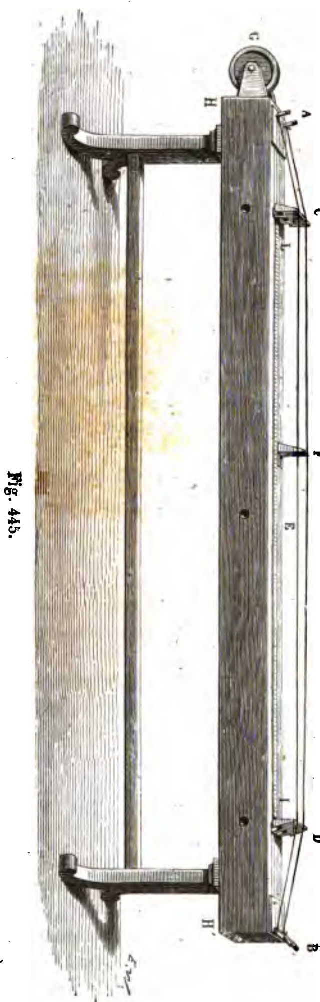


Fig. 445.

Si l'on veut faire varier la longueur, on y arrive en employant un chevalet mobile F, dont la distance au point D s'estime à l'aide d'une règle divisée, le long de laquelle il glisse; on appuie légèrement la corde sur ce chevalet, et alors chacune des portions FD ou FC oscille lorsqu'on l'ébranle, comme si elle était seule et absolument indépendante de l'autre portion.

Si par exemple on fait en sorte que FD soit successivement égal à la moitié, aux 2/3, aux 4/5 de la corde entière, on constate que les nombres de vibrations que l'on en tire soit en l'ébranlant à l'archet, soit simplement en la pinçant avec le doigt, sont le double, les 3/2,

les 5/4 du nombre de vibrations qui répond au son de la corde entière; en d'autres termes, les sons successivement obtenus sont l'octave aiguë, la quinte, la tierce de celui que rend la corde vibrant librement en sa totalité.

Sons harmoniques. — Lorsqu'on écoute avec quelque attention le son rendu par une corde un peu longue, on reconnaît que e son principal se trouve accompagné d'une série d'harmoniques procédant comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, parmi lesquels on distingue surtout les premiers, à savoir : l'octave, la quinte de l'octave, la double octave et sa tierce.

Ce fait curieux tient à ce que la corde, en même emps qu'elle vibre en sa totalité, se subdivise en plusieurs portions plus petites qui exécutent des oscillations secondaires, tout en obéissant au mouvement général.

Il est, du reste, facile de représenter graphiquement la forme qu'affecte la corde dans ce mouvement compliqué.

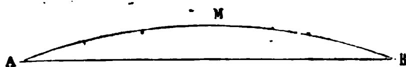


Fig. 446.

Ainsi AMB (fig. 446) représentant la forme de la corde à l'origine d'une de ses oscillations doubles dans l'hypothèse où elle ne rendrait que le son le plus grave qu'elle puisse donner, AnMn'B (fig. 447) est celle qu'elle affecterait en rendant son premier harmonique en même temps que le son principal. Chacune des parties AnM, Mn'B oscillant autour des lignes mobiles, AM, MB pendant un temps moitié de celui de la vibration totale de la corde entière.

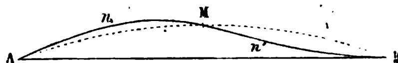


Fig. 448.

Enfin le tracé plus complexe encore de la figure 448 représente les inflexions multiples que la corde présente, pour rendre à la

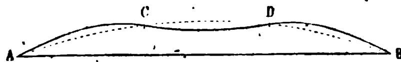


Fig. 446.

fois les deux premiers harmoniques et le son principal. Les trois

portions AC CD DB possèdent alternativement des flexions inverses et rendent dans leurs mouvements le son 3, et en même temps les deux moitiés de la corde, toujours animés de mouvements inverses par rapport à la courbe ponctuée simple ACDB, donnent l'octave du son fondamental, etc.

Expérience de Sauveur. — Au sujet de ces subdivisions des cordes, on fait ordinairement, depuis Sauveur, les deux expériences suivantes :

1° On tend une corde AE (fig. 449) sur un sonomètre semblable à celui que nous avons décrit page 106, puis on place le chevalet mobile au quart de la longueur de cette corde en B, et l'on ébranle à l'archet la portion CA. Alors, si l'on a eu la précaution de placer de petits cavaliers de papier aux points V', V'', V''', respectivement distants du point B de quantités égales à $\frac{AB}{2}$, $\frac{3\,AB}{2}$, $\frac{5\,AB}{2}$, on les voit projetés violemment, tandis qu'ils resteraient parfaitement immobiles si on les eût placés aux points C et D..., distants de B de quantités égales à AB, 2 AB...

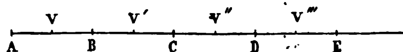


Fig. 449.

Il est évident, d'après cela, que le mouvement de AB s'est transmis à BC sous la condition que cette portion de corde se subdivisât spontanément en parties vibrantes de longueurs égales à AB, séparées par des nœuds de vibrations en C et D, et animées à chaque instant de mouvements inverses.

2° On prend un sonomètre à deux cordes identiques, et que l'on met bien à l'unisson; on divise toujours l'une d'elles en deux parties inégales à l'aide d'un chevalet placé au quart de sa longueur; sur l'autre on met des cavaliers de papier distants les uns des autres de 1/8 de la longueur totale de la corde, le premier et le dernier étant ainsi éloignés des extrémités de la corde d'une distance égale à celle qui les sépare de leurs voisins. Aussitôt que l'on attaque à l'archet la petite subdivision de la première corde, on voit tomber de dessus la deuxième tous les cavaliers d'ordre impair, les autres restant invariablement à leur place.

La possibilité de rendre en même temps que le son fondamental la série des harmoniques qui lui correspondent, paraît être une condition essentielle pour l'établissement du mouvement vibratoire des cordes. M. Delezenne a constaté en effet que,

quand une corde est tendue sur un sonomètre, si on cherche à la faire vibrer en la frottant avec l'archet, juste en son milieu, on ne peut absolument obtenir aucun son. M. Duhamel s'est assuré qu'on n'en n'obtient pas davantage lorsqu'on fait agir deux archets parallèles entre eux appliqués en des points également distants du milieu de la corde, et se mouvant dans le même sens. — Le son part au contraire avec beaucoup de facilité si, toutes les autres conditions de l'expérience restant les mêmes, on fait mouvoir les archets en sens opposés.

§ 2. — VIBRATIONS LONGITUDINALES.

Les vibrations longitudinales des cordes donnent naissance à des sons beaucoup plus aigus que les vibrations transversales. — Les lois qui les régissent sont semblables à celles des vibrations longitudinales des verges. Elles sont résumées presque toutes par la formule :

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gQ}{l^2 D}}.$$

dans laquelle n' est, pour le son fondamental, le nombre d'oscillations doubles exécutées dans l'unité de temps; Q une constante proportionnelle au coefficient d'élasticité, D le poids spé-

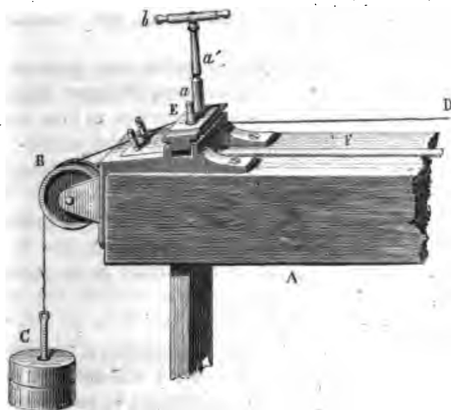


Fig. 450.

cifique, l la longueur de la corde, g le nombre 9,808... de sorte que $\frac{D}{g}$ est égal à la densité p de la matière employée.

On emploie pour les vérifier des sonomètres peu différents de ceux que nous avons décrits aux pages précédentes. Seulement les cordes BED ou plutôt les fils dont on étudie le mouvement sont fixés à leurs extrémités dans des pinces ou étaux dont les mâchoires plates et horizontales sont intérieurement garnies de lames de plomb (E fig. 450). Ces pinces se serrent au moyen de vis *a a'* que l'on manœuvre avec une clef *b*.

Quand il s'agit en particulier de constater l'influence de la longueur, on saisit le fil au point où l'on veut le terminer, dans une petite pince à main, un peu massive et aussi garnie de plomb; les chevalets ordinaires seraient insuffisants pour arrêter le mouvement à l'endroit même où on les placerait.

Sons dus aux courants électriques. — Les fils de fer ou d'acier se prêtent à une expérience fort curieuse. Lorsqu'on les fait passer dans une bobine électromagnétique, en ayant soin qu'ils soient à peu près parallèles à son axe, on constate qu'au moment de l'ouverture ou de la fermeture du circuit ils rendent un son très-pur et musicalement identique à celui qu'on en tirerait en les frottant avec l'archet dans le sens de leur longueur. C'est à M. Page que l'on doit la découverte de ce phénomène. Il a été étudié avec détail par MM. Delarive et Wertheim (*Ann.*, t. 16-23, 3ᵉ série).

§ 3. — THÉORIE DES VIBRATIONS DES CORDES.

Des considérations analogues à celles que nous avons déjà développées permettent d'expliquer complétement tous les phénomènes du mouvement vibratoire des cordes, et l'on doit remarquer qu'en réalité la solution du problème des cordes vibrantes a été le point de départ de toutes les théories mathématiques de l'acoustique.

Concevons une corde parfaitement flexible A B, primitivement droite et tendue par un poids P de telle sorte que la tension τ qu'elle éprouve sur chaque unité de surface de sa section droite s soit donnée par l'équation $\tau = \frac{P}{s}$.

Si l'on écarte cette corde de sa position d'équilibre, elle y reviendra aussitôt qu'on l'abandonnera à elle-même : pour trouver les lois de son mouvement, considérons le moment où elle est dans la position AD'B (fig. 451), et soit C'D' l'élément qui, primitivement, quand la corde était droite, occupait la position CD, et avait une longueur dx; soit x la distance primitive AC, et $x + u$ la projection AC' sur AB; u est une fonction de x et du

temps t, et $\frac{du}{dt}$ est, à une époque quelconque, la vitesse de la molécule vibrante comptée parallèlement à AB. Si l'on suppose que le fil ne soit soumis à l'action d'aucune force étrangère, l'élément C'D', pendant un instant dt, n'éprouvera d'autres actions que celles qui proviennent des tractions élastiques développées à ses deux extrémités.

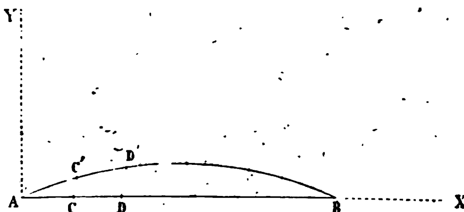


Fig. 451.

Soit pour chaque unité de surface de la section du fil, $T \cos\lambda$ la composante horizontale de ces actions en C', et $T' \cos\lambda'$ leur valeur en D'.

L'équation du mouvement que prend le centre de l'élément C'D' parallèlement à AB sera

$$(T' \cos\lambda' - T \cos\lambda) s = sp\, dx \frac{d^2u}{dt^2}$$

$sp\,dx$ étant la masse de l'élément CD qui n'a pas changé dans le mouvement. Cette équation peut s'écrire

$$d.T \cos\lambda = p dx \frac{d^2u}{dt^2}.$$

De plus T s'exprime aisément en fonction de u. En effet, la longueur de la projection de C'D' sur AB, est par définition

$$(x + dx + u') - (x + u) = dx + u' - u$$

u' étant ce que devient u pour le point dont l'abscisse primitive était $x + dx$. Or C'D' ne diffère pas en longueur de sa projection, si nous supposons $\cos\lambda = 1$; donc $C'D' - dx = \frac{du}{dx} dx$ et $\frac{du}{dx}$ est la fraction qui exprime la proportion dans laquelle s'est allongé l'élément CD. Soit Q la tension qui allongerait cet élément d'une quantité égale à sa longueur primitive, Q est proportionnel au coefficient d'élasticité du fil ; et l'on a

$$\frac{T-\tau}{Q-\tau}=\frac{\frac{du}{dx}}{1}$$

ou bien, si l'on suppose τ négligeable devant Q,

$$T=\tau+Q\frac{du}{dx} \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{dT}{dx}=Q\frac{d^2u}{dx^2}$$

ainsi, l'équation du mouvement suivant AB devient :

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{Q}{p}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement transversal, c'est-à-dire du mouvement parallèle à AY, on remarquera d'abord que si l'on désigne par μ l'angle de C'D' avec AY, et si l'on appelle y l'ordonnée de C', on devra avoir :

$$(T'\cos\mu'-T\cos\mu)s=spdx\frac{d^2y}{dt^2}$$

d'où

$$\frac{d.T\cos\mu}{dx}=p\frac{d^2y}{dt^2}$$

or, ici on a $\cos\mu=\frac{dy}{C'D'}=\frac{dy\cos\lambda}{dx\left(1+\frac{du}{dx}\right)}$, ou bien en faisant $\cos\lambda=1$, et en négligeant $\frac{du}{dx}$ devant l'unité, $\cos\mu=\frac{dy}{dx}$; d'autre part, puisque l'on a $T=\tau+Q\frac{du}{dx}$, le produit $T\cos\mu$ est égal à $\left(\tau+Q\frac{du}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$ ou simplement $\tau\frac{dy}{dx}$, si $\frac{du}{dx}$ est assez petit pour qu'on puisse négliger le produit $Q\frac{du}{dx}$ devant τ.

Par suite, enfin, l'équation du mouvement suivant l'axe des y est :

$$\tau\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\tau}{p}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ces équations, qui donnent séparément, l'une le mouvement transversal, l'autre le mouvement longitudinal de la corde, conduisent à des conséquences importantes.—Elles montrent : 1° que le mouvement longitudinal se transmet beaucoup plus rapidement que l'autre, car, d'après ce que nous avons vu, page 82,

les racines carrées des constantes $\frac{Q}{p}$ et $\frac{\tau}{p}$, représentent les vitesses avec lesquelles se propagent séparément ces deux mouvements, et nous avons déjà remarqué que la quantité Q est toujours très-grande par rapport à τ.

2° Elles font connaître la durée des vibrations des sons fondamentaux auxquels peuvent donner naissance les deux sortes de vibrations dont il s'agit.

Considérons, en effet, la première de ces deux équations et posons $\frac{Q}{p} = a^2$; nous savons que l'on en déduit :

$$(1)\ u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

et par suite

$$(2)\ v = \frac{du}{dt} = a\varphi'(x + at) - a\psi'(x - at).$$

Si maintenant on remarque que, la corde étant fixée à ses deux extrémités, les vitesses en ces points, c'est-à-dire, pour $x = 0$ et $x = l$, doivent être toujours nulles. On en conclut que l'on doit avoir :

$$(3)\qquad \varphi'(at) - \psi'(-at) = 0$$

quel que soit t, et aussi

$$(4)\qquad \varphi'(l + at) - \psi'(l - at) = 0$$

Remplaçons, dans l'équation (4) at par $l + at$, elle deviendra

$$\varphi'(2l + at) - \psi'(-at) = 0$$

et à cause de (3)

$$\varphi'(2l + at) - \varphi'(at) = 0$$

Ainsi la fonction φ' reprend la même valeur lorsque la variable croît de $2l$ ou que t s'accroît de $\frac{2l}{a}$.

Maintenant, si dans (4) on remplace at par $at - l$, on en déduit

$$\varphi'(at) - \psi'(2l - at) = 0$$

et en vertu de (3)

$$\psi'(-at) = \psi'(2l - at)$$

Ainsi la fonction ψ' est périodique aussi bien que φ', et reprend la même valeur quand t varie de $\frac{2l}{a}$.

Nous démontrons ici, à proprement parler, qu'à partir d'une certaine valeur, la fonction reprend la même valeur quand la valeur absolue de la variable $-at$ diminue de $2l$; mais si cela a lieu, il est évident que, réciproquement, la fonction reprend la même valeur quand la valeur totale de la variable croît de cette même quantité. $\frac{2l}{a}$ est donc la durée des vibrations du son fondamental de la corde.

Or, quand on passe des vibrations longitudinales aux transversales, la quantité a varie dans le rapport de $\sqrt{Q}$ à $\sqrt{\tau}$, puisque dans un cas on a

$$a^2 = \frac{Q}{p}$$

et dans l'autre

$$a^2 = \frac{\tau}{p}$$

p étant la densité de la substance dont la corde est faite.

Donc $\sqrt{\frac{Q}{\tau}}$ est le rapport des nombres de vibrations qui correspondent aux sons fondamentaux rendus par un même fil lorsqu'on l'ébranle successivement dans la direction même de sa longueur et dans une direction perpendiculaire.

La valeur de u qui satisfait à la question redevient identiquement la même lorsque t croît de $\frac{2l}{a}$; mais de plus, elle peut aussi reprendre périodiquement les mêmes valeurs à des intervalles moindres.

Daniel Bernouilli l'a démontré en donnant du problème des cordes vibrantes une solution qui représente très-bien toutes les particularités du phénomène.

Les deux fonctions $\varphi(x + at)$ et $\psi(x - at)$, dont la somme est égale à u, sont arbitraires.

Prenons :

$$\varphi(x+at) = \mathrm{A}\sin m(x+at) - \mathrm{B}\cos m(x+at)$$

et

$$\psi(x-at) = \mathrm{A}\sin m(x-at) + \mathrm{B}\cos m(x-at)$$

il en résultera, comme on peut le voir, en développant les deux expressions précédentes,

$$u = \sin mx\,(2A\cos mat + 2B\sin mat);$$

et

$$\frac{du}{dt} = -\sin mx\,(2amA\sin mat - 2maB\cos ma$$
$$= -2am\sin mx\,(A\sin mat - B\cos mat).$$

Soit l la longueur de la corde ; comme les deux extrémités sont fixes pendant tout le mouvement, il faut que $\sin mx$ soit nul pour $x = l$, aussi bien que pour $x = 0$, on en déduit $m = \frac{n\pi}{l}$; et alors on a,

$$v = \frac{du}{dt} = -\frac{2an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{A\sin\frac{n\pi}{l}at - B\cos\frac{n\pi}{l}at\right\}$$

x restant constant, v reprend la même valeur, au signe près, lorsque $\frac{nat}{l}$ augmente de l'unité; et elle reprend la même valeur quand $\frac{nat}{l}$ augmente de deux unités. D'où résulte que le temps de la vibration simple de la corde est $\frac{l}{na}$ et celui de la vibration double ou complète, $\frac{2l}{na}$.

n est un nombre entier quelconque. Si on le suppose égal à 1, on a le cas de la vibration la plus lente, le cas du son fondamental.

Si on lui suppose une autre valeur, on reproduit le cas d'un harmonique supérieur.

Enfin, la somme d'une série d'expressions identiques par la forme à celle que nous avons choisie pour u, et n'en différant que par la valeur de n et celle des constantes A et B, satisfait encore l'équation fondamentale du mouvement de la corde, et elle représente le mouvement complexe qui correspond à la coexistence des différents harmoniques.

La théorie des cordes vibrantes est une de celles qui se prête le mieux aux vérifications expérimentales. Toutefois, ici, comme dans toutes les circonstances où l'on compare à la réalité physique des résultats déduits d'hypothèses qui ne sont jamais la représentation complète de toutes les conditions de la question naturelle, on peut, en se plaçant dans des circonstances particulières, parvenir à mettre en évidence quelques légères différences entre les données du calcul et celles de l'observation; par

exemple, en faisant vibrer des cordes courtes et tendues par des poids de moins en moins considérables, on trouve que les valeurs numériques des sons décroissent moins vite que les racines carrées des poids tendants.

Cela tient à ce que la corde, même quand elle n'est tirée par aucun poids, possède toujours une certaine rigidité qui lui permet encore de résonner. Cette rigidité naturelle peut être assimilée à un certain poids tendant z; et dès lors, quand la corde en question sera tirée à son extrémité par des poids marqués P_1 et P_2, on devra en réalité la considérer comme chargée des poids $P_1 + z$ et $P_2 + z$, et les nombres N_1 et N_2..... des vibrations exécutées dans l'unité de temps, devront satisfaire à la relation

$$\frac{N_1^2}{P_1+z} = \frac{N_2^2}{P_2+z} = \frac{N_3^2}{P_3+z} \cdots\cdots$$

c'est en effet ce que l'expérience confirme.

Instruments à cordes. — Ces instruments sont de deux espèces différentes.

Les uns, — tels que les pianos et les harpes, — ont autant de cordes qu'ils doivent donner de notes différentes. Les sons les plus graves sont obtenus par les vibrations de cordes plus longues, plus grosses et spécifiquement plus lourdes. Les notes aiguës sont rendues par des cordes plus courtes et plus minces.

On accorde ces instruments en changeant la tension des cordes par une rotation convenable des chevilles auxquelles elles sont fixées.

Au contraire, dans les violons, les basses, les contre-basses et les alto, le nombre des cordes est réduit à quatre.

Mais dans tous ces instruments, si la valeur numérique du son produit dépend surtout des conditions auxquelles satisfait la corde vibrante, son intensité et son éclat sont en grande partie réglés par les caisses sonores, les tables d'harmonie, au-devant desquelles elle est tendue. Les parois de ces caisses, l'air qu'elles renferment participent aux vibrations, et chaque instrument dans son ensemble constitue un système dont toutes les parties reçoivent le mouvement par communication de celui qu'on imprime directement à la corde sonore.

Usage des sonomètres. — En principe, toutes les remarques précédentes sont applicables aux sonomètres; toutefois, l'expérience prouve que les nombres des vibrations exécutées par les cordes de ces instruments satisfont assez rigoureusement à la loi de la raison inverse des longueurs. Dès-lors, pour trouver ra-

pidement le nombre des vibrations d'un son quelconque, on commence par mettre la corde entière à l'unisson d'un son plus grave rendu par un diapason étalon; puis, à l'aide du chevalet mobile, on raccourcit la corde jusqu'à ce qu'elle vibre à l'unisson du son à déterminer. Une simple proportion conduit alors à la solution du problème.

CHAPITRE XII.

COMMUNICATION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES PAR L'AIR OU LES SUPPORTS.

La communication des mouvements vibratoires est un phénomène que l'on rencontre nécessairement dans toutes les expériences d'acoustique, car le son ne se propage à travers les corps élastiques que par une semblable communication.

Mais indépendamment de cet effet général et constant, il est un certain nombre d'expériences spéciales que l'on présente ordinairement pour rendre sensible, sous une autre forme, la réalité de cette communication.

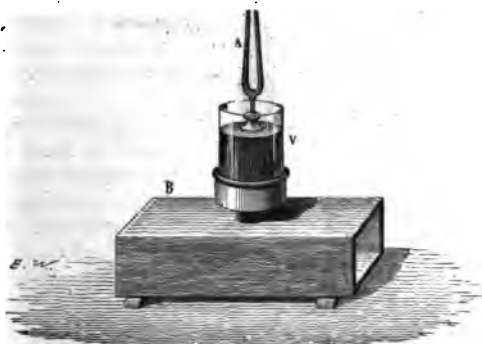


Fig. 452.

Pour prouver avec quelle facilité elle se fait à travers les liquides, on place un vase V plein de mercure (fig. 452) sur une

caisse sonore B qui peut renforcer le son d'un diapason déterminé A. On met le diapason en mouvement, et puis on lui fait toucher la surface du mercure. Aussitôt la caisse sonore, ébranlée comme elle l'eût été par le contact direct du diapason, donne au son de ce dernier le renforcement habituel.

Lorsqu'on veut obtenir avec une plaque circulaire une figure formée de cercles concentriques à la plaque, on y arrive très-aisément, avons-nous vu, en faisant vibrer longitudinalement une verge métallique soudée à la plaque en son centre et perpendiculairement à sa surface.

En cette expérience, la vibration se transmet de la verge à la plaque en conservant sa direction.

On arrive à des résultats analogues avec une potence composée (fig. 453).

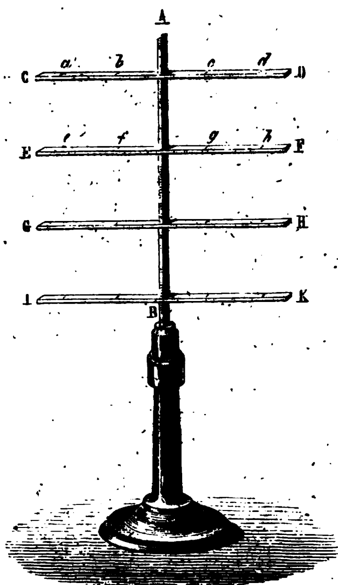


Fig. 453.

On met un peu de sable sur les différentes branches CD, EF, etc., puis on ébranle l'une d'elles, par exemple en passant un archet sur sa tranche ; aussitôt, sur toutes le sable trace la même figure.

La condition qui favorise surtout la communication des mouve-

ments vibratoires, c'est que le corps qui doit recevoir le mouvement, soit en conditions telles qu'il puisse facilement produire des vibrations de même durée que celles qui lui sont transmises par l'air ou les supports sur lesquels il se trouve fixé.

L'expérience de Sauveur, citée p. 109, nous fournit une preuve à l'appui de l'assertion précédente. Une nouvelle confirmation résulte du fait suivant :

Que l'on prenne deux grands vases de verre de même forme, et, autant que possible, égaux en dimensions et en poids. On pourra, en versant de justes proportions d'eau dans l'un ou dans l'autre, ou dans les deux à la fois, les accorder parfaitement. Ceci posé, qu'on ébranle l'un d'eux, l'autre, même à une distance un peu grande, se mettra à vibrer.

Mais la communication ne se ferait plus ou se ferait mal si en surajoutant de l'eau dans l'un de ces deux vases, on le mettait dans l'impossibilité de vibrer à l'unisson du premier.

Nous citerons encore et toujours à titre de confirmation une expérience que l'on peut faire avec la table d'harmonie, sur laquelle sont tendues les cordes d'un piano droit.

Le piano étant ouvert à la façon d'un livre, on se place à quelque distance de la table, puis on parle à voix haute, on prononce fortement quelques voyelles, ou l'on donne une note bien accentuée : la table et les cordes se mettent à vibrer, d'abord un peu confusément, mais bientôt le son s'épure et l'on n'entend plus que la vibration des cordes qui sont à l'unisson du son primitivement produit, et qui continuent à résonner, alors que ce son a cessé d'exister depuis quelques secondes déjà, et que le bruit confus résultant du trouble apporté à toute la série des cordes a aussi disparu.

Les membranes, à cause de leur peu de masse, de leur grande surface et aussi de l'extrême facilité avec laquelle elles se subdivisent, sont éminemment propres à prendre, par communication, le mouvement que l'on imprime à l'air : si le mode d'ébranlement est énergique, elles en sont influencées, même à des distances considérables. Ainsi, avec un sifflet un peu fort, on détermine aisément d'un bout à l'autre d'une vaste salle la division acoustique d'une membrane de baudruche ou de papier végétal tendu sur un cadre de bois ou de carton. — M. Savart en faisait usage pour manifester le développement des ventres et des nœuds des vibrations dans l'air de grandes galeries, au milieu desquelle il faisait vibrer un gros timbre A porté sur un trépied III, et muni d'un tube renforçant B (fig. 454). Les pièces à tirage GH, FE servaient à donner au tube une position conve-

nable. Un piston intérieur, mû par la vis D pouvait faire varier sa longueur.

Mais dans tous les cas, et quelle que soit la facilité avec laquelle elles prennent le mouvement, il est bon de se ménager la possibilité d'en faire varier la tension comme nous l'avons indiqué, page 50.



Fig. 454.

Phonautoscope. — L'appareil que M. Scott a construit pour l'étude des vibrations de l'air, consiste essentiellement en une membrane à tension variable, sur laquelle se trouve fixée obliquement une pointe de plume, très-fine et très-légère.

La pointe participe aux mouvements de la membrane, — elle les écrit sur la surface noircie d'un cylindre tournant.

Seulement pour concentrer plus aisément sur la membrane, le

mouvement que sa vibration doit traduire, on fait usage d'un tube renforçant.

Dans l'appareil que construit M. R. Kœnig, le tube renforçant à la forme d'un ellipsoïde allongé, coupé par deux plans perpendiculaires à son grand axe et passant par ses foyers.

La membrane est placée à l'un de ces foyers, — le son est produit à l'autre.

Recherches de M. Savart sur la communication du mouvement vibratoire entre deux cordes à l'unisson fixées sur un même support. — En étudiant la communication des mouvements vibratoires, M. Savart a observé une série de faits curieux, et qui paraissent se reproduire dans toutes les circonstances où des mouvements d'oscillation se transmettent par des supports quelconques entre un corps vibrant et un autre primitivement en repos, mais pouvant vibrer à l'unisson du premier.

Lorsque deux grosses cordes de basse à l'unisson, sont tendues sur une même caisse sonore, si on ébranle l'une d'elles, l'autre aussitôt commence à vibrer. Les amplitudes de ses vibrations, faibles d'abord, augmentent rapidement, tandis que celles de la première corde diminuent. Bientôt cette dernière semble pendant quelques instants presque réduite au repos; l'autre, au contraire. vibre le plus énergiquement possible; mais le temps continuant à croître, le mouvement revient à la corde primitivement ébranlée, puis il l'abandonne de nouveau au profit de la seconde; et ces alternances se reproduisent plusieurs fois, jusqu'à ce qu'enfin tout rentre insensiblement en repos.

Au moment où chaque corde à son tour acquiert un maximum de vitesse, le support éprouve des ébranlements particuliers, et en même temps il se produit des renflements de son dont la succession forme une série de battements très-distincts et analogues à ceux que nous étudierons dans le chapitre suivant.

Anches sonores. — Pour terminer ce qui nous reste à dire des vibrations des systèmes composés, nous indiquerons la disposition générale des tuyaux à anches.

Un tuyau de cette espèce (fig. 455) se compose de trois parties distinctes :

Le porte-vent B, l'anche *o* et le cône A.

L'anche est une sorte de soupape *l* que l'on place à la partie supérieure du porte-vent : elle s'ouvre et se ferme périodiquement sous l'influence du courant d'air qui s'échappe de ce dernier, et par suite elle détermine un ébranlement sonore très-analogue à celui que l'on obtient avec la sirène de M. Cagnard-Latour.

Les trois parties essentielles de l'anche (fig. 455) sont : la rigole ou canal par lequel l'air s'échappe, *t*; — la languette, *l*, petite lame de cuivre très-mince fixée à l'une de ses extrémités, libre à l'autre, et qui en vibrant à l'orifice de la rigole, l'ouvre et le ferme alternativement; — la rasette, *rr*, tige de cuivre roide qui, venant presser sur la languette à une distance plus ou moins considérable du point d'attache, la raccourcit ou l'allonge de manière à la rendre apte à vibrer plus ou moins rapidement sous l'influence de la pression exercée sur elle par l'air qui tend à s'écouler.

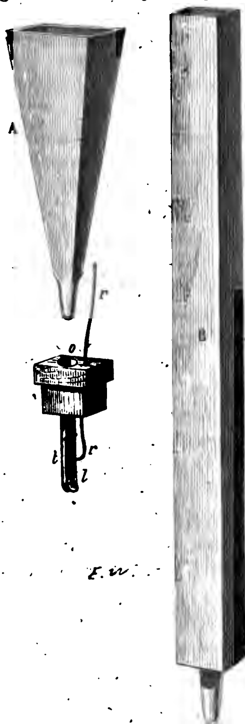


Fig. 455.

Souvent la languette est un peu plus large que l'orifice qu'elle doit boucher; elle en frappe les bords dans ses excursions périodiques, et le son présente un timbre criard et désagréable. Dans les anches *libres* de Grenié (fig. 456), la languette, un peu moins large que l'orifice, y pénètre et en sort alternativement sans toucher les contours. Les sons ont alors plus de pureté et un timbre beaucoup plus agréable.

La rigole peut être indéfiniment raccourcie : n'être plus, par exemple, qu'une simple fente percée dans une lame métallique.

Le cône peut être supprimé. Mais il donne beaucoup d'éclat au son; tantôt il a véritablement la forme d'un cône renversé, comme cela a lieu, par exemple, dans les jeux de *trompette*.

D'autres fois, il se compose de deux troncs de cône (fig. 456) superposés.

Dans tous les cas, il doit y avoir certaines relations entre ses dimensions, celles du porte-vent et le son de l'anche à laquelle ils doivent être joints.

Le jeu de la rasette permet d'accorder facilement les tuyaux.

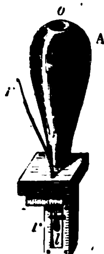


Fig. 455.

CHAPITRE XIII.

BATTEMENTS. — SONS RÉSULTANTS.

Lorsqu'on entend simultanément deux sons voisins de l'unisson, on entend en même temps une série de battements plus ou moins rapides provenant de renforcements successifs dans le son entendu. En outre, lorsque l'on fait parler en même temps deux tuyaux d'orgue donnant des notes distantes d'une tierce, d'une quarte, on saisit aisément l'existence d'un nouveau son, différent des deux premiers et notablement plus grave.

Ces phénomènes sont évidemment des conséquences de la combinaison des deux systèmes de vibrations qui viennent simultanément impressionner l'oreille; et par suite, si l'on peut trouver quelque formule simple pour représenter la résultante des vitesses apportées à chaque molécule d'air par l'ensemble des deux séries d'ondes élémentaires, on devra nécessairement voir ressortir de cette formule l'explication des faits dont il s'agit ici.

Voici comment on résout le problème :

Les vitesses successives que possède, aux différentes époques de son mouvement, une molécule qui, ayant une vitesse nulle à l'origine du temps, accomplit n vibrations doubles dans le temps τ, sont représentées par l'équation

$$V = A \sin 2\pi \frac{nt}{\tau}$$

car pour

$$t = o, \frac{1}{n}\tau, \frac{2}{n}\tau, \ldots\ldots$$

l'arc soumis au signe *sinus* devient égal à un multiple entier de 2π; le *sinus* accomplit donc n fois son évolution complète pendant le temps τ.

Si l'on prend τ pour unité, la formule devient

$$V = A \sin 2\pi nt$$

Pour un autre son qui répondrait à n' vibrations doubles en

l'unité de temps, tout en ayant même intensité que le premier, la formule serait

$$V' = A \sin 2\pi n't$$

Si l'on suppose ces deux vitesses dirigées dans des directions parallèles, on les combinera par simple addition, ainsi nous l'avons déjà pratiqué plusieurs fois, et le mouvement résultant, transmis à une molécule d'air quelconque, se trouvera représenté, quant à la grandeur de la vitesse qu'il possède à chaque instant, par l'équation

$$U = V + V' = A \sin 2\pi nt + A \sin 2\pi n't$$
$$= 2A \sin \pi (n+n')t \cos \pi (n-n')t.$$

La discussion de cette formule est facile.

L'expression de U se compose de 3 facteurs, l'un invariable 2A, les deux autres variables, savoir : $\sin \pi (n + n')t$ et $\cos \pi (n - n')t$; si le troisième de ces facteurs se réduisait à 1, comme la valeur absolue du second devient dans chaque unité de temps $(n + n')$ fois nulle et $(n + n')$ fois égale à 1, il s'ensuivrait que U pendant cet intervalle de temps, acquerrait $(n + n')$ maxima positifs ou négatifs égaux entre eux et dont la valeur absolue serait 2A.

Mais les variations périodiques du facteur $\cos \pi (n - n')t$ empêchent qu'il n'en soit ainsi.

Ce facteur devient nul $(n - n')$ fois par unité de temps, et par suite il annule la fonction ; puis, comme dans le voisinage des époques où il est nul il reste nécessairement très-petit pendant quelques instants, il réduit par cela même dans une forte proportion la valeur 2A des maxima périodiques du produit $2A \sin \pi (n + n')$, en sorte que finalement ceux-ci passent alternativement par tous les états de grandeur de 0 à $\pm$ 2A.

En un mot, la courbe des vitesses présente la forme représentée fig. 455 (p. 127).

Et comme les évolutions du cosinus sont au nombre de $n - n'$ par seconde, on voit que $(n - n')$ fois par seconde l'ébranlement de l'oreille éprouvera un renforcement particulier.

Si ces renforcements se succèdent assez rapidement, il en résultera un son continu dans lequel chacun comptera comme une vibration double, ainsi que dans la sirène chaque choc imprimé par le fluide qui s'écoule au fluide extérieur compte pour une vibration double.

Si, au contraire, le nombre $n - n'$ est très-petit et ne dépasse pas 3 ou 4, l'influence des variations du cosinus sur la grandeur

de U se traduira par une série de renforcements successifs dans le phénomène sonore perçu par l'oreille.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, une intensité égale aux deux sons que l'on veut combiner; mais cette restriction n'ôte rien à la généralité de nos résultats, car lorsque l'égalité en question n'existera pas, on supposera le plus intense des deux sons remplacé par deux autres, dont l'un soit précisément égal à celui pour lequel l'intensité est moindre, et l'on sera ramené au cas précédent, seulement avec persistance et prédominance d'un des deux sons composants.

Sons résultants. — Les indications que donne cette théorie sur la valeur du son qui résulte de la production simultanée de deux autres sont parfaitement d'accord avec l'expérience.

Ainsi, que l'on fasse parler ensemble deux tuyaux d'orgue
donnant ut_2 et sol_2,
ou bien sol_2 et ut_3,
ou enfin ut_4 et $ré_4$,
et l'on entendra toujours distinctement le son ut_1.

Or, si l'on représente par n le nombre de vibrations de ut_1, on pourra écrire

$$ut_1 = n \quad sol_2 = 3n \quad ut_4 = 8n$$
$$ut_2 = 2n \quad ut_3 = 4n \quad re_4 = 9n$$

et par suite on aura nécessairement

$$sol_2 - ut_2 = n \quad ut_3 - sol_2 = n \quad re_4 - ut_4 = n.$$

On trouve souvent dans les cabinets de physique deux tuyaux donnant isolément ut_4 et fa_4, et dont le son résultant est fa_2. A ce couple de tuyaux on joint ordinairement un fa_2 qui sert à guider l'oreille et à lui faire reconnaître plus facilement le son résultant qu'elle entend.

La découverte de ces sons est due à Tartini. Quant aux battements proprement dits, ils ont dû être remarqués de tout temps.

Battements. — On met souvent leur production à profit pour accorder deux tuyaux. Lorsque la distance des deux sons est un demi-ton ou un tiers de ton, les battements sont très-rapides, ils se ralentissent lorsqu'on approche de l'accord et finissent par disparaître. On fait très-commodément l'expérience avec deux tuyaux de mêmes dimensions, très-sensiblement d'accord et dont l'un porte à sa partie supérieure une petite lame de plomb pou-

vant le fermer plus ou moins. En faisant varier la position de cette lame, on accorde ou désaccorde les deux tuyaux, et l'on obtient à volonté des battements lents ou rapides.

Dans les cours publics on emploie souvent, pour obtenir des battements, deux gros tuyaux ouverts de 3 à 4 pieds de long, et à un demi-ton d'intervalle; le phénomène acquiert alors une grande intensité. On en obtient encore en combinant le son d'un diapason avec celui d'une corde, d'un tuyau, d'une sirène; deux sirènes peuvent aussi servir à reproduire les effets dont il s'agit : on les monte sur deux souffleries différentes, et lorsqu'elles sont amenées à peu près à l'unisson, on entend se développer un roulement plus ou moins rapide dû aux renforcements périodiques du mouvement qu'elles impriment à l'air.

Expériences de Sauveur. — Sauveur avait imaginé d'utiliser le phénomène des battements pour arriver à la détermination du nombre absolu de vibrations d'un son. Il prenait deux sons graves, dont l'un était le dièse de l'autre, et il comptait le nombre de battements à la seconde, soit p ce nombre. Les nombres de vibrations des deux sons éprouvés étant 25 n et 24 n, d'après la valeur numérique du dièse, on doit avoir, en suivant les indications de notre théorie,

$$25n - 24n = n = p.$$

n étant connu, 24 n et 25 n le sont pareillement.

On pourrait, du reste, arriver à ce résultat sans passer par la formule générale développée plus haut.

Il doit évidemment y avoir renforcement dans le son toutes les fois qu'il y a coïncidence complète entre les mouvements apportés par les deux systèmes d'ondes. D'un autre côté, cette coïncidence complète se reproduit toutes les fois que l'un des systèmes a gagné une vibration double sur l'autre. Si donc il y a p battements par seconde, c'est que la différence 25 n — 24 n du nombre de vibrations doubles exécutées à la seconde par les deux sons composants est précisément égal à p; donc enfin on aura dans ce cas :

$$(25 - 24)n = p$$

ou simplement

$$n = p,$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

M. Scheibler a appliqué d'une manière différente l'observation des battements à la détermination des nombres absolus de vibra-

tions doubles n et n', rendus à la seconde par deux diapasons, A et B.

Il commençait par ajuster les diapasons de manière qu'ils fussent exactement à l'octave, puis il en accordait $p - 1$ autres intermédiaires, de manière que chacun, un peu plus élevé que le précédent, donnât avec lui 4 battements à la seconde.

On avait alors pour déterminer n et n' les équations suivantes :

$$\frac{n'}{n} = 2, \qquad n' = n + 4p.$$

L'avantage que l'auteur trouvait à ce procédé consistait à n'employer l'oreille qu'à apprécier un intervalle d'octave sur lequel elle est très-sensible.

La combinaison de mouvement qui donne naissance aux battements ou aux sons résultants peut être rendue très-facilement visible de la manière suivante :

On prend pour corps sonores deux diapasons de dimensions un peu considérables et qui exécutent des vibrations d'une assez grande amplitude. — Le premier P est fixe ; sur l'une de ses branches, on attache à la cire une petite lame de verre noircie, en prenant soin d'en mettre une seconde de même poids sur l'autre branche, afin que la vibration ne soit pas gênée.



Fig. 457.

Le second diapason P' doit être tenu à la main ; il est armé d'une pointe. Les deux appareils étant mis en vibration sonore, on approche rapidement P' de P, en ayant soin que les plans dans lesquels la vibration s'exécute soient bien parallèles entre eux ainsi qu'à la glace noircie, et en faisant rapidement mouvoir P' de bas en haut, de manière que sa pointe effleure toujours la glace, on obtient sur celle-ci le tracé cherché.

La figure 457 est l'une de celles que nous avons obtenues il y a quelques années, M. Lissajous et moi, en appliquant le procédé qui vient d'être décrit, soit à l'étude graphique des batte-

ments, soit à la représentation également graphique des accords que nous obtenions avec des diapasons rigoureusement ajustés.

Le tracé que nous donnons ici correspond à un cas de battements bien distincts, et il est facile de voir quel était le rapport des nombres de vibrations des deux sons composants.

En effet, la courbe sinueuse représentée sur la figure et dont l'équation est

$$y = 2\,A \cos \pi\,(n + n')\,t \cos \pi\,(n - n')\,t,$$

nous montre que dans l'intervalle de deux battements il y a 10 évolutions du premier cosinus. Or, dans l'unité de temps il y a $(n - n')$ battements et $(n + n')$ périodes du premier cosinus; donc pendant l'intervalle de deux battements, c'est-à-dire en un temps égal à $\frac{1}{n - n'}$, le nombre de ces périodes est $\frac{n + n'}{n - n'}$; et puisqu'ici ce nombre est 10, on peut écrire $\frac{n + n'}{n - n'} = 10$, et ainsi pour déterminer le rapport $\frac{n'}{n}$ on aura l'équation

$$\frac{1 + \frac{n'}{n}}{1 - \frac{n'}{n}} = 10$$

CHAPITRE XIV

RECHERCHES DE M. LISSAJOUS SUR L'ÉTUDE OPTIQUE DES VIBRATIONS SONORES.

§ 1. — COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES RECTANGULAIRES.

Dans les chapitres où l'on a traité des interférences des sons et de la théorie des tuyaux, on a étudié la combinaison de mouvements vibratoires ayant même période et des directions parallèles, ou au moins peu inclinées l'une sur l'autre. Pour expliquer les phénomènes des battements, on a cherché comment se combinent des mouvements vibratoires toujours parallèles entre eux, mais présentant entre leurs durées des rapports quelconques. Enfin, dans

ce qui va suivre on étudiera d'une manière générale la composition de vibrations rectangulaires entre elles, et dont les périodes, ainsi que les intensités, pourront avoir un rapport quelconque.

C'est, en effet, sur les lois de composition de ces mouvements rectangulaires qu'est fondée la méthode à l'aide de laquelle M. Lissajous est parvenu à résoudre, avec une extrême précision, plusieurs problèmes fondamentaux de la théorie du son.

Cette méthode a été désignée par son auteur du nom de méthode optique, parce qu'elle ramène à l'observation de tracés lumineux, l'étude d'un grand nombre de phénomènes d'acoustique.

Nous admettrons toujours une loi de mouvement vibratoire, telle que l'écart de la molécule vibrante à sa position d'équilibre soit représentée par une expression de la forme $A \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$. τ étant la durée de l'oscillation double ou complète, t le temps compté depuis le moment où la molécule part de la limite extrême de son excursion.

Si les deux mouvements vibratoires que l'on veut composer, sont de périodes différentes et telles que l'un accomplisse n vibration dans l'unité de temps, tandis que l'autre en exécute n', l'équation du premier étant

$$x = A \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{n}} = A \cos 2 n \pi t$$

celle du second sera

$$y = A' \cos 2n'\pi t$$

S'il existe une différence de phase entre ces mouvements, si, par exemple, l'origine du temps étant prise au moment où $x = A$, l'autre coordonnée n'atteint, pour la première fois, sa plus grande valeur A', qu'après une fraction c du temps $\frac{1}{n'}$ de son oscillation, il faudra écrire :

$$y = A' \cos 2\pi \left(\frac{t - c\frac{1}{n'}}{\frac{1}{n'}} \right)$$

$$y = A' \cos 2 n' \pi \left(t - \frac{c}{n'} \right) = A' \cos 2 n' \pi \, (t - \delta)$$

si l'on pose $\frac{c}{n'} = \delta$.

Pour obtenir la trajectoire de la molécule vibrante, il faudrait

éliminer le temps entre ces deux équations : nous nous bornerons ici à achever le calcul dans quelques cas particuliers.

Le plus simple de tous est celui où l'on a $n = n'$ et $c = 0$, en d'autres termes celui où les deux mouvements ont même phase et même période.

Alors le déplacement x dû au premier, étant représenté par l'équation $x = A \cos 2\pi nt$, celui qui provient du second sera $y = A' \cos 2\pi nt$; l'élimination du temps entre ces deux équations, se fait par une simple division : elle conduit à l'équation $\frac{x}{y} = \frac{A}{A'}$. Cette équation est celle de la trajectoire ; elle représente une ligne droite dont l'inclinaison sur l'axe des x a pour tangente $\frac{A'}{A}$.

Après ce cas, le plus simple qui puisse se présenter est celui dans lequel les deux mouvements composants, tout en ayant des intensités et des périodes égales, ont entre eux une différence de phase d'un quart d'ondulation complète, tellement, qu'en vertu de la composante parallèle aux y la molécule serait à la limite supérieure de son excursion dans le sens vertical au moment où sous l'action de l'autre composante elle passerait par la position d'équilibre.

Les deux équations des mouvements sont alors

$$x = A \cos 2\pi n \qquad\qquad x = A \cos 2\pi n t$$
$$\text{ou}$$
$$y = A \cos 2\pi n\left(t - \frac{1}{4n}\right) \qquad\qquad y = A \sin 2\pi n t$$

de sorte que pour toute valeur du temps, la valeur de y coïncide avec celle que x possédait à une époque antérieure du quart de la durée d'une oscillation double ou complète.

L'élimination du temps se fait encore sans difficulté aucune, et conduit à l'équation du cercle

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = A^2$$

Dans le cas le plus général, les intensités sont inégales, et la différence qui existe entre les époques où la molécule passe par les limites de ses excursions dans les deux sens, est une fraction quelconque du temps de l'ondulation ; il faut alors, pour avoir l'équation de la trajectoire, éliminer le temps entre les deux équations :

$$x = A \cos 2\pi n t$$
$$y = A' \cos 2\pi n (t - \delta)$$

on obtient alors la relation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A'^2} - \frac{2xy}{AA'} \cos 2\pi n\delta = \sin^2 2\pi n\delta$$

laquelle représente une ellipse.

D'après les règles de la géométrie, les angles ω que font les axes de cette ellipse avec l'axe des x, sont liés à la différence de phase δ par la relation

$$tg\, 2\omega = \frac{2AA' \cos 2\pi n\delta}{A'^2 - A^2}$$

Et l'on voit aussi que la courbe touche la droite dont l'équation est $y = A'$, au point dont l'abscisse est $x = A \cos 2\pi n\delta$, et la droite $x = A$, au point dont l'ordonnée est $y = A' \cos 2\pi n\delta$.

M. Lissajous a calculé et discuté d'une manière générale la trajectoire représentée par les deux équations de la page 129. Nous ne pouvons reproduire ici son analyse, mais nous considérerons encore le cas où l'on a $n' = 2n$;
les équations sont alors

$$x = A \cos 2\pi nt \qquad \text{et} \qquad y = A' \cos 4\pi n (t - \delta)$$

posons

$$2\pi n t = q \qquad 4\pi n t = p \qquad 4\pi n \delta = r = 4\pi \frac{c}{2}$$

et il viendra

$$x = A \cos q \qquad y = A' \cos (p - r)$$
$$y = A' \cos p \cos r + A' \sin p \sin r$$

ou comme $p = 2q$

$$x = A \cos q \qquad y = A' \cos 2q \cos r + A' \sin 2q \sin r$$
$$y = A' (\cos^2 q - \sin^2 q) \cos r + 2A' \sin q \cos q \sin r.$$

$$y = A' \left(\frac{x^2}{A^2} - 1 + \frac{x^2}{A^2} \right) \cos r \pm 2A' \frac{x}{A} \sin r \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

La discussion de la courbe ne présente pas de difficulté; on peut du reste, voir immédiatement la forme qu'elle affecte, pour quelques valeurs simples de δ.

Supposons d'abord $\delta = o$, et admettons que le mouvement le plus lent soit dirigé parallèlement à l'axe des y.

Au moment où la molécule vibrante, sous l'influence de la vi-

bration parallèle aux x arrivera à la limite B, de son excursion (fig. 458), sous l'influence de l'autre mouvement composant, elle serait seulement arrivée à l'horizontale OB; donc, depuis l'origine jusqu'au moment actuel elle a décrit un certain arc de courbe tel que AB, pendant la seconde période simple du mouvement parallèle aux x, elle parcourra un second arc BC, semblable au premier, le tout formant une sorte de parabole ABC.

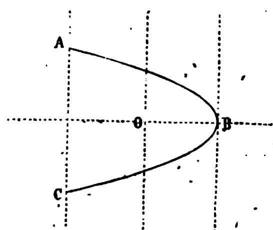


Fig. 458.

Si au contraire, nous admettons que le mouvement parallèle aux Y, se trouve en retard sur l'autre d'un intervalle de temps égal au quart de la durée de l'oscillation complète de celui-ci, il arrive d'abord qu'au moment où l'abscisse est nulle, l'ordonnée acquiert sa valeur maximum + A'; puis, tandis que l'abscisse varie de o à — A et revient de — A à o, l'ordonnée décroît simplement de + A' à o : delà une première branche de courbe, qui, se reproduisant nécessairement dans les 4 cadrans, complète le 8 de la figure 459.

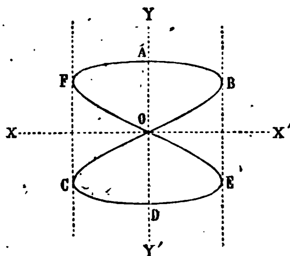


Fig. 459.

Enfin, on conçoit qu'entre ces deux figures limites les variations des intensités et des phases des deux mouvements composants, établissent une infinité d'intermédiaires, dont on peut concevoir la génération en supposant que le 8 se plie sur lui-même de manière à repousser son sommet A dans un sens ou dans l'autre, et cela en resserrant ses branches de façon à arriver enfin à l'arc parabolique de la première figure.

Vérifications expérimentales. — Pour rendre sensibles ces lois de la composition des mouvements vibratoires, au moins dans le cas $n = n'$, M. Lissajous a construit un appareil, dont la description nous conduira aux applications acoustiques des principes qu'il sert à manifester.

Cet appareil est composé de deux lentilles presque contiguës, parallèles entre elles et qui peuvent accomplir de petites oscillations rectilignes, l'une l horizontalement, l'autre l' verticalement (fig. 460).

Si l'on place d'un côté du système convergent, une source de lumière, une petite ouverture fortement éclairée, elle formera son image de l'autre côté à une distance déterminée par la formule connue, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{a}$ (*a* représente ici la distance focale du système double). Alors si l'on vient à faire mouvoir rapidement la lentille *l* seule, l'image décrira une droite horizontale sur l'écran où elle se projette, et cette droite sera lumineuse et visible dans toute son étendue si elle est parcourue en un temps inférieur à celui de la durée de la sensation sur l'œil.

La trace lumineuse serait verticale, si la deuxième lentille se mouvait seule. Si on les ébranle en même temps, on observera sur le tableau une ligne droite inclinée dans un sens ou dans l'autre, un cercle ou une ellipse, suivant la grandeur des intervalles de temps qui séparent les instants où les deux lentilles passent par les limites extrêmes de leurs excursions.

Dans l'appareil de M. Lissajous (fig. 460), les lentilles sont

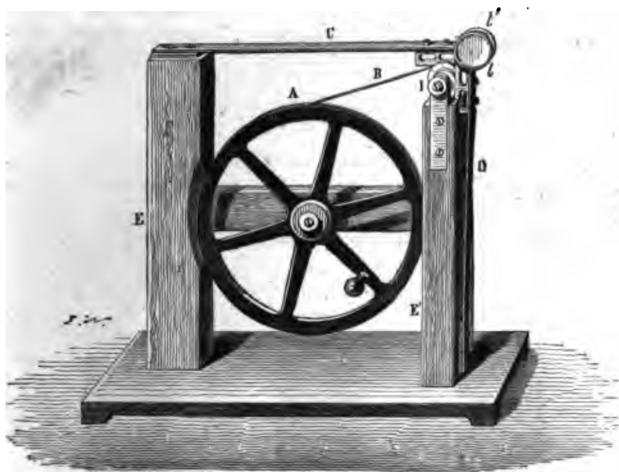


Fig. 460.

portées aux extrémités de ressorts C et D, qui sont périodiquement soulevés par des excentriques Z et Z' (fig. 461) fixés sur l'arbre I, le jeu des excentriques est représenté en détail (fig. 461).

L'arbre, au moyen d'une corde sans fin AB (fig. 460), reçoit

son mouvement de la roue A. Enfin, les excentriques, peuvent prendre toutes les positions relatives qu'il est nécessaire de leur donner. Ils sont en effet indépendants l'un de l'autre, et chacun

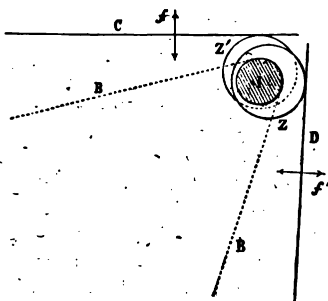


Fig. 461.

d'eux est fixé sur l'arbre par une vis de pression que l'on manœuvre à l'aide d'une clef spéciale.

§ 2. — FIGURES ACOUSTIQUES.

L'application de ces principes à l'étude des phénomènes acoustiques, se présente d'elle-même. Supposons, en effet, que les ressorts C et D soient remplacés par deux diapasons pouvant vibrer dans des plans parallèles entre eux, mais en même temps dans des directions rectangulaires, il est clair que la forme du tracé lumineux dépendra des rapports qui existent entre les mouvements des deux diapasons; et, par conséquent, si ces mou-



Fig. 462.



Fig. 463.



Fig. 464.

vements sont précisément à l'unisson, on aura un tracé elliptique pouvant se réduire à un cercle ou à une ligne droite, suivant la différence de phase (fig. 462, 463, 464).

Si les diapasons sont à l'octave, on aura soit l'
5, 466, 467, 468, soit quelque autre inte
es.



Fig. 465.



Fig. 466.



Fig. 467.

Au lieu d'armer de lentilles les diapasons que
ployer aux expériences que nous indiquons ici, il
commode de leur souder de petits miroirs; ils
être disposés comme on le voit sur la figure 469.
EFGH représente le rayon lumineux; T est le tabl
on projette le phénomène.

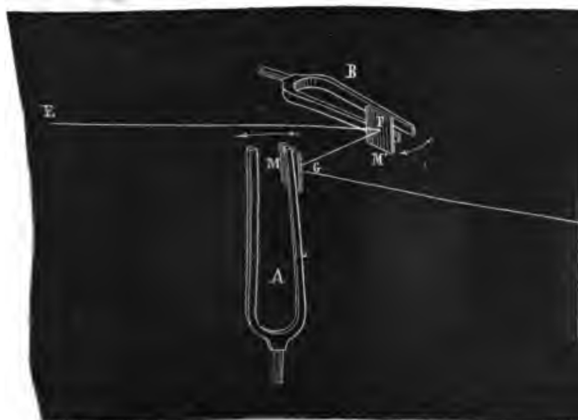


Fig. 469.

Pour chacune des valeurs différentes que l'on
au rapport des sons rendus par les diapasons, on a
neux différent et dont la forme est donnée par l'
nous avons indiqué plus haut le principe.

§ 3. — DISCUSSION GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES FIGURES ACOUSTIQUES.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'équation qui donne le mouvement de la trajectoire se présente en général sous une forme assez compliquée; mais l'une de ses propriétés les plus remarquables se voit immédiatement et sans le secours d'aucun calcul.

D'après les équations fondamentales :

$$x = A \cos 2 n \pi t$$
$$y = A' \cos 2 n' \pi \left(t - \frac{c}{n'}\right)$$

x devient n fois égal à A dans l'unité de temps, et y devient n' fois égal à A' pendant ce même intervalle; comme du reste x et y varient d'une manière continue, la figure aura généralement n contacts distincts avec les droites dont les équations sont :

$x = +A$ et $x = -A$

et n' contacts avec les droites dont les équations sont :

$y = +A'$ et $y = -A'$

au moins si n et n' sont premiers entre eux, ce que nous supposerons dorénavant.

Par exemple, les figures 470 et 471 sont les tracés caractéristiques de la quarte et de la double octave, c'est-à-dire des rapports $\frac{4}{3}$ et 4. Dans le premier, il y a 4 contacts avec la limite verticale et 3 avec la limite horizontale de la courbe. Dans l'autre 4 contacts avec la limite verticale, un seul avec la limite horizontale.

Pour certaines différences de phase, il est vrai, cette condition ne semble pas satisfaite; mais ces cas sont des cas particuliers


Fig. 470.


Fig. 471.

dans lesquels le tracé lumineux s'est pour ainsi dire replié sur lui-même. — Voir les figures 475 et 479 tableau représentatif de la quinte.

On peut étudier d'ailleurs complétement les principales propriétés des courbes acoustiques en ayant recours à une considération géométrique très-élégante au moyen de laquelle M. Lissajous a déduit ces propriétés, non pas de l'équation de la courbe elle-même, mais des équations de ses deux projections.

Soient XX', YY' (fig. 472) les axes rectangulaires parallèlement auxquels s'exécutent les deux vibrations composantes, et concevons-en un troisième OC perpendiculaire aux deux premiers et passant par leur point de rencontre.

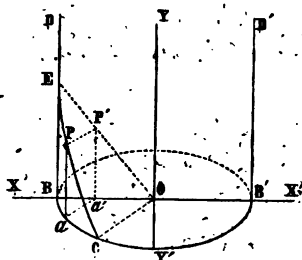


Fig. 472.

Soient prises sur l'axe XX' les deux longueurs OB, OB', égales entre elles et à A, et soit décrit dans le plan XOC un cercle de centre O et de rayon OB = A. Soit enfin un cylindre parallèle à OY et ayant le cercle BCB' pour section droite. A l'origine du temps, le point lumineux qui trace la courbe acoustique sera sur la ligne BD à une hauteur BE = A' au-dessus du plan XOC. Il touchera la ligne B'D' aux époques

$$\frac{1}{2n} \quad \frac{3}{2n} \quad \frac{5}{2n} \cdots\cdots\cdots$$

et la ligne BD aux époques

$$0. \quad \frac{2}{2n} \quad \frac{4}{2n} \cdots\cdots\cdots$$

et le mouvement de sa projection sur la ligne BB' sera donné par l'équation

$$x = A \cos 2\pi n t.$$

Or supposons qu'à l'époque où le point lumineux P' part de sa position primitive E pour se mouvoir dans le plan BB'DD', un autre point P parte également de E et se meuve sur le cylindre,

sous la condition que sa projection sur le cercle de base se meuve uniformément avec la vitesse absolue $2\pi n A$, de telle sorte qu'elle fasse n fois le tour du cylindre par chaque unité de temps.

A chaque instant du mouvement, les abscisses des points P et P' comptées sur la ligne BOB' sont les mêmes en grandeur absolue et en signe. Chacune d'elles est égale au produit de A par le cosinus de l'angle décrit autour du centre O à partir de OB dans le plan XOC par la projection de P sur ce plan.

Quant à l'ordonnée de P, elle sera à toute époque égale à celle de P', si on la suppose définie par la même équation :

$$y = A' \cos 2\pi n' t;$$

et alors la courbe tracée sur le cylindre aura pour projection sur le plan XOY le tracé lumineux lui-même.

La courbe du point P est complétement déterminée par ce qui précède.

Elle fait n fois le tour du cylindre avant de revenir à coïncider avec elle-même. Pendant ces n révolutions elle coupe $2n'$ fois la circonférence de base. La distance de deux points de section quelconques est constante et égale à $\frac{2\pi n A}{2n'}$. Les valeurs de ses ordonnées maxima et minima sont égales à $\pm A'$.

Enfin si on la déroule complétement sur un plan, sa base ou, si l'on aime mieux, son axe rectifié aura une longueur L égale à $2\pi n A$; et l'ordonnée y d'un point quelconque sera donnée par l'équation :

$$y = A' \cos 2\pi \frac{z n'}{L}$$

z étant l'abscisse du point considéré comptée à partir du commencement de la base rectifiée.

Tellement que si l'on veut réellement avoir la représentation matérielle de l'accord $\frac{n'}{n}$, on prendra un cylindre de verre de rayon A et une feuille de papier de longueur $2\pi n A = L$.

A partir d'un des bords BD de cette feuille (fig. 473) on tracera sur elle la courbe cosinusoïdale donnée par l'équation

$$y = A' \cos 2\pi \frac{z n'}{L}$$

z étant la distance d'un point quelconque à l'origine B. Puis on enroulera la feuille sur le cylindre, et sur la surface transparente

de celui ci l'on décalquera la courbe en noir foncé. Enfin on tournera le cylindre de manière qu'une des ordonnées maximum coïncide avec fc (fig. 474), et si alors d'une distance un peu

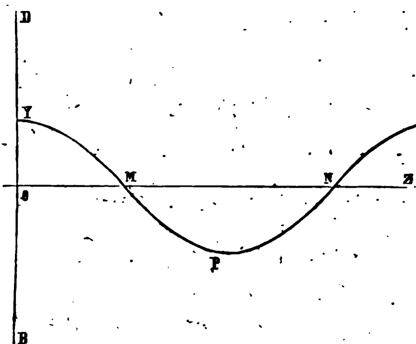


Fig. 473.

grande on projette à l'œil la courbe rampante sur un carton blanc, voisin du cylindre et parallèle à BOY, on verra la courbe qui caractérise l'accord $\frac{n'}{n}$ dans l'hypothèse où les deux mouvements composants n'ont pas de différence de phase.


Fig. 474.

On étend aisément ces considérations au cas où les deux mouvements composants ne passent pas tous deux par leur maximum à l'origine du temps.

Soit toujours $x = A \cos 2\pi n$ l'équation du mouvement de la projection horizontale.

Si la projection verticale n'atteint son premier maximum d'élongation qu'à l'époque $\frac{c}{n'}$, l'équation de son mouvement sera :

$$y = A \cos 2\pi n' \left(t - \frac{c}{n'}\right)$$

A l'époque $\frac{c}{n'}$, la projection horizontale aura accompli une fraction $\frac{cn}{n'}$ de son oscillation.

Si à partir de ce moment le temps s'accroît de θ, l'ordonnée de la trajectoire devient :

$$A' \cos 2 \pi n' \theta$$

Quant à l'abscisse, elle est :

$$x = A \cos 2 \pi n \left(\frac{c}{n'} + \theta\right)$$

Cette ordonnée et cette abscisse sont celles qu'aurait à la même époque $\frac{c}{n'} + \theta$, le point fictif P, en supposant qu'à l'époque $\frac{c}{n'}$ il partît du point du cylindre dont l'ordonnée est A', et l'abscisse $A \cos 2\pi \frac{nc}{n'}$, et qu'il se mût, du reste, comme nous l'avons primitivement admis; en d'autres termes enfin, la courbe optique coïncide avec celle que l'on obtiendrait en projetant sur le plan XOY la courbe qu'aux pages précédentes nous supposions enroulée sur le cylindre, si l'on venait à faire tourner celui-ci d'un angle égal à $2\pi \frac{nc}{n'}$.

D'après cela, supposons que l'on place le cylindre au-devant d'un tableau blanc et qu'on le fasse tourner autour de son axe; comme on aperçoit à la fois toute la courbe à cause de la transparence du verre, on voit s'accomplir toutes les transformations que subit la figure caractéristique de l'accord $\frac{n'}{n}$ lorsque la différence de phase des mouvements prend toutes les valeurs possibles.

Si maintenant la courbe est symétrique par rapport à un plan passant par l'axe, lorsque ce plan sera parallèle au tableau, les sommets symétriques se projetteront deux à deux les uns sur les autres, et dès lors le nombre des points où la courbe touche ses deux limites horizontales se trouvera réduit.

Quand la courbe aura l'un de ses sommets dans le plan axial parallèle au tableau, les deux branches de courbe qui partent de ce sommet et s'étendent sur le cylindre se projetteront l'une sur l'autre, et en projection le sommet deviendra l'extrémité d'une branche de courbe s'arrêtant brusquement à l'une des limites verticales de la courbe.

Enfin il est clair que, si la courbe doit faire n fois le tour du cylindre avant de redevenir identique à elle-même, elle coupera n fois les arêtes extrêmes BD et B'D' (fig. 472), et dans la figure

vue en projection, chacun de ces points sera un point de tangence aux limites extrêmes. Il y en aura donc n en général.

Mais on conçoit aussi que ces points puissent se superposer deux à deux.

Il suffit pour cela que la courbe passe deux fois au même point : une première fois en s'abaissant vers le sol, et la seconde fois en s'élevant, ou *vice versâ*.

Le tableau suivant met en évidence l'évolution complète de la figure caractéristique de la quinte. Le n° 475 est relatif au cas où le son le plus grave correspond à la vibration verticale, et se trouve en retard sur l'autre d'une demi-oscillation ; de telle sorte qu'au départ les coordonnées de la molécule vibrante soient — A′ et + A.

En outre, les figures 475 et 479 donnent l'exemple d'une des simplifications qui se présentent dans la figure acoustique par suite de la superposition des projections des parties antérieures et postérieures de la courbe.

D'une figure à l'autre du tableau, la différence de phase varie par huitième de vibration.

TABLEAU DES FIGURES DE LA QUINTE.

LA DIFFÉRENCE DE PHASE Y CROIT PAR HUITIÈME DE VIBRATION.


Fig. 475.


Fig. 476.


Fig. 477.


Fig. 478.


Fig. 479.


Fig. 480.


Fig. 481.


Fig. 482.

§ 4. — TRACÉ DES COURBES ACOUSTIQUES.

L'intérêt qui s'attache à la connaissance des figures représentatives des accords musicaux a déterminé M. Lissajous à cher-

cher des procédés à l'aide desquels on pût les reproduire graphiquement d'une manière exacte. Voici le principe de celui auquel il s'était d'abord arrêté :

Nous avons déjà établi que si un mobile oscille, suivant une droite AA', de longueur 2 A (fig. 483), sous cette condition que la distance variable OX $= x$ soit liée au temps t compté à partir du moment où le mobile part de A par la relation $x = A \cos 2 n \pi t$, il faudra, pour avoir la position du mobile au bout du temps t, décrire une circonférence sur 2 A comme diamètre, compter sur cette circonférence, à partir du point A, un arc $Ac' = 2 n \pi A t$, et projeter orthogonalement le point c' sur la ligne AA'.

D'après cela, si l'on veut avoir les positions successives que le mobile occupe après des temps égaux aux fractions $\frac{1}{p}$ $\frac{2}{p}$ $\frac{3}{p}$ du temps d'une oscillation complète, on divisera la circonférence en p parties égales à partir de A, et les projections des points de division sur l'axe seront les positions cherchées.

Maintenant, supposons qu'il s'agisse de combiner deux mouvements vibratoires d'amplitudes 2 A et 2 A', dirigés l'un suivant AOA', l'autre suivant BOB', le premier faisant n oscillations à la seconde et le deuxième n', ayant en un mot pour équations :

$$x = A \cos 2 n \pi t \qquad y = A' \cos 2 n' \pi t.$$

Sur 2 A et 2 A' (fig. 483) comme diamètres, on décrira deux circonférences et on les divisera en p parties égales, p étant un

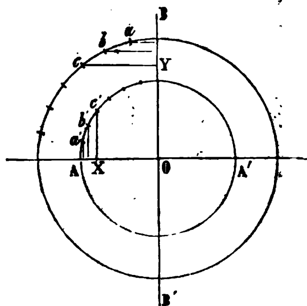


Fig. 483.

multiple de 4. On projettera respectivement les points de division sur les diamètres AA' et BB', puis à partir de A on comp-

tera n divisions sur AA', et n' sur BB' à partir de B; les points X et Y que l'on obtiendra ainsi seront les coordonnées d'un même point de la trajectoire cherchée. Pour en obtenir un deuxième, à partir de X on compterait de nouveau n divisions sur AA', n' à partir de Y sur BB', et l'on aurait les pieds des coordonnées de ce second point.

Lorsqu'en opérant ainsi on arrive aux extrémités des axes, on revient vers le centre en comptant toujours de la même manière :

Les mouvements dont les équations sont :

$$x = A \cos 2\pi n t \quad \text{et} \quad y = A' \cos 2\pi n' t$$

se trouvent liés entre eux par la condition de présenter au même instant physique leurs élongations maxima, de n'avoir, en d'autres termes, aucune différence de phase.

Il n'y aurait pas plus de difficulté à traiter le cas où les deux composantes du mouvement auraient entre elles une différence de phase quelconque.

Supposons, en effet, que la composante horizontale, celle qui est dirigée suivant l'axe des x, soit en avance sur l'autre d'une fraction r du temps de son oscillation double. Alors à la valeur A' de Y correspondra une valeur X_1 de x égale à

$$A \cos 2\pi r = X_1$$

et la distance du pied de l'ordonnée au point A sera

$$A(1 - \cos 2\pi r) = A - X_1$$

Les ordonnées des points suivants étant respectivement données par la formule :

$$A' \cos \frac{2\pi}{p} kn'$$

Les abscisses auraient pour valeurs correspondantes :

$$A \cos 2\pi\left(r + \frac{kn}{p}\right)$$

k étant un nombre entier quelconque, et la distance du pied de l'abscisse au point A serait :

$$A\left[1 - \cos 2\pi\left(r + \frac{kn}{p}\right)\right]$$

En d'autres termes, si à partir du point de l'axe AA' dont l'abscisse est X_1 on compte kn divisions de cet axe et qu'à partir

du point B, on en compte kn' sur l'axe des Y, les distances du point O à ceux que l'on aurait déterminés par cette règle seront les coordonnées d'un autre point quelconque de la courbe cherchée.

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de deux mouvements ayant même amplitude d'excursion. Dans ce cas, $A = A'$, et les deux circonférences se confondent en une seule. Divisons-

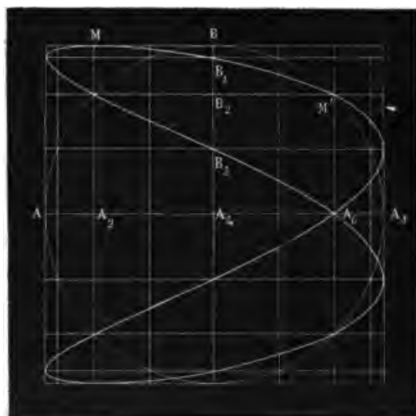


Fig. 484.

la en seize parties égales, et plaçons-la de manière qu'un des diamètres passant par deux points de division opposés soit vertical (fig. 484).

En menant par les autres points de division les cordes parallèles et perpendiculaires à ce diamètre, on aura le tracé représenté par la figure.

Veut-on alors avoir la courbe représentative d'un accord d'octave, dans lequel le son le plus aigu serait en avance sur l'autre d'un temps égal au huitième de son oscillation complète? Les coordonnées du premier point de la courbe seront:

$$y = A = A_2M \qquad \text{et} \qquad x = A_2A_4$$

le second aurait pour coordonnées :

$$y = A_4B_1 \qquad x = 0$$

et se trouverait en B_1, et ainsi de suite.

Pour pouvoir en réalité, construire commodément *par points* une figure acoustique quelconque, mais répondant toutefois au cas où $A = A'$, on trace sur une planche de cuivre le canevas de la fig. 482, et on la perce de trous très-fins aux différents points d'intersection des parallèles aux axes.

Alors, en posant la planche sur un papier, on peut, à l'aide d'une pointe que l'on passe dans les trous, *piquer* successivement les points M, B_1, MM_1 de la courbe.

§ 5. — OSCILLATIONS DES FIGURES ACOUSTIQUES. AJUSTEMENT DU DIAPASON.

Les figures acoustiques, qui répondent à des accords simples, nous semblent continues, parce que la trajectoire décrite sur le tableau par l'extrémité du rayon lumineux peut se fermer dans un temps inférieur à la durée de la sensation.

Cette durée paraissant ne pas être inférieure à $\frac{1}{15}$ de seconde, il est évident que tout accord acoustique dont la courbe représentative exige pour se fermer un temps supérieur à $\frac{1}{15}$ de seconde ne pourra pas donner lieu à une figure complète. Si l'on essaie de la produire, on obtiendra un tracé interrompu par une sorte d'ombre, qui en parcourra toute l'étendue en une série d'oscillations rapides.

Tel est, en effet, le résultat que l'on observe en général; mais ce résultat se modifie, lorsque l'accord considéré diffère très-peu d'un rapport simple. Le tracé éprouve alors une série de variations périodiques, et dans leur succession rapide, les apparences qu'il présente sont celles que prendrait l'accord simple voisin, par l'effet d'un changement continu de phase dans l'une des vibrations élémentaires. Soit en effet $\frac{n'}{n}$ l'expression de cet accord simple, et $\frac{n' - \frac{1}{\alpha}}{n}$ le rapport des sons des deux corps vibrants; α étant un nombre considérable et que l'on peut supposer entier. Le rapport des nombres de vibrations exécutées dans le même temps par les deux sons est alors $\frac{n'\alpha - 1}{n\alpha}$; et, par suite, si l'on se reporte à la règle géométrique à l'aide de laquelle on construit sur le cylindre la courbe rampante dont la

projection sur le plan XOY donne le tracé lumineux, on voit que l'extrémité du n' ième feston de cette courbe, au lieu de tomber à l'origine des arcs, l'aura dépassé d'un angle égal à $n'\frac{2\pi n\alpha}{n'\alpha-1}-2\pi n$; la différence est $\frac{2\pi n}{n'\alpha-1}$, ou simplement $\frac{2\pi n}{n'\alpha}$, si on néglige l'unité devant $n'\alpha$ qui est toujours fort grand à cause de la grandeur de α. Cette première partie de la courbe différera très-peu de celle qui aurait répondu à l'accord $\frac{n'}{n}$ dans l'hypothèse où la différence de phase eût été nulle. Soit θ le temps employé à cette première évolution. Dans un intervalle de temps suivant immédiatement le premier, et comme lui égal à θ, la courbe décrite, différera également très-peu de celle qu'eût fourni le rapport simple, mais avec une très-légère différence de phase dans le mouvement de la coordonnée verticale. Les choses se continuant de la même manière, on voit que, pendant une série d'intervalles de temps successifs tous égaux à θ, les apparences lumineuses qui se succéderont seront en effet à très-peu près identiques à celles qu'eût fournies le rapport simple avec une différence de phase progressive. On ne verra à la fois qu'un petit nombre de ces tracés élémentaires, mais on les verra tous les uns après les autres, et par conséquent enfin, les apparences générales seront bien celles que nous avons définies.

Le mouvement qui en résultera dans la figure sera évidemment d'autant plus lent que α sera plus grand, et l'on pourra, par l'observation de ce mouvement, arriver à juger de la distance à laquelle on se trouve de l'accord simple $\frac{n'}{n}$ dont s'approche celui des deux corps sonores employés.

En effet, dans le mouvement progressif de la courbe lumineuse, il arrivera périodiquement que les festons antérieurs se projetteront sur ceux qui sont tracés sur la portion postérieure du cylindre, la figure alors se simplifiera pendant un instant pour reprendre ensuite les apparences plus compliquées qu'elle avait offertes d'abord. Par suite de ces variations périodiques, elle semblera animée d'une sorte de mouvement oscillatoire, et l'on pourra déterminer, combien de fois elle passe par sa forme la plus simple pendant une unité de temps; en d'autres termes, mesurer le temps qui s'écoule entre deux coïncidences successives. Soit t ce temps.

La courbe de l'accord $\frac{n'}{n}$ présenterait sur la surface du cylin-

dre n' sommets distincts et équidistants; par conséquent, l'arc compris entre deux consécutifs d'entre eux sera $\frac{2\pi}{n'}$. Comme, dans la rotation de la figure, les sommets antérieurs et postérieurs qui vont coïncider marchent au-devant l'un de l'autre, le temps t qui sépare deux coïncidences, est celui qui répond à une rotation du cylindre égale à $\frac{2\pi}{2n'}$.

Dans l'unité de temps, c'est-à-dire dans le temps de n vibrations de la projection horizontale, il aurait tourné d'une fraction x de tour donnée par la proportion

$$\frac{2\pi}{2n'} : t :: x : 1 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2\pi}{2n't}$$

Mais, comme nous l'avons vu, au bout de l'unité de temps l'extrémité du dernier feston de la courbe rampante a dépassé l'origine d'un arc égal à $\frac{2\pi n}{n'\alpha}$. On peut donc poser l'égalité

$$\frac{2\pi}{2n't} = \frac{2\pi n}{n'\alpha} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 2nt.$$

α étant connu, on en déduit immédiatement les valeurs numériques des nombres de vibrations $n'\alpha - 1$ et $n\alpha$ exécutées dans le même temps par les deux corps sonores, et par suite, la distance qui sépare leur accord musical de l'accord simple $\frac{n'}{n}$.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de deux corps voisins de l'unisson, et dont l'un fasse 435 vibrations doubles à la seconde. La courbe sera une ellipse oscillante; supposons qu'elle mette 20 secondes à faire sa demi-oscillation complète. Ici, l'unité de temps est $\frac{1''}{435}$; $n = 1$; $nt = 8700$; $\alpha = 17400$. Ainsi, l'un des deux corps exécute 17400 vibrations doubles, tandis que l'autre en fait 17399.

Or, un renversement qui s'accomplit dans la figure en une période de 20 secondes s'observe aisément, et l'on voit dès lors avec quelle précision M. Lissajous peut juger de l'exactitude d'un diapason qu'il compare à un diapason normal réglé une fois pour toutes.

S'il s'agit en général d'accorder un corps sonore quelconque B avec un diapason A (fig. 485), on fixe celui-ci à un support solide, de façon qu'il puisse vibrer dans un plan horizontal. L'une

des branches de A porte une lentille objective *a*, dont le plan est parallèle à celui des branches, l'autre est munie d'un contre-poids qui rétablit la symétrie et met l'appareil dans de bonnes conditions pour vibrer. Au-dessus de la lentille *a*, on fixe à un support un oculaire C disposé de telle sorte que l'ensemble constitue un véritable microscope, à l'aide duquel on peut observer avec netteté un point lumineux *d* placé au-dessous de *a* à une distance convenable.

Le point *d* étant immobile, si l'on vient à faire vibrer le diapason, l'image vue à travers l'oculaire se transformera en une ligne lumineuse, parallèle à la vibration.



Fig. 485.

Mais si *d* est lui-même en mouvement, et décrit pour une droite horizontale perpendiculaire à la direction du mouvement de la lentille, l'œil placé à l'oculaire apercevra un tracé de l'espèce de ceux dont nous avons étudié la génération, et

dont la forme dépendra du rapport existant entre les nombres de vibrations exécutées dans le même temps par les deux mouvements rectangulaires. D'après cela, pour reconnaître si un diapason B est rigoureusement à l'unisson, à l'octave, à la quarte, etc., de l'étalon A, on tracera au diamant un point très-fin sur le sommet de l'une des branches de B, et l'on observera ce point à travers le microscope à objectif mobile, après avoir ébranlé rectangulairement les deux diapasons A et B. Si la figure est fixe, l'ajustement est rigoureux; et, si elle oscille, la rapidité plus ou moins grande de son mouvement conduira à l'appréciation exacte de la différence qui existe entre le rapport réel des sons et celui qu'on voulait obtenir.

Nous terminerons ce chapitre par une remarque importante. Il ne faudrait pas confondre avec les oscillations ou évolutions complètes, dont nous parlons ici, les effets qui peuvent provenir d'une variation inégalement rapide dans les amplitudes de vibration des deux diapasons.

Ces nouvelles variations se traduisent en un simple changement du rayon du cylindre sur lequel s'enroule la courbe du point fictif P (p. 137), et, par conséquent, elles n'amènent jamais d'évolution complète dans la figure.

Nous devons à l'obligeance de M. Lissajous presque toutes les figures *de courbes acoustiques* que nous avons données en ce chapitre; elles ont été dessinées à l'aide d'une machine extrêmement curieuse et qui permet d'obtenir, de la façon la plus rapide et la plus sûre, les tracés caractérisques de toutes les combinaisons possibles des mouvements vibratoires. Nous regrettons que les limites de cet ouvrage ne nous permettent pas d'en donner la description.

LIVRE VII

OPTIQUE

DIVISION.

Le livre consacré à l'étude de l'optique sera divisé en deux parties.

Dans la première, on s'attachera à établir expérimentalement les lois des phénomènes principaux, indépendamment de toute discussion sur l'explication mécanique que l'on en peut donner.

Dans la seconde, on exposera les faits qui ont conduit à admettre que les phénomènes lumineux sont le résultat de mouvements vibratoires excités et transmis dans un fluide impondérable éminemment élastique et répandu dans tout l'espace.

CHAPITRE PREMIER

PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIÈRE.

Ombres. — Dans un milieu homogène la lumière se propage en ligne droite ; car, lorsqu'on place un écran opaque entre l'œil et un point lumineux, on cesse d'apercevoir ce dernier.

De ce principe, on déduit aisément la théorie géométrique des *ombres* et des *pénombres*.

L'énoncé général du problème dont cette théorie s'occupe est le suivant :

On assigne les formes, les grandeurs et les positions relatives d'un corps lumineux et d'un corps opaque, et l'on demande de déterminer :

1° La portion de l'espace dans laquelle il ne pénétrera aucun rayon lumineux, c'est-à-dire l'ombre pure ;

2° La portion de l'espace dans laquelle l'accès des rayons lu-

mineux n'est en aucune sorte modifié par l'existence du corps opaque, c'est-à-dire la lumière pure;

3° La pénombre, c'est-à-dire la portion de l'espace où il arrive de la lumière, mais en proportion moins forte que si le corps opaque n'existait point.

4° On demande enfin de tracer sur le corps opaque la figure de séparation d'ombre et de pénombre, de pénombre et de lumière pure.

Pour faire comprendre la marche que l'on peut suivre dans la solution de cette question, on examinera le cas particulier où le corps lumineux et le corps opaque sont tous deux sphériques. Il suffira évidemment alors de chercher ce qui se passe dans un plan passant par les centres C et C' de chacune des deux sphères. (fig. 486).

Prenons le plan coupant pour celui de la figure, et menons aux

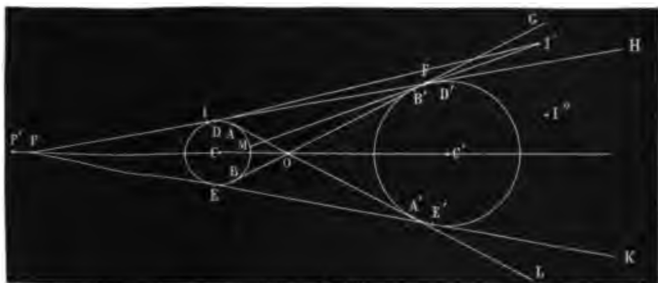


Fig. 486.

cercles de section les tangentes intérieures communes AA', BB', et les tangentes extérieures DD', EE'.

Il est évident que, si l'on considère un point I'' situé derrière le corps opaque entre DD' et EE', il n'y arrivera aucun rayon de lumière. I'' sera donc dans l'ombre pure, et les limites de cette ombre seront DD'H et EE'K. Le point I', situé dans l'angle GB'H, recevra de la lumière de toute la portion du cercle éclairant compris entre les tangentes menées du point I' aux cercles C et C'.

Si I' se meut en restant à distance constante de C, l'arc éclairant varie de grandeur. Il diminue jusqu'à zéro quand I' s'abaisse jusqu'à DD'H, et devient, au contraire, aussi grand que si le corps opaque n'existait pas, quand I' arrive sur la ligne BB'G.

Ainsi, entre D'H et B'G on a une pénombre d'intensité décroissante et qui devient lumière pure à la limite B'G.

Sur le corps opaque, les limites de l'ombre pure et de la lumière pure sont les cercles menés perpendiculairement à l'axe CC' par les lignes D'E' et A'B'; de D' en B' on aura une pénombre. En effet, si d'un point quelconque de cet arc on mène les tangentes au cercle éclairant, l'une sera interceptée par le corps opaque; et d'autre part, si du même point l'on mène deux lignes tangentes, l'une au cercle éclairant et l'autre au cercle de section du corps opaque, on voit aisément que l'arc éclairant qu'elles intercepteront ira en décroissant jusqu'à zéro, quand leur point de concours se rapprochera de D'.

Quand le corps opaque est plus grand que le corps éclairant, l'ombre et la pénombre sont indéfinies.

Si le corps éclairant se réduit à un point, la pénombre devient nulle; le passage de l'ombre à la lumière est alors tout à fait brusque et tranché.

On réalise ce cas du corps éclairant réduit à un point lorsqu'on emploie comme source lumineuse l'arc brillant qui se développe entre les pointes très-voisines de deux cônes de charbon mis en communication avec les pôles d'une forte pile.

On le réalise encore lorsque l'on éclaire les objets avec la lumière qui diverge du foyer d'une forte lentille tournée vers le soleil.

Dans les deux cas, les silhouettes des objets se dessinent avec une netteté remarquable.

Si, au contraire, le corps éclairant est plus grand que le corps opaque, l'ombre pure n'existe que dans l'intérieur du cône représenté sur la figure par l'espace angulaire DPE, et se termine en P. Il est évident, en effet, que si d'un point même situé sur l'axe *c'c*, et tel que P', on mène des tangentes au corps lumineux, elles ne seront pas arrêtées par le corps opaque.

La pénombre sera toujours indéfinie, et diminuera d'intensité à mesure qu'on s'éloignera des corps opaques.

Images dans la chambre obscure. — Le principe de la propagation rectiligne de la lumière donne encore l'explication des phénomènes que l'on observe lorsque des rayons émanés d'objets lumineux par eux-mêmes ou seulement fortement éclairés pénètrent par une ouverture étroite dans une chambre bien obscure et y sont reçus sur un écran blanc.

On sait que, dans ces circonstances, on voit se peindre sur l'écran les images de ces objets. Ces images sont toujours ren-

versées et toujours un peu vagues. Pourtant elles peuvent acquérir un certain degré de précision quand l'ouverture est très-étroite et l'écran perpendiculaire à la ligne menée de son centre à la partie moyenne de l'objet lumineux.

On explique leur formation de la manière suivante :

Soit AB l'objet lumineux, et O l'ouverture du volet supposée aussi petite que possible (fig. 487).

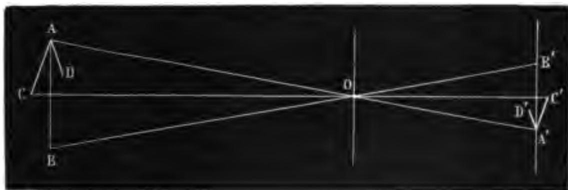


Fig. 487.

Les rayons qui, partis des différents points A,B,C,D, pénètrent dans la chambre noire, viennent former en A',B',C',D', sur un écran de petites taches lumineuses ayant chacune la teinte des points correspondants de l'objet, et à peu près la forme de l'ouverture. Quand cette dernière est excessivement petite, ces taches se réduisent à des points lumineux distincts, ayant chacun leur couleur et leur intensité particulière, et la succession de tous ces points forme évidemment l'image renversée de l'objet AB. Quand l'ouverture grandit, il en est de même des taches lumineuses : chacune alors se superpose plus ou moins complétement sur les voisines, et les contours perdent en netteté. Ils disparaissent complétement et se noient dans une clarté uniforme, lorsque l'orifice d'entrée est un peu considérable.

Les effets que nous venons d'expliquer se présentent très-fréquemment. Aussi, lorsque l'on tient clos les volets d'une chambre, si les rayons solaires directs tombent sur quelqu'un des trous qui y existent toujours, le faisceau introduit vient faire sur le parquet une image elliptique du disque solaire. Cette image serait ronde si on la recevait sur un écran perpendiculaire à la direction du rayon introduit. L'image solaire a la forme d'un croissant lors des éclipses partielles.

Des images analogues et toujours en forme de croissant, peuvent encore s'observer lorsque les ouvertures des volets sont éclairées par la lune au moment des quadratures.

On pourrait multiplier les exemples, mais ce que nous venons de dire est suffisant pour montrer comment, dans chaque cas possible, on peut se rendre compte des phénomènes observés.

CHAPITRE II

RÉFLEXION.

Lorsqu'un faisceau lumineux tombe sur la surface d'un corps poli, il se réfléchit en proportion plus ou moins considérable sous forme d'un nouveau faisceau dont la direction est tout à fait différente de celle du premier. Le phénomène s'observe très-nettement quand on reçoit dans la chambre noire un rayon solaire sur un miroir de glace ou de métal. Alors, en effet, pour peu qu'il y ait quelque poussière en suspension dans l'air, il est aisé de suivre de l'œil le rayon avant son incidence et après sa réflexion, et l'on s'assure qu'on peut le renvoyer à volonté dans toutes les directions possibles en faisant varier convenablement la position du miroir par rapport au faisceau incident.

§ 1. — LOIS DE LA RÉFLEXION. — MIROIRS PLANS.

Lois de la réflexion. — Les lois de la réflexion sont relatives, les unes à la direction des rayons réfléchis, les autres à leur intensité.

Dans ce chapitre, nous nous occuperons surtout des premières, et nous considérerons d'abord la réflexion sur les surfaces réfléchissantes planes.

On appelle plan d'incidence celui qui passe par le rayon incident et la droite menée perpendiculairement au miroir par le point d'incidence.

On appelle angles d'incidence et de réflexion ceux que forment avec la normale au point d'incidence : 1° le rayon incident ; 2° le rayon réfléchi.

Ainsi, sur la figure 488, AB représente un miroir plan, EC un rayon lumineux incident, CF le rayon réfléchi, CD une per-

pendiculaire au miroir menée par le point d'incidence. C, DCE l'angle d'incidence et DCF l'angle de réflexion.

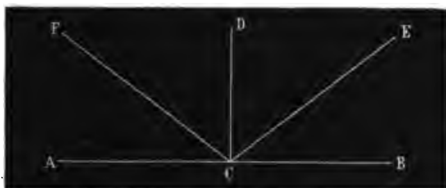


Fig. 488.

Ces définitions posées, il n'y a aucune difficulté à comprendre le sens de la loi fondamentale de la réflexion lumineuse, que l'on énonce ordinairement de la manière suivante :

1° Le rayon réfléchi est contenu tout entier dans le plan d'incidence;

2° Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux entre eux.

On peut démontrer expérimentalement cette loi de la manière suivante :

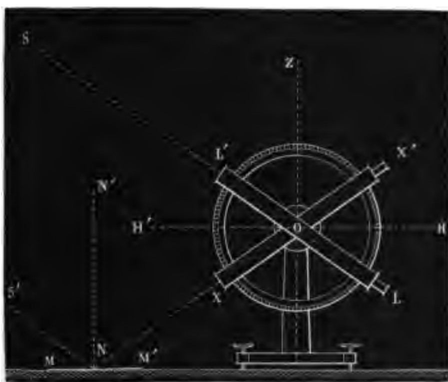


Fig. 489.

On fixe dans une position bien verticale un cercle gradué, autour du centre duquel se meut une lunette LL' (fig. 489); à quelque distance en avant de ce cercle et dans un plan notablement plus bas que celui qui passe par son centre, on dispose un bain de

mercure dont la surface, soigneusement préservée de toute agitation, forme un miroir parfaitement horizontal. On pointe alors la lunette LL′ sur un astre connu placé dans le vertical qu'elle décrit. On lit l'angle L′OH et l'on abaisse rapidement la lunette dans une position XX′ symétrique de la première par rapport à l'horizontale HH′, et alors on voit l'astre par réflexion à la surface du mercure.

De là résulte la vérification de la loi énoncée.

En effet, le plan que décrit la lunette contient le rayon réfléchi tout entier et l'astre. Il contient donc le rayon incident. De plus, comme il est vertical, il contient la perpendiculaire NN′ menée par le point d'incidence N au miroir horizontal MM′.

La première partie de la loi est donc ainsi démontrée. Quant à l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, elle résulte de ce que les angles SOH′, H′ON sont trouvés expérimentalement égaux.

En effet, SOH′ = S′NM,
H′ON = ONM′;
Donc S′NM = ONM′

Mais S′NM et ONM′ sont les compléments des angles d'incidence et de réflexion : leur égalité entraîne donc l'égalité de ces derniers.

Quand on emploie le théodolite pour faire cette expérience, on rend d'abord la colonne verticale, en manœuvrant convenablement les vis du pied, et en se servant du niveau comme on l'a indiqué au premier volume de ce traité.

Puis on vérifie que l'axe de la lunette décrit bien un plan vertical, en s'assurant si le point de croisement des fils peut suivre dans toute sa longueur un long fil à plomb placé à une certaine distance.

Enfin, il s'agit de déterminer quel est en réalité le diamètre du cercle qui est vertical. Pour cela on peut opérer de la manière suivante : on vise l'étoile qui doit servir de mire dans l'expérience de réflexion ; on observe la position des verniers, puis on tourne le limbe de 180° en faisant pivoter la colonne, et l'on ramène la lunette sur l'étoile : l'angle qu'elle a décrit doit avoir pour bissectrice le diamètre cherché. Il est bon pour faire cette expérience d'employer la Polaire à cause de la lenteur de son mouvement.

On emploie souvent dans les cours, pour démontrer expérimentalement les lois de la réflexion de la lumière, des appareils qui se rapprochent beaucoup de celui que nous venons de décrire.

Celui de M. Silbermann est représenté figure 490.

NN' colonne métallique fixée normalement à un trépied P porté sur trois vis qui permettent de le rendre horizontal.

CBL cercle divisé fixé à la colonne NN' et parallèle à l'axe de cette dernière.

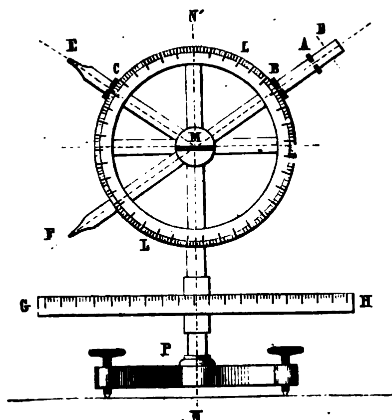


Fig. 490.

EM,FM alidades mobiles autour du centre du cercle et portant des diaphragmes B,C. Ces diaphragmes sont perpendiculaires aux alidades qui les portent, et percés en leurs milieux de trous égaux.

En A est un petit miroir à mouvements rectangulaires et porté par l'alidade FM.

Quand on veut se servir de cet appareil, on rend le plan du limbe et le diamètre NN' bien verticaux, puis on fixe au centre du cercle un miroir plan M, de manière que sa surface soit exactement horizontale, et l'on fait tomber un faisceau de lumière étroit sur le petit miroir A. Grâce au double mouvement de ce dernier, on renvoie la lumière qui tombe sur lui vers le diaphragme B, et l'on peut faire en sorte que le faisceau transmis à travers l'ouverture étroite de ce diaphragme vienne, tout en restant parallèle au plan du limbe divisé, tomber au milieu du miroir M.

Le faisceau BM se réfléchit alors, en restant dans le plan d'incidence; car on peut toujours donner à l'alidade ME une direction telle qu'après la réflexion le rayon passe par l'orifice du second diaphragme C : or, par la disposition même de l'appareil, le

centre de cet orifice est dans le plan vertical BMN qui contient le rayon incident ABM.

De plus, au moment où le rayon réfléchi traverse juste le milieu du second diaphragme, on peut constater que les angles compris entre les alidades et le diamètre vertical NN' sont égaux entre eux.

On peut encore vérifier très-commodément l'exactitude de la loi de la réflexion à l'aide d'un appareil construit par M. Dubosq (fig. 491).

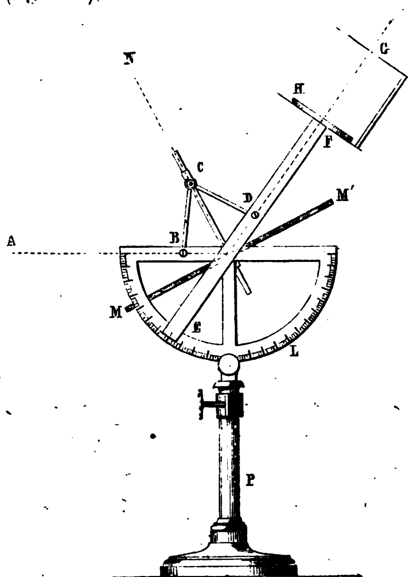


Fig. 491.

L est un demi-cercle dont le plan peut être rendu vertical et dont le diamètre AB peut être fixé dans une position quelconque.

MM' est un grand miroir mobile autour d'un axe perpendiculaire au plan du demi-cercle et passant par son centre.

La règle CN perpendiculaire au miroir y est solidement attachée et se meut avec lui.

Le long de cette règle glisse une bague C qui, par le moyen de deux tiges articulées CB et CD se relie d'une part avec le dia-

mètre AB, et d'autre part avec une seconde règle EFG, mobile aussi, autour du centre du cercle L.

Les distances du centre aux points d'articulations B et D sont égales.

Il en est de même des longueurs des tiges CB et CD.

De cet ensemble de dispositions il résulte que, si l'on fait mouvoir la tige EF, elle entraînera le miroir, mais toujours sous cette condition que les angles compris entre la tige CN et les tiges CB et CD soient égaux et contenus dans un même plan. Il en est forcément de même de ceux que MM' forme avec AB et EF. Et par suite, tout rayon incident qui tombera sur le miroir parallèlement au diamètre AB se réfléchira suivant la direction de la règle EG. Un écran G, porté à l'extrémité de cette règle, reçoit le rayon et le rend visible par diffusion.

§ 2. — MIROIRS PLANS.

Un miroir plan nous fait voir les objets dans une position symétrique de celle qu'ils occupent par rapport à sa surface.

Pour le montrer nous prouverons d'abord que si des rayons, émanés d'un point lumineux A, se réfléchissent sur un miroir plan MM', ils semblent, après leur réflexion, émaner d'un point A' symétrique de A par rapport à MM' (fig. 492).

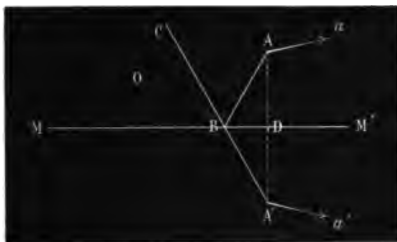


Fig. 492.

En effet, soit BC un de ces rayons réfléchis : prolongeons-le ; il rencontrera quelque part en A' la perpendiculaire AD abaissée du point A sur le miroir, car elle est tout entière dans le plan ABC.

Les deux triangles ABD, BDA', sont égaux : ils sont rectangles, ils ont le côté BD commun, et enfin les angles ABD, DBA', sont égaux, car 1° DBA' = CBM, et 2° CBM et ABD sont les compléments

des angles d'incidence et de réflexion : donc DA' = DA; donc le point A' est symétrique de A par rapport au miroir MM'.

Maintenant, lorsque l'œil reçoit un faisceau lumineux divergeant d'un point, on voit ce point à l'endroit même d'où les rayons divergent. D'après cela, un œil placé quelque part en O au-dessus du miroir et recevant des rayons réfléchis qui sembleront diverger de A' verra en A' l'image du point lumineux A.



Fig. 493.

Ce que nous venons de dire d'un point unique pouvant se répéter de tous ceux d'un objet, il est démontré que l'on doit voir dans les miroirs plans les images des objets placés en avant de ces miroirs, et les voir dans une position symétrique de leur position véritable.

Cette symétrie de position des images par rapport aux objets est complétement vérifiée par l'expérience. Pour ne citer qu'un exemple, lorsqu'un objet vertical VM (fig. 493), est placé devant un miroir MM' incliné à 45° à l'horizon, l'image de l'objet est vue horizontale dans le miroir; ou, plus généralement, lorsqu'une droite lumineuse rencontre un miroir plan, et s'y réfléchit, on voit très-bien que l'angle compris entre elle et son image a pour bissectrice la trace du plan de cet angle sur le miroir.

Réflexions multiples qui ont lieu entre deux miroirs plans parallèles ou inclinés entre eux. — Lorsqu'une lumière L est placée entre deux miroirs plans parallèles, elle donne une série indéfinie d'images d'intensités décroissantes et qui toutes sont situées sur la perpendiculaire commune aux deux miroirs menée par le point L (fig. 494).

Pour s'expliquer comment un œil placé en O peut voir toutes ces images, il suffit de remarquer qu'il arrive en même temps en O des rayons ayant subi 1, 2, 3... *n* réflexions, *n* pouvant être aussi grand que l'on veut.

Ainsi des rayons réfléchis une fois sur NN' arrivent en O paraissant diverger du point L' symétrique de L par rapport à NN'.

D'autres réfléchis une première fois sur NN' et ayant par conséquent la même direction que s'ils émanaient de L', se réfléchissent de nouveau sur MM' et semblent alors, quand ils arrivent à l'œil, diverger d'un point A symétrique de L' par rapport à MM'.

Enfin, des rayons réfléchis une première fois sur NN', une

deuxième sur MM', vont éprouver sur NN' une troisième réflexion à la suite de laquelle ils paraissent venir du point A' symétrique de A par rapport à NN'.

En continuant ainsi, on déterminera toutes les images provenant des rayons qui ont subi leur première réflexion sur NN'.

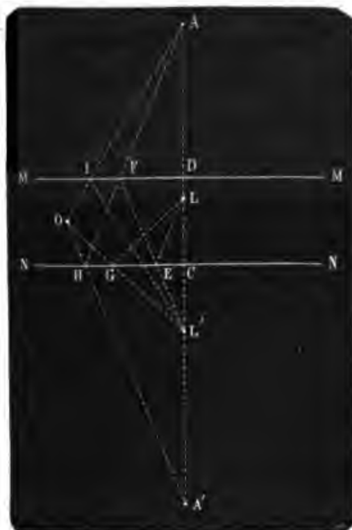


Fig. 494.

Une seconde série est due aux rayons dont la première réflexion se fait sur MM', et l'on voit aisément que, dans l'une et l'autre de ces deux séries, une image quelconque se déduit de la précédente en regardant celle-ci comme un objet lumineux qui envoie directement des rayons au miroir dans lequel se voit l'image dont on veut assigner la position.

Resterait à discuter ce qui arrive quand les deux miroirs ne sont plus parallèles, ou si l'on aime mieux ne font plus entre eux un angle égal à zéro ; nous nous bornerons au cas où les deux miroirs sont perpendiculaires entre eux, comme MM' et MM'', fig. 495 ; un objet lumineux L placé entre eux donne d'abord, par une réflexion unique sur MM' une image L' symétrique de L par rapport à ce miroir, et de même, par une réflexion unique sur MM'', une image L'' symétrique de L par rapport à ce second miroir.

Puis, des rayons réfléchis une première fois sur MM', se réfléchissent une seconde fois sur MM" et semblent alors diverger d'un point symétrique de L' par rapport à MM".

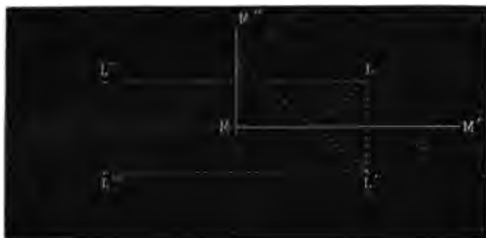


Fig. 495.

De même, des rayons réfléchis une première fois sur MM", après une autre réflexion sur MM', semblent diverger d'un point symétrique de L" par rapport à MM'. Or, d'après la manière même dont nous définissons leur position, il est évident que ces deux points coïncident. Leur position commune est le quatrième sommet L''' du rectangle dont les autres sommets sont L", L et L'.

On voit donc, dans ce cas, trois images placées aux trois angles d'un rectangle dont l'objet lumineux lui-même occupe le quatrième sommet. — Les côtés de ce rectangle sont respectivement perpendiculaires aux deux miroirs, et divisés par eux en parties égales. On voit aussi sur la figure même, qu'aucun rayon ne peut subir entre les deux miroirs plus de deux réflexions successives.

§ 3. — PORTE-LUMIÈRE; HÉLIOSTAT.

Porte-lumière. — Le porte-lumière est un instrument à l'aide duquel on peut maintenir le rayon solaire réfléchi dans une position à peu près constante.

Il se compose d'un miroir MM' fixé à un axe EF (Fig. 496), qui est perpendiculaire à la fois aux deux colonnes parallèles EE et FF; un pignon G permet de faire tourner l'axe EF sur lui-même, et par suite aussi le miroir qui lui est attaché.

De plus, les colonnes EE et FF sont implantées normalement sur un disque à crémaillère RR, auquel un second pignon PL peut également imprimer un mouvement de rotation autour d'un axe OB parallèle aux colonnes.

La normale ON, au centre du miroir, ainsi que l'axe OB sont

toujours contenus dans le plan perpendiculaire à l'axe EF, et passant par le milieu de cet axe. La rotation du disque RR' permet d'amener ce plan à passer par le soleil A, et alors, pour renvoyer en effet la lumière dans la direction de l'axe OB, il suffit de tourner le second pignon G de manière que la normale ON coupe l'angle AOB en deux parties égales.

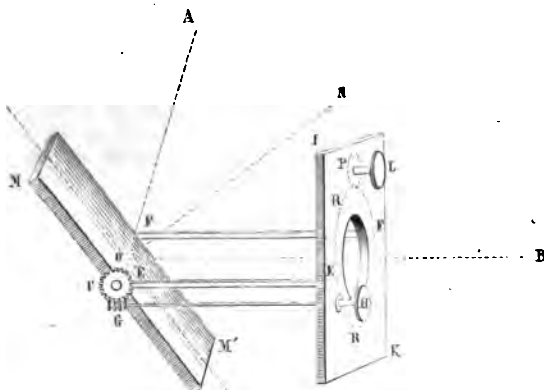


Fig. 496.

Héliostat. — Au lieu de déplacer sans cesse, à la main, le miroir qui reçoit le rayon solaire, il est incomparablement plus avantageux de lui imprimer le mouvement à l'aide d'une horloge convenablement disposée



Fig. 497.

Cette idée a été réalisée par Fahrenheit dans la construction d'un premier héliostat à deux miroirs, dont voici le principe :

Héliostats de Farenheit, de S'Gravesande, de Gambey. —

Dans le courant d'une journée le rayon solaire DO (fig. 497) qui tombe en un point déterminé O, décrit autour de la parallèle EF à l'axe des pôles menée par ce point un cône dont le demi-angle au sommet est égal au complément de la déclinaison de l'astre. D'après cela, il est clair qu'un miroir MM' mobile en tous sens autour du point O réfléchirait constamment suivant EF les rayons incidents, si la normale OA menée à sa surface par le point O faisait toujours avec la droite EOF un angle égal à la moitié du complément de la déclinaison solaire.

Or on peut aisément faire mouvoir une tige solide BB' (fig. 498), de manière qu'elle satisfasse à cette condition. Pour cela, on

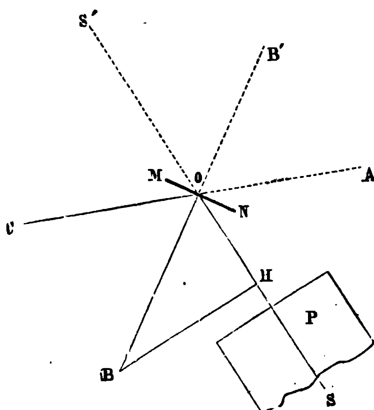


Fig. 498.

prend une horloge P dont l'aiguille accomplisse sa révolution en vingt-quatre heures et dont le cadran porte un axe solide HO perpendiculaire à son plan et passant par son centre. — On dirige le cadran parallèlement, à l'équateur, en ayant soin que l'extrémité S' de l'axe pointe vers le pôle nord, et, à cette extrémité, l'on articule un des bouts de la tige à faire mouvoir, tandis que l'on attache l'autre, B, sur l'aiguille HB du cadran, à une distance du centre telle que l'inclinaison de la tige sur l'axe soit égale à la moitié du complément de la déclinaison solaire. La rotation de l'aiguille imprime alors à la tige le mouvement conique qu'il s'agit en effet d'obtenir.

Lorsque, par un ajustement de cette espèce ou par tout autre

équivalent, on a obtenu un rayon solaire réfléchi fixement suivant l'axe polaire, il suffit de recevoir ce rayon sur un second miroir pour le renvoyer dans une autre direction quelconque.

S'Gravesande, qui était contemporain de Fahrenheit, apporta à l'appareil que nous venons de décrire un changement très-important : il trouva le moyen d'obtenir, à l'aide d'un seul miroir, la fixité du rayon réfléchi, et de cette manière il diminua beaucoup les pertes considérables que les deux réflexions faisaient subir à la lumière. L'héliostat de S'Gravesande a été perfectionné par différents physiciens et notamment par M. Gambey; mais de toutes les dispositions, la plus avantageuse est celle qui a été imaginée par M. Silbermann.

Héliostat de M. Silbermann. — Supposons qu'en un point O de l'axe d'une horloge équatoriale s'articulent deux tiges, dont l'une OC (fig. 499) puisse être fixée dans une position quel-

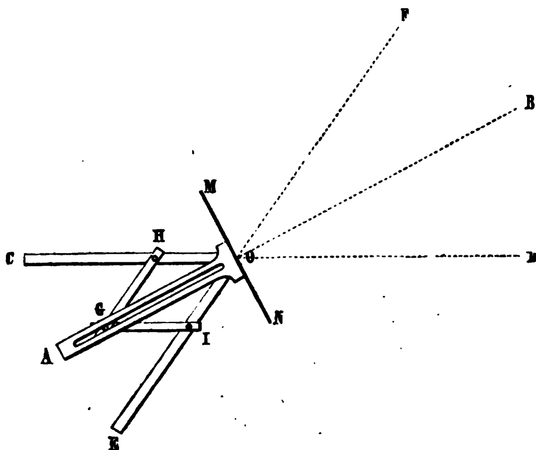


Fig. 499.

conque, et l'autre OE entraînée par le mouvement de l'aiguille de l'horloge, de manière à décrire en 24 heures un cône droit autour de l'axe des pôles OS (fig. 500). Si l'horloge est à l'heure, et si la tige OE a été tournée juste dans la direction du soleil avant d'être fixée à l'aiguille de l'horloge, elle restera toujours orientée vers le centre de cet astre pendant toute la durée d'une révolution.

Cela posé, si l'on conçoit une troisième tige OA (fig. 497), également mobile autour du point O, et guidée dans son mouvement par les deux autres, sous la condition de couper toujours l'angle COE en deux parties égales, il suffira de fixer un miroir plan, normalement à cette troisième tige, pour que tout rayon incident tombant sur le miroir dans la direction mobile FOE soit réfléchi suivant la direction fixe COD.

Pour réaliser l'idée que nous venons d'indiquer, il n'est pas nécessaire de prolonger réellement l'axe de l'horloge jusqu'au point où se rencontrent les directions des droites CO et OE. On dispose l'horloge de manière qu'elle puisse faire tourner régulièrement, et en 24 heures, un axe parallèle à la ligne des pôles et portant à son extrémité une boîte carrée *y*, dans laquelle glisse un arc de cercle EK (fig. 500), ayant son centre O sur l'axe polaire.

A son extrémité E, cet arc porte une douille dans laquelle est maintenue, tout en conservant la liberté de tourner sur elle-même, une tige pointant vers le centre O. En faisant glisser l'arc dans la boîte, on peut donner à cette tige toutes les inclinaisons possibles par rapport à l'axe des pôles, et par suite, la rendre parallèle aux rayons solaires, à un moment donné; et il est clair que si, en ce moment, au moyen d'une vis de pression, on attache à l'axe mobile, la boîte carrée et l'arc qu'elle soutient, la tige suivra le soleil pendant toute la journée.

De plus, l'axe SO (fig. 500) est enveloppé d'une colonne cylindrique creuse, qui peut tourner sur elle-même et être fixée dans une position quelconque, indépendamment de l'axe. Elle porte aussi une boîte carrée dans laquelle glisse un second arc CL, portant à son extrémité C une douille semblable à celle qui est en E, et dans laquelle passe la tige CO qui pointe aussi vers le centre O et peut, d'ailleurs, prendre toutes les positions possibles; on la dirige dans la direction même que doit avoir le rayon réfléchi, et on l'y fixe invariablement.

Que l'on conçoive maintenant CO et EO articulées en O; pendant le mouvement de l'arc EK, l'angle COE s'ouvrira plus ou moins, et son plan se déplacera; donc OE conservera la liberté de son mouvement.

CO et EO ensemble pourront guider toujours une tige OA, de manière à l'obliger à bissecter sans cesse l'angle qu'elles forment, c'est-à-dire à coïncider toujours avec la position de la normale, au miroir qu'il faut faire mouvoir.

Le miroir devrait alors être fixé à l'extrémité même de cette tige.

S'il était un peu pesant, l'appareil n'aurait pas peut-être toute la solidité désirable; mais on peut aussi faire disparaître cet inconvénient.

Pour y arriver, on termine chacune des tiges CO et OE par une fourchette rectangulaire dont les branches soient égales entre elles et parallèles à cette tige. Puis on articule les fourchettes l'une avec l'autre, ainsi qu'on le voit (fig. 498) à l'aide d'un axe O qui, forcément, reste toujours perpendiculaire au plan COE. Enfin on fixe le miroir sur cet axe. Par cette disposition, le paral-

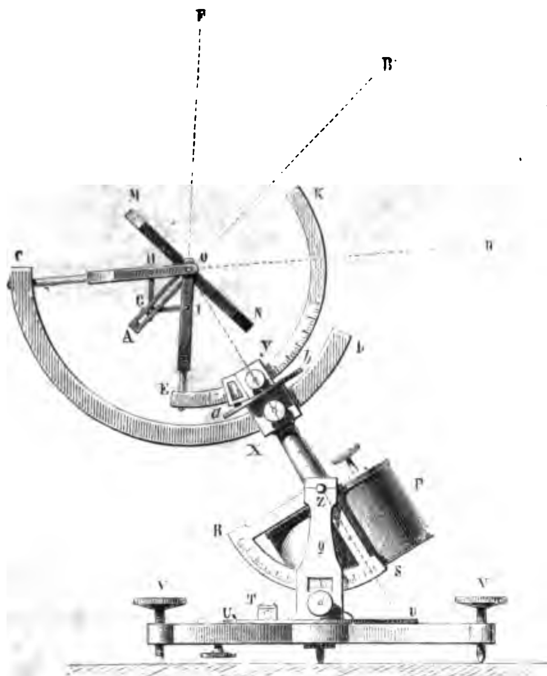


Fig. 500.

lélogramme à l'aide duquel on guide la normale OA, se trouve, il est vrai, déplacé parallèlement à lui-même, mais il n'en resulte aucun inconvénient.

La figure 500 représente l'héliostat de M. Silbermann.

P, horloge équatoriale.

OS, direction de l'axe de l'horloge.

y, boîte carrée supportée par l'axe et tournant avec lui.

KE, arc de cercle pouvant glisser dans la boîte DE et y être fixé à l'aide d'une vis. Il a son centre en un point O du prolongement de l'axe.

EI, fourchette dont la queue pointe vers le centre O.

(La fig. 500 donne le détail des fourchettes.)

X, boîte carrée fixée à la colonne creuse qui recouvre l'axe SO. La colonne est indépendante de l'axe. Elle peut tourner et être fixée dans une position quelconque par une vis de pression.

CL, arc de cercle glissant dans la boîte X, et ayant son centre en O.

CH, fourchette portée par l'arc CL et ayant sa queue dirigée vers le point O.

MN, miroir.

OA, tige normale au miroir.

HGIO, parallélogramme articulé dirigeant le miroir.

RS, arc de cercle dont le zéro coïncide avec le zéro du vernier Q quand l'axe OZS est vertical.

Pour mettre l'appareil en expérience on dirige l'axe SO suivant la ligne des pôles. Pour cela on incline la boîte P jusqu'à ce que

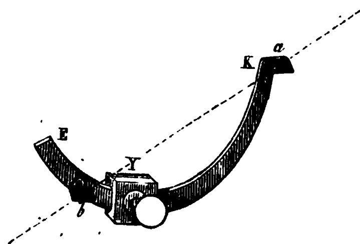


Fig. 501.

l'arc RS marque un angle égal au complétement de a latitude du lieu.

On dirige la queue de fourchette CH suivant la direction que doit avoir le rayon réfléchi.

On dirige la queue de l'autre fourchette suivant une des génératrices du cône que le soleil décrit le jour de l'expérience. Pour cela, on pousse l'arc EK jusqu'à ce que son vernier marque un angle égal à la déclinaison du soleil.

On fixe la boîte à l'axe et on met l'horloge à l'heure.

Quand l'appareil est réglé, un petit trou *a* (fig. 501) percé

dans un écran porté par le cercle de déclinaison laisse passer un rayon qui vient tomber à la croisée des fils du réticule *b*.

Ordinairement, c'est à l'aide de ce simple artifice qu'on met l'instrument en expérience, sans s'occuper de chercher à part ni l'heure ni la déclinaison solaire.

Pour mieux faire comprendre le jeu des fourchettes, supposons que sur la figure purement géométrique 503, AB représente la ligne fixe CO des figures 499, 500, 502, et BC la ligne mobile OE; et concevons qu'au point B on fixe une tige solide EF perpendiculaire au plan ABC. Prolongeons cette tige de quantités égales d'un côté et de l'autre de ce plan, et désignons par E et F ses extrémités. Pendant la rotation de BC et l'évolution du miroir, EF, toujours perpendiculaire à BC, le sera toujours aussi à la ligne fixe BA, et le lieu des positions qu'elle occupera successivement sera le plan mené en B perpendiculairement à BA. De plus elle restera toujours parallèle au plan du miroir, ou plutôt s'y trouvera contenue tout entière.

Fig. 502.

Imaginons maintenant que par les extrémités E et F on mène deux parallèles à BA, et qu'on les prenne de longueurs égales FH et EG, la figure EFHG sera un rectangle qui, pendant le mouvement général, ne fera que pivoter autour de BA.

Menons de même parallèlement à BC les droites EK, FI égales

entre elles, joignons KI, nous obtiendrons un autre rectangle qui, pendant le mouvement, pivotera aussi autour de l'axe BC, et qui de plus s'écartera ou se rapprochera angulairement de BA par suite de l'ouverture variable de l'angle dièdre dont EF est l'arête.

Cela posé, il est évident que si l'on matérialise cette construction en transformant EFHG en une fourchette solide pouvant pivoter autour de l'axe BA; si l'on transforme de même le con-

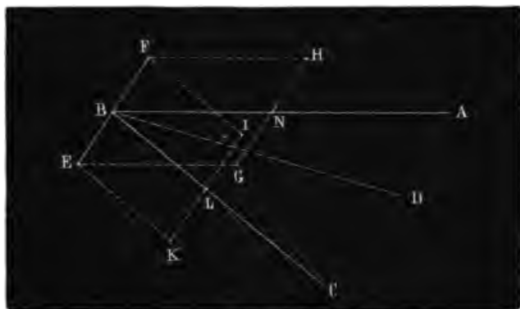


Fig. 503.

tour EFKI en une autre fourchette pivotant autour de BC, on pourra, en attachant en E et F les extrémités des tiges qui s'y joignent, faire complétement abstraction des portions BN et BL de BA et BC, et cela sans cesser d'avoir un axe EF possédant toute la solidité nécessaire pour supporter le miroir, et dont le mouvement possible ne sera autre que celui de la normale mené en B au plan ABC.

§ 4. — RÉFLEXIONS SUR LES SURFACES COURBES.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sur une surface courbe, il s'y réfléchit comme il le ferait sur le plan tangent au point d'incidence; et cela doit être, puisque tout autour du point de contact la surface, dans une étendue suffisamment petite, peut être considérée comme se confondant avec son plan tangent.

Il résulte de ce principe et des propriétés géométriques des surfaces du second ordre, qu'un miroir ayant la forme d'une portion d'ellipsoïde de révolution doit réfléchir en un de ses foyers P' tous les rayons qui partiraient d'un point lumineux P placé à l'autre foyer (fig. 504).

Il en résulte encore que, si le miroir était un paraboloïde de révolution autour de l'axe OR (fig. 505), tous les rayons partis du foyer P seraient renvoyés parallèlement à cet axe; et que,

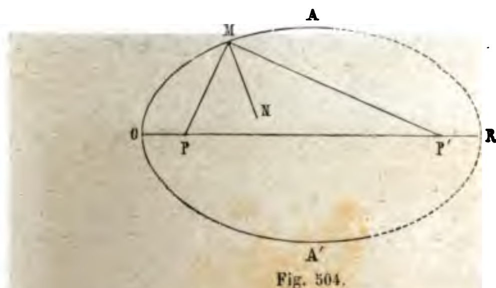


Fig. 504.

réciproquement, un faisceau parallèle à cet axe viendrait converger en P.

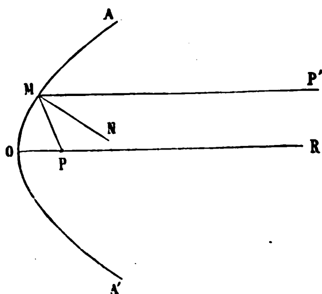


Fig. 505.

Miroirs sphériques concaves. — Les miroirs courbes dont on fait usage en optique sont surtout des miroirs sphériques. Le rayon des sphères, dont ils font partie, est toujours très-grand par rapport au diamètre du petit cercle qui leur sert de base.

Quand cette condition est remplie, il est facile de voir que ces miroirs peuvent être employés dans un grand nombre de cas, pour faire converger en un foyer unique les rayons partis d'un point situé à une distance suffisamment grande de leur surface réfléchissante.

Soit MAM' un miroir de cette espèce (fig. 506) C, le centre, P un point lumineux, et PCD la droite menée par le point lumineux et le

centre. Il se pourrait que PC ne rencontrât pas effectivement le miroir, c'est-à-dire la portion réfléchissante de la surface sphérique MAM' ; mais les raisonnements sont indépendants de cette particularité. Un rayon, qui tombe au point M, se réflé-

Fig. 506.

chit sans sortir du plan MPC et vient couper la ligne PC en un certain point P'. Si l'on démontre que la position du point P' ne dépend pas de la direction du rayon PM, on aura établi par là même que P' est un foyer où convergent tous les rayons partis de P. Or, voici comment on peut établir ce fait important. Posons :

$$MCA = \omega;\quad ACD = \alpha;\quad CP = m;\quad P'C = x \quad \text{et} \quad CM = r.$$

D'après une proposition de géométrie bien connue, on a :

$$PM^2 = r^2 + m^2 + 2\,rm\cos(\alpha + \omega)$$
$$P'M^2 = r^2 + x^2 - 2\,r\,x\cos(\alpha + \omega)$$

Puis, à cause de l'égalité des angles P'MC et CMP,

$$\frac{m}{x} = \frac{PM}{P'M}$$

et par suite

$$\frac{m^2}{x^2} = \frac{PM^2}{P'M^2} = \frac{r^2 + m^2 + 2\,r\,m\cos(\alpha + \omega)}{r^2 + x^2 - 2\,r\,x\cos(\alpha + \omega)}$$

On en déduit

$$r^2(m^2 - x^2) = 2\,r\,m\,x\,(m + x)\cos(\alpha + \omega)$$

d'où

$$r^2(m - x) = 2\,r\,m\,x\cos(\alpha + \omega)$$

$$x = \frac{r\,m}{r + 2\,m \cos(\alpha + \omega)}$$

ou encore

$$x = \frac{r\,m}{r + 2\,m\,(\cos\alpha \cos\omega - \sin\alpha \sin\omega)}$$

Si ω est suffisamment petit, le terme en $\sin\omega$ est négligeable; celui qui renferme $\cos\omega$ se réduit à $2m\cos\alpha$; et l'on a :

$$x = \frac{r\,m}{r + 2\,m \cos\alpha} = \frac{r}{\frac{r}{m} + 2\cos\alpha}$$

x est donc indépendant de ω, c'est-à-dire de tout ce qui particularise le rayon MP; donc tous les rayons partis de P concourent en P'.

Si α est lui-même fort petit, on a simplement :

$$x = \frac{r}{\frac{r}{m} + 2}.$$

Dans cette hypothèse, si m est infini, $x = \frac{r}{2}$, c'est-à-dire que tout faisceau de rayons parallèles à PD vient converger au point de cette ligne qui est situé au milieu du rayon CD. m diminuant, x diminue également. Tous deux deviennent nuls au moment où $m = o$; ce qui est évident *à priori*, puisque tous les rayons partis du centre d'une sphère intérieurement polie reviennent, après la réflexion, converger en ce centre même.

Si le point lumineux passe entre le centre et le miroir, il faut alors, dans l'équation entre m et x que nous venons de discuter, regarder x comme donnée et m comme l'inconnue. Elle devient alors

$$r\,x + 2\,m\,x = r\,m$$

$$m = \frac{r\,x}{r - 2\,x} = \frac{r}{\frac{r}{x} - 2}$$

et montre que m augmente quand x augmente, et devient infini quand $\frac{r}{x} = 2$. Ainsi les rayons émanés du point F sont, après leur réflexion, parallèles à la ligne P'CP (fig. 504).

Si le point lumineux se rapprochait encore du miroir, et

venait en F'' comme l'angle d'incidence serait plus grand que FMC, l'angle de réflexion serait supérieur à ZMC. Les rayons s'inclineraient alors pour venir couper l'axe derrière le miroir, mais la construction sur laquelle nous venons de raisonner devrait être un peu modifiée pour l'appliquer à ce nouveau cas.

Formation des images. — Si en avant du miroir MM' se trouve une série de points lumineux, il faudra redire, des rayons émanés de chacun d'entre eux, tout ce que nous avons établi touchant le faisceau parti de P.

On voit, dès lors, qu'à ces différents points P, P_1, P_2 correspondront des foyers distincts P', P'_1, P'_2. Pour obtenir l'un quelconque d'entre eux, il faudra, par le point lumineux correspondant et le centre du miroir C, mener une droite, et calculer la valeur de x_1 d'après celle de m_1.

L'ensemble de tous ces points formera une image renversée de l'objet lumineux. Pour rattacher aux raisonnements précédents tout ce qui est relatif à la formation des images, nous remarquerons que l'équation $x = \frac{rm}{r + 2m \cos \alpha}$ montre que x ne change pas lorsque m et $\cos \alpha$ varient de telle sorte que leur produit reste constant; en d'autres termes, si l'on considère une série de points lumineux situés sur la perpendiculaire abaissée du point P sur la ligne AB, tous auront leurs foyers conjugués sur la perpendiculaire P'Q' abaissée de P' sur AB, ou, si l'on aime mieux, les rayons partis d'un objet lumineux placé en PQ formeront, après leur réflexion sur ce miroir, l'image de cet objet en P'Q'.

L'image sera renversée par rapport à l'objet, et comme les triangles PCQ, CQ'P' sont semblables, sa grandeur sera à celle de l'objet, comme x est à m, c'est-à-dire, comme r est à $2m \cos \alpha + r$, puisque l'on a $x = \frac{rm}{r + 2m \cos \alpha}$.

Dans le cas où α serait lui-même petit et c'est ordinairement ce qui arrive, le rapport de la grandeur I de l'image à la grandeur O de l'objet serait donné par la relation

$$\frac{I}{O} = \frac{r}{2m + r}$$

Si m est très-grand, $\frac{I}{O}$ est fort petit; l'image reste moindre que l'objet tant que m est plus grand que zéro, si m est nul, $I = O$, c'est-à-dire que la grandeur de l'image devient égale à celle de l'objet.

Si l'objet passe entre le centre et le miroir, s'il vient prendre la position P′ Q′ que nous avions trouvée à l'image dans la discussion précédente, son image ira, par suite de la réciprocité de marche des rayons, se former en PQ; elle sera donc plus grande que l'objet et ira croissant tant que la distance de l'objet au centre ne sera pas égale à $\frac{r}{2}$. A ce moment, l'image se formerait à l'infini, ou plutôt il n'y en aurait plus.

La fig. 507 montre la manière dont s'entre-croisent aux différents points de l'image les rayons partis des points correspondants de l'objet, et elle montre aussi que, pour voir cette image, il suffit de placer l'œil en un point de l'espace où il arrive à la fois quelques-uns des rayons venus des cônes extrêmes dont les sommets sont en A′ et B′.

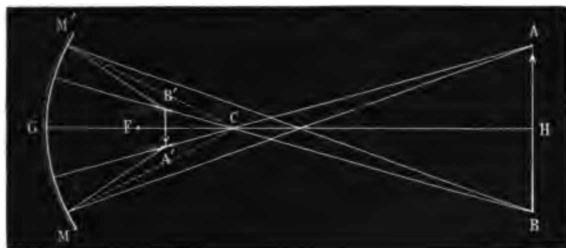


Fig. 507.

Lorsqu'on est ainsi placé, on voit l'image flotter dans l'espace en avant du miroir; mais le plus souvent on regarde l'image par diffusion en la recevant sur un écran translucide placé en A′B′.

Dans les expériences de cours, on prend ordinairement pour objet lumineux une bougie ou une lampe; mais il faut bien faire attention, lorsqu'on veut obtenir un bon résultat, de rejeter les miroirs étamés à leur surface postérieure. Ces miroirs, à cause des réflexions qui s'opèrent à leurs deux surfaces, donnent des mages multiples, qui se superposent mal. On doit employer des miroirs métalliques ou des miroirs de verre argentés à leur surface antérieure, par le procédé que M. Foucault applique à la fabrication des grands objectifs de télescope.

Enfin, il convient de disposer l'expérience de manière que l'objet, dont on veut reproduire l'image, soit à peu près perpendiculaire à l'axe principal du miroir.

Transformation de la formule des miroirs. — L'équation approchée $x = \frac{rm}{r + 2m}$, de laquelle nous avons déduit toute la théorie précédente, se met souvent sous une forme différente.

Appelons p la distance PD du point lumineux au miroir, et p' la distance P'D, on aura

$$m = p - r \qquad x = r - p'$$

d'où

$$r - p' = \frac{rp - r^2}{r + 2p - 2r}$$

ou

$$r^2 + 2pr - 2r^2 - p'r - 2pp' + 2rp' = rp - r^2$$

ou enfin

$$pr + rp' = 2pp'$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r}$$

ou en posant $r = 2a$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a} \qquad (1)$$

a est la distance focale principale du miroir, c'est-à-dire la distance du miroir au point de concours des rayons parallèles.

Calcul abrégé de la formule des miroirs. Foyers virtuels. — On peut établir directement cette relation entre p et p'; seulement, quand on veut se rendre compte des différentes approximations que l'on admet dans cette marche plus rapide en apparence, on est obligé d'en revenir aux calculs précédents ou à d'autres équivalents.

Néanmoins, comme il est bon de pouvoir retrouver très-rapidement les formules des miroirs, nous étudierons, par les considérations plus simples dont nous parlons, la manière dont les miroirs concaves agissent sur les rayons qui divergent d'un point moins éloigné de leur surface que le foyer principal.

Soit (fig. 508) P le point lumineux, APO la droite qui le joint au centre de la sphère et supposons $PA < \frac{R}{2}$. Alors le rayon qui tombe en M ne vient pas après sa réflexion rencontrer la ligne AO du côté de la concavité du miroir; mais son prolongement la rencontre de l'autre côté au point P'.

D'après la loi de la réflexion, la normale OC coupe en deux parties égales l'angle formé par le rayon incident en C et le rayon

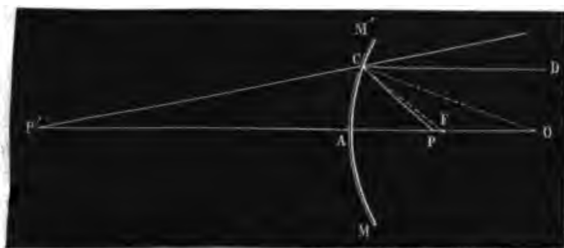


Fig. 508.

réfléchi correspondant. Donc, d'après une proposition connue de géométrie, on a la proportion :

$$\frac{P'O}{PO} = \frac{P'C}{PC}$$

Or, dans les conditions ordinaires, on suppose, et l'on peut réellement le faire, que PA et PC d'une part, P'C et P'A, d'autre part, ne diffèrent pas d'une quantité sensible. Dès lors, si l'on pose toujours $P'A = p'$, $PA = p$, la proportion précédente devient

$$\frac{p' + r}{r - p} = \frac{p'}{p}$$

$$p\,p' + r\,p = r\,p' - p\,p'$$

$$2\,p\,p' = r\,p' - r\,p$$

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$$

Cette équation se discute sans aucune difficulté. Elle ne diffère que par le signe de p' de l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}$ établie plus haut.

Si donc on regarde dans l'une et dans l'autre p' comme l'inconnue de la question, on voit que les solutions négatives de (1) seront en grandeur absolue les mêmes que les solutions positives de (2).

Dès lors, mais ceci n'est qu'une pure convention, on voit que

l'on pourra considérer la formule (1) comme donnant dans tous les cas possibles la solution du problème, pourvu que, faisant abstraction du signe des valeurs de p', lorsqu'on les trouvera négatives, on les porte sur le prolongement de l'axe OA, c'est-à-dire derrière le miroir.

Des images droites et virtuelles que l'on voit dans les miroirs convaves. — Quand un objet lumineux est placé devant un miroir concave à une distance plus petite que la distance focale principale, il ne se forme plus d'image réelle en avant du miroir, mais on peut voir dans l'intérieur de ce dernier des images virtuelles droites et agrandies, dont la formation s'explique sans difficulté.

Soit (fig. 509) AB, l'objet lumineux; tous les rayons partis de A semblent après leur réflexion partir d'un point A' situé sur la ligne AO, à une distance du miroir donnée par la relation

$$\frac{1}{\text{AC}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Tous les rayons partis de B semblent, après la réflexion, diverger d'un point B' situé sur BO, à une distance du miroir donnée par la relation

$$\frac{1}{\text{BD}} - \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

Si donc l'œil est placé en avant du miroir, de façon à recevoir

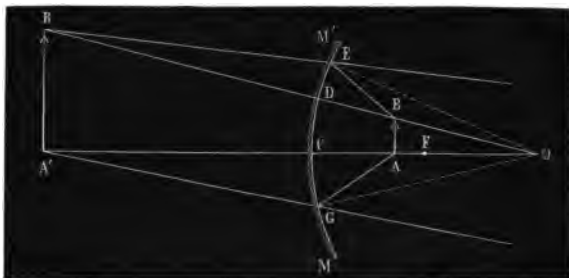


Fig. 509.

à la fois des rayons faisant partie du faisceau qui semble diverger de A', et des rayons partis du cône qui semble diverger

de B', il verra en A'B' une image de AB évidemment droite et agrandie.

Si l'on suppose AO à peu près égal à BO, A'O sera aussi égal à B'O.

A'B' et AB deviennent alors des arcs de cercles semblables, et l'on a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O}{AO} = \frac{p' + r}{r - p}$$

or, on a vu à la page 177 que $\frac{p' + r}{r - p}$ est égale à $\frac{p'}{p}$, d'autre part, puisque ici l'on a

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}$$

on en déduit

$$\frac{p'}{p} = \frac{a}{a - p}$$

donc enfin

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{a}{a - p}$$

ce qui montre que l'image diminue quand la distance AC diminue elle-même.

Mais il ne faut pas oublier que les formules cesseraient d'être applicables, si l'objet se rapprochait assez du miroir pour que les droites, menées des points A et B à l'un quelconque des points du miroir, comprissent entre elles un angle un peu notable.

Miroirs sphériques convexes. — Les miroirs convexes donnent aussi des images virtuelles des objets placés en avant de leur surface. Ces images sont droites, plus petites que les objets, et pour cela elles paraissent très-vives.

Pour en expliquer la formation, nous supposerons toujours petits :

1° L'angle sous lequel on voit le miroir d'un point quelconque de l'objet;

2° L'angle sous lequel on voit l'objet d'un point quelconque du miroir.

Enfin, et pour éviter des redites inutiles, nous admettrons que les lignes menées des différents points de l'objet au centre

de la sphère, dont le miroir fait partie, rencontrent toujours la surface de ce dernier.

Soit (fig. 510) P l'un de ces points, PA un rayon incident en A, CAP' le rayon réfléchi correspondant et AO la normale. Cette

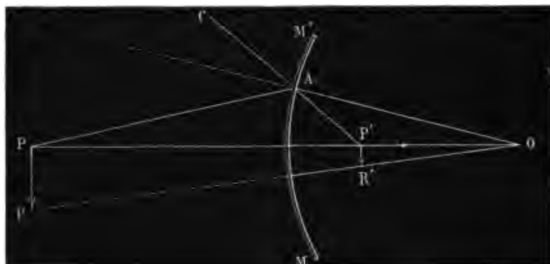


Fig. 510.

dernière ligne étant la bissectrice de l'angle CAP, on aura comme plus haut

$$\frac{PA}{AP'} = \frac{OP}{P'}$$

ou

$$\frac{p}{p'} = \frac{p + 2a}{2a - p'}$$

d'où

$$2ap - pp' = pp' + 2ap'$$

d'où

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{p}$$

ou

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{a}$$

p' est donc le même pour tous les rayons partis de P, en d'autres termes, tous les rayons partis de P semblent après leur réflexion diverger du point P'.

Un autre point R de l'objet formerait de même son image virtuelle en R' sur la droite RO à une distance du centre qui serait la même que celle de P' si RO est sensiblement égal à PO.

La position de l'image et son rapport de grandeur avec l'objet sont donc complétement déterminés.

Ce que nous avons dit plus haut nous dispense d'insister davantage sur ce point.

Détermination des distances focales principales des miroirs. — Nous ferons seulement en terminant une remarque générale.

Pour calculer complétement les effets d'un miroir sphérique, concave ou convexe, il faut connaître sa distance focale principale, ou, ce qui revient au même, son rayon de courbure. Mais la détermination de cet élément ne peut se faire à l'aide du sphéromètre, parce que les surfaces sont trop aisément altérables. On mesure alors les distances p et p' qui séparent du miroir un point lumineux et son foyer conjugué, et l'on en déduit la distance focale principale a.

L'opération ne présente rien de particulier quand le miroir est concave; s'il est convexe, on peut, ainsi que le montre la figure 511, faire tomber sur sa surface réfléchissante M un faisceau convergent dirigé vers un point P, assez rapproché de M pour que les rayons réfléchis viennent former en avant du miroir un foyer réel en P'. — Posons P'M $= p'$, PM $= p$, et alors la distance focale cherchée a sera donnée par l'équation

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{1}{a},$$

ainsi qu'il est facile de s'en assurer en résolvant directement le problème du miroir convexe en ce cas particulier.

Si le miroir n'est pas trop large, on arrive aisément à faire déborder tout autour une portion du faisceau conique incident.

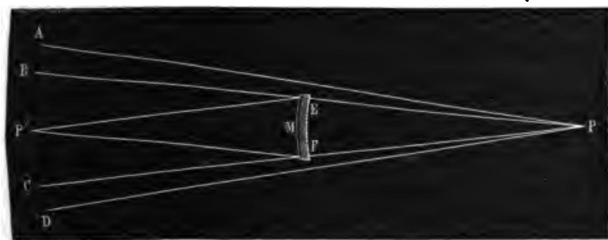


Fig. 511.

Les apparences que l'on obtient alors sont représentées fig. 511. Les distances p et p' se mesurent directement.

§ 5. — ABERRATIONS DES MIROIRS. CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION.

Aberrations. — Lorsqu'un point lumineux est placé sur l'axe d'un miroir concave (fig. 512), les rayons PM' qu'il envoie sur



Fig. 512.

les bords du miroir, et ceux qu'il envoie dans le voisinage du point central A, ne reviennent réellement concourir au même foyer que si le miroir a un rayon très-long et des dimensions extrêmement petites.

Que l'on suppose en effet $\alpha = o$ dans la formule de la page 173, ligne 1, elle devient

$$x = \frac{r\,m}{r + 2\,m\cos\omega}$$

et donne pour x des valeurs OF, OD..., qui varient avec la grandeur de ω.

Pour les rayons centraux, $\omega = 0$, et alors on a :

$$\mathrm{OD} = x_1 = \frac{r\,m}{r + 2\,m}.$$

Soit, pour les rayons marginaux, A la valeur M'OA de l'angle ω on a :

$$\mathrm{OE} = x' = \frac{r\,m}{r + 2\,m\cos\mathrm{A}}$$

La différence OE — OD représente ce qu'on appelle l'*aberration longitudinale* du miroir.

Si au foyer D des rayons centraux on élève une ligne perpendiculaire à l'axe OA, les rayons marginaux la rencontreront en un point F d'autant plus éloigné de D que l'aberration longitudinale sera plus grande. La ligne DF mesure ce qu'on appelle l'*aberration latérale* du miroir. Pour en calculer la grandeur,

on remarque que, si du point M' on abaisse M'I perpendiculaire sur l'axe, on a :

$$\frac{DF}{DE} = \frac{M'I}{IE}$$

Or, DE c'est-à-dire, $x' - x_1$ est l'aberration longitudinale.

$$M'I = r \sin A$$

$$IE = r \cos A - x' = r \cos A - \frac{r m}{r + 2 m \cos A}$$

Donc DF se trouve exprimé en fonction de quantités toutes connues.

Pour rendre très-visibles ces aberrations de sphéricité des miroirs concaves, on peut employer avec avantage un appareil dont la partie essentielle est un demi-cylindre de verre ABC (fig. 513), argenté en dedans et jouissant, par conséquent, d'un grand pouvoir réflecteur. On ferme l'ouverture latérale de ce



Fig. 513.

demi-cylindre par un écran métallique percé de sept trous ; l'un au milieu et coïncidant avec le centre du demi-cercle ABC ; les autres régulièrement espacés sur le diamètre AC.

On fait tomber sur cet écran les rayons divergents d'un centre lumineux P placé sur le prolongement du diamètre BO mené perpendiculairement à AC.

L'écran isole sept rayons, l'un central, les autres symétriquement placés par rapport à celui-ci.

Or on voit après la réflexion les rayons qui se correspondent dans le groupe supérieur et dans le groupe inférieur se couper au même point du rayon BO. Seulement, le point de section se rapproche d'autant plus du miroir que les rayons incidents qui s'y rapportent s'écartent plus de BP. Sur la fig. 513, *a* est le point de section des rayons marginaux, *c* celui des rayons centraux, *b* celui des rayons intermédiaires.

Le cylindre et l'écran sont fixés normalement sur une planche blanchie à la céruse.

Caustiques par réflexion. — Le réflecteur cylindrique que nous venons de décrire peut être employé pour produire ces effets lumineux qui sont connus sous le nom de caustiques par réflexion, et que l'on observe toutes les fois qu'on expose au jour un vase de révolution poli intérieurement.

Ici (fig. 514) l'on voit sur la base blanche du cylindre se détacher une portion lumineuse DEFM délimitée par une courbe en cœur bien brillante DEF.



Fig. 514.

Le point D possède surtout un très-vif éclat.

Pour s'expliquer la manière dont le phénomène se développe, il suffit de suivre après leurs réflexions les rayons qui, partis d'une source plus ou moins éloignée, se réfléchissent en des points voisins du miroir, et la fig. 513 montre que si les points d'intersection des rayons réfléchis consécutifs étaient plus nombreux, la suite de ces points formerait bien la courbe brillante par laquelle se trouve limitée la portion éclairée de la section droite du cylindre réfléchissant.

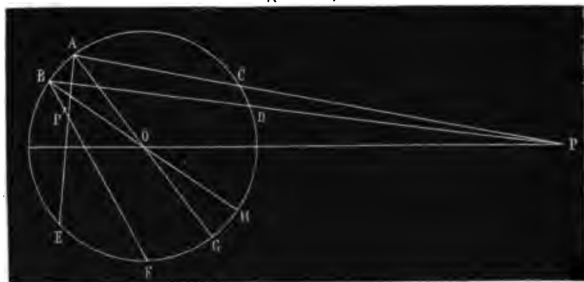


Fig. 515.

Petit a donné une manière simple de construire par points la courbe caustique dans le cas auquel se rapporte l'expérience décrite à la page précédente.

Soit ABCDH... (fig. 515) une section droite du cylindre réfléchissant, et supposons que le point lumineux P soit dans ce plan; soient PA, PB deux rayons incidents très-voisins, AE, BF les rayons réfléchis correspondants, P′ leur point d'intersection, AOG, BOH les diamètres passant en A et en B.

De ce que les angles d'incidence sont respectivement égaux aux angles de réflexion qui leur correspondent, on déduit, en s'appuyant sur les principes relatifs à la mesure des angles inscrits, les deux égalités :

$$\begin{array}{c} EG = GC \\ FH = HD \\ \hline EG - FH = GC - HD \end{array}$$

c'est-à-dire

$$EF - GH = GH + CD$$

$$EF - CD = 2GH = 2AB$$

Posons

$$PA = PB = p. \qquad AP' = BP' = p'.$$

$$AC = BD = AE = BF = 4a$$

ce qui est toujours permis si les points A et B sont suffisamment voisins.

Les triangles ABP, CDP sont semblables. En effet, ils ont l'angle P commun: et, d'autre part, les angles ABP, DCP sont égaux.

Une raison toute pareille servirait à établir la similitude des triangles BAP′, EP′F.

On en déduit :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{p - 4a}{p} \qquad CD = AB\,\frac{p - 4a}{p}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{4a - p'}{p'} \qquad EF = AB\,\frac{4a - p'}{p'}$$

Portons ces valeurs dans l'égalité :

$$EF - CD = 2AB$$

et nous en déduirons :

$$\frac{4a - p'}{p'} + \frac{4a - p}{p} = 2$$

$$4ap - pp' + 4ap' - pp' = 2pp'$$

ou

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{a}$$

En d'autres termes, quand la position d'un rayon incident PA est donnée, pour avoir le point de la caustique correspondant, on trace la direction AE suivant laquelle PA se réfléchit, et, à partir du point A, on prend sur cette direction une longueur donnée par l'équation précédente.

Le cas où p est infini mérite d'être remarqué. D'abord, c'est celui des caustiques qui se forment par la réflexion des rayons solaires, et ensuite la construction générale se simplifiant d'une manière remarquable conduit à une définition géométrique élégante de la forme de la courbe caustique.

Voici en quoi elle consiste :

Partageons le rayon OA en deux parties égales au point D. Du centre O et du rayon OD décrivons une circonférence (fig. 516) Sur DA, comme diamètre, décrivons-en une seconde, et imaginons que cette petite circonférence roule sur DKN d'une manière continue. Lorsqu'elle sera dans une position quelconque MP'K, si P' est le point qui primitivement se trouvait en D, l'arc P'zK sera égal à DyK. Or, ce point P' est précisément celui de la caustique qui répond au rayon incident CM.

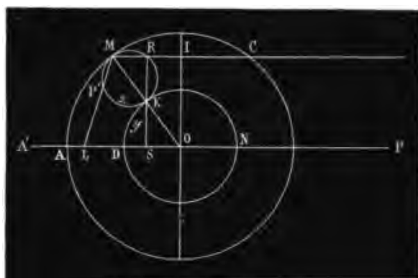


Fig. 516.

En effet, que l'on joigne P'M, et que l'on prolonge cette ligne jusqu'en L, l'angle LMO sera égal à LOM; car, inscrit dans un cercle de rayon $\frac{DO}{2}$, il intercepte entre ses côtés un arc égal à celui qui mesure l'angle LOK, dont le sommet est au centre du cercle de rayon DO. Or, l'angle LOK égale l'angle d'incidence CMO à cause du parallélisme des lignes AP et MC. Donc MP' est déjà la direction du rayon réfléchi.

Reste à prouver que MP' $= a$. Pour cela, joignons KR et prolongeons cette ligne jusqu'à S. On a d'abord P'M $=$ MR. Puis les

triangles MKR,SKO sont égaux, comme ayant le côté KO égal au côté MK, les angles en K égaux comme opposés au sommet, et l'angle en M égal à l'angle en O, ainsi qu'il vient d'être dit. Donc MR = SO. D'ailleurs l'angle MRK est droit comme inscrit dans une demi circonférence, donc SO = RI, et enfin

$$MR = RI = \frac{1}{4} MC$$

CHAPITRE VI

DE LA RÉFRACTION.

§ 1. — LOIS FONDAMENTALES DE LA RÉFRACTION. RÉFLEXION TOTALE. — MIRAGE.

Quand un rayon de lumière AB passe d'un milieu dans un autre, il se trouve, au point de passage, dévié brusquement de sa direction primitive, à moins toutefois qu'il ne se meuve perpendiculairement à la surface de séparation MM' des deux milieux. Cette déviation (voir la fig. 517) porte le nom de *réfraction*.

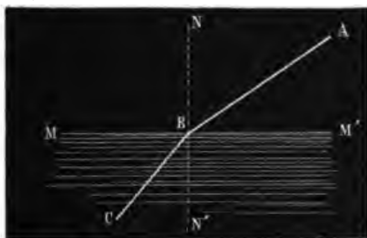


Fig. 517.

Elle ne fait pas sortir le rayon du plan d'incidence. Pour le prouver, supposons que l'on prenne une auge, primitivement vide, au fond de laquelle se trouve un point brillant M (fig. 518), et que l'on dirige vers ce point la lunette d'un cercle vertical gradué.

Si l'on verse de l'eau dans l'auge, on ne verra plus le point M dans la direction primitive MPO, parce que le rayon MP, au sortir de l'eau, se brise et prend la direction PP' qui ne vient

plus rencontrer l'œil; mais, si l'on relève un peu la lunette sans la faire sortir du plan vertical passant par MO, on revoit bientôt le point M, mais dans une autre direction, OM'M", par exemple. Le rayon réfracté M'O et le rayon incident correspondant MM'

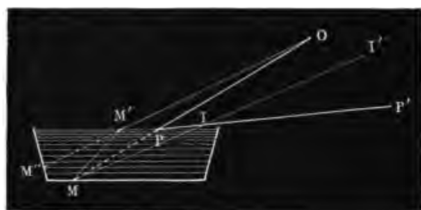


Fig. 518.

sont tous deux dans le plan vertical que décrit la lunette; la réfraction n'a donc pas fait sortir le rayon de ce plan, qui, d'ailleurs, est le plan d'incidence de MM', puisque évidemment il contient la normale au liquide en M'.

Définitions. Indice de réfraction. Loi de Descartes. — On appelle angles d'incidence et de réfraction ceux que font, avec la normale au point d'incidence, les directions des rayons incident et réfracté.

Les grandeurs absolues de ces deux angles sont liées par une relation remarquable, connue sous le nom de loi de Descartes, et qui consiste en ce qu'il existe un rapport constant entre les *sinus* des angles d'incidence et de réfraction, au passage d'un milieu déterminé dans un autre qui l'est également. Ainsi, quand la lumière passe de l'air dans l'eau, le rapport du *sinus* de l'angle d'incidence au *sinus* de l'angle de réfraction, est toujours $\frac{4}{3}$, quelle que soit la grandeur de l'angle d'incidence. Ce rapport serait égal à $\frac{9}{8}$, si la lumière passait de l'eau dans le verre; il serait $\frac{8}{9}$, si le rayon passait du verre dans l'eau, etc., etc.

La démonstration expérimentale de la loi de Descartes ressort de toutes les mesures faites à différentes reprises par les physiciens qui ont cherché à comparer les valeurs d'angles d'incidence et de réfraction correspondants.

Les plus anciennes que l'on connaisse sont dues à Ptolémée d'Alexandrie.

L'appareil qu'il employait diffère peu de celui qui sert encore

dans les cours pour établir, approximativement au moins, la loi de Descartes.

Qu'on se reporte à l'appareil décrit page 157, et qu'au miroir on suppose substitué un demi-cylindre de verre, ABC, disposé comme on le voit (fig. 519), c'est-à-dire de manière que, d'une part, son axe soit horizontal et passe par le centre du cercle EFG, et que, d'autre part, sa face latérale plane soit horizontale, et par conséquent coupe le plan du cercle gradué, suivant l'horizontale AB. Si l'on fait tomber en O un rayon passant par un point quelconque F de la circonférence graduée, ce rayon se réfractera en pénétrant dans le verre, mais il émergera sans se dévier, parce qu'à la sortie il rencontrera normalement la surface convexe du demi-cylindre ABC. Il gardera donc dans l'air la direction qu'il avait prise dans le verre. Or, premièrement, il vient toujours raser la circonférence FEG, ce qui prouve déjà qu'en se réfractant en O, il n'est pas sorti du plan d'incidence, et d'autre part, si pour différentes valeurs de l'angle d'incidence ROF, on lit la division du cercle qui se trouve au point G, rencontré par le rayon émergent, on trouve que les arcs RF et GR' satisfont toujours à la loi des *sinus*.



Fig. 519.

Si l'on voulait vérifier la loi de la réfraction pour les liquides, il faudrait au demi-cylindre de verre substituer une cuve demi-cylindrique, que l'on emplirait de ces liquides (fig. 520). DG et EF représentent ici les sinus d'incidence et et de réfraction.

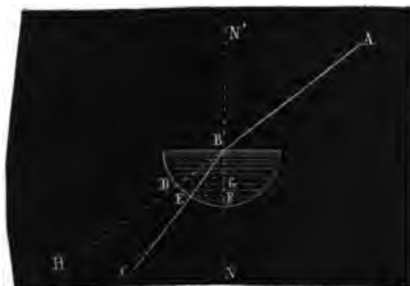


Fig. 520.

On appelle *indice de réfraction* la valeur du rapport constant qui existe ainsi entre les *sinus* des angles que la normale, au point d'incidence, fait avec les rayons incident et réfracté.

Dans le cas où les angles d'incidence sont petits, la proportionnalité des *sinus* entraîne celle des angles; par conséquent alors on peut dire que les angles de réfraction sont proportionnels aux angles d'incidence, et il en est de même des déviations qu'éprouve le rayon en se réfractant. Sur la figure 520, DBE est la *déviation* qui correspond à l'angle d'incidence N'BA.

Kepler, par des mesures directes, avait reconnu l'exactitude de cette dernière proposition, et il la formule dans sa *Dioptrique, Axiome VII* en disant :

Crystalli refractiones usque ad tricesimum inclinationis, sunt ad sensum proportionales inclinationibus.

Mais cette limite est une limite supérieure au delà de laquelle il faudrait se garder de vouloir étendre l'approximation précédente. Kepler en prévient lui-même, car il ajoute (proposition XII) :

Refractiones exquisite pensitatæ non sunt proportionales inclinationibus in aere. — Nam cum est inclinatio 30° refractio est 10° triplicà utrumque. Ergo in hac proportione inclinationi 90° deberetur refractio esse 30°, at experientia dat 48.

Après Kepler et un peu avant Descartes, un géomètre hollandais, Snellius Villebrovd, avait représenté, par une construction géométrique, la loi complète de la réfraction; mais c'est Descartes qui l'a énoncée le premier sous la forme qu'elle a conservée depuis.

Déplacement des objets vus par réfraction. — Il résulte de ce qui précède que l'on voit ordinairement hors de leur place réelle les objets qui se trouvent dans un milieu différent de celui où notre œil lui-même est placé. Ainsi, en se reportant à la figure 516, l'œil placé en O voit le point lumineux M, non pas dans la direction OM, mais bien dans la direction OM'M".

Et par suite, un bâton passant par les points I'IM paraîtrait se briser au point I où il pénètre dans ce liquide, puisque son image vue par réfraction devrait passer au point M".

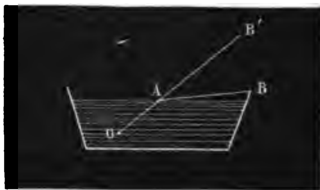


Fig. 521.

Lorsqu'on est plongé sous une eau bien claire et tranquille, les objets placés sur les bords, tels que B (fig. 521), semblent, lorsqu'on peut les voir, notablement relevés au-dessus de leur véritable place.

Du point O, par exemple, on verrait le point B suivant la direction OAB'.

La fig. 522 montre comment, par l'effet de la réfraction que les rayons lumineux subissent en pénétrant dans l'atmosphère, un astre placé en S et encore au-dessous de l'horizon peut paraître déjà élevé au-dessus de ce plan.

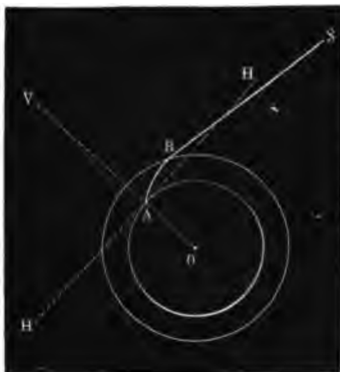


Fig. 522.

Réflexion totale.—D'après la loi de la réfraction, on peut assigner l'angle sous lequel pénètre dans un milieu fortement réfringent, tel que l'eau, le verre, etc., un rayon qui se meut dans l'air, suivant une direction presque tangente à la surface du milieu réfringent.

Il suffit, en effet, pour trouver la valeur de cet angle x, de résoudre l'équation $\frac{\sin 90}{\sin x} = n$. Si le milieu réfringent est de l'eau, $n = \frac{4}{3}$, et par suite $x = 48° 35'$; dans le cas du verre, $n = \frac{3}{2}$, et par suite $x = 41° 48'$, etc.

Réciproquement, si un rayon se mouvant dans l'eau, se présentait à l'émergence en faisant avec la normale un angle de 48° 35', il sortirait en rasant la surface.

Qu'arriverait-il si l'angle d'incidence dans l'eau devenait supérieur à 48° 35' ?

L'expérience prouve que dans ce cas le rayon ne sort pas du milieu réfringent; il se réfléchit totalement à la surface de séparation, comme il le ferait sur la surface d'un miroir parfait; et par suite l'angle donné par la relation $\frac{1}{\sin x} = n$ est la limite supérieure de ceux que peut faire avec la normale tout rayon qui émerge du milieu réfringent dans l'air. On l'appelle *angle limite*.

De là résulte que, si l'on coupe un cylindre de verre bien transparent (fig. 523), par deux plans, l'un AB, perpendiculaire à l'axe, l'autre CD, incliné sur l'axe de 48° 12' ou d'un angle plus petit, on pourra diriger l'axe de ce cylindre vers le soleil et

mettre impunément l'œil en CD. Aucun rayon venu de l'astre n'émergera par cette face, parce que tous ceux qui la rencontrent se présentent à la sortie sous un angle égal au complément de ADC, c'est-à-dire sous un angle supérieur à l'angle limite.

Kepler avait étudié le fait, et il l'explique à peu près dans les termes suivants :

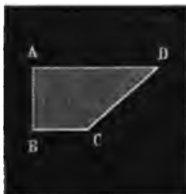


fig. 523.

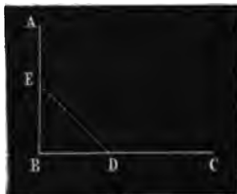


fig. 524.

« Si l'on interpose entre l'œil et un objet lumineux un morceau de verre taillé à angle droit (fig. 524), aucun rayon venu de l'objet ne pourra arriver à l'œil à travers ce prisme rectangulaire. Car d'abord, tout rayon qui pénétrera dans le verre fera avec la face d'entrée AB un angle plus grand que 48° 12′, et ensuite tout rayon pour lequel l'angle BED est supérieur à 48° 12′ fait avec la face de sortie BC, un angle moindre que 41° 48′, et par suite il ne peut émerger. »

Mirage. — Monge a fait voir que les phénomènes connus sous le nom de *mirage* sont dus à une réflexion totale que les rayons lumineux venus d'objets éloignés éprouvent à la surface de séparation de deux couches d'air d'inégales densités. Ces phénomènes n'ont pas toujours le même aspect; mais en Égypte, où Monge eut surtout occasion de les étudier, ils se présentent ordinairement de la manière suivante: lorsque, par un temps calme, le soleil a fortement échauffé le sol d'une vaste plaine sablonneuse, on croit voir un lac à l'horizon, c'est-à-dire qu'à l'horizon on voit les images renversées du ciel, des nuages et des objets, qui s'élèvent au-dessus de la plaine.

Pour expliquer ces apparences, il suffit d'admettre que, dans les conditions que nous venons de définir, les couches d'air en contact avec le sol brûlant y prennent une densité moindre que celle des couches supérieures (tout en conservant une élasticité suffisante pour équilibrer la pression de la colonne atmosphérique qui leur est superposée). Alors tout rayon lumineux qui, se mouvant d'abord dans les couches supérieures, arrivera sous une incidence presque rasante à la surface de la couche infé-

rieure plus chaude et moins dense, y éprouvera la réflexion totale, et revenant vers l'œil situé dans les couches plus élevées, il lui apportera l'image réfléchie et renversée des objets éloignés; en même temps des images droites de ces mêmes objets seront apportées à l'observateur par des rayons venus directement à travers les couches supérieures où ils se trouvent placés comme lui.

Nous nous exprimons ici comme s'il existait une séparation brusque entre une couche atmosphérique supérieure plus dense et une couche inférieure de densité notablement moindre. — En réalité, cette variation de densité (inverse de celle que l'on observe d'ordinaire), se fait d'une manière continue. Aussi les rayons qui arrivent à l'œil par réflexion parcourent-ils une trajectoire courbe dans le voisinage du point où ils se relèvent au-dessus de l'horizon. — La figure 525 montre la marche du phénomène.

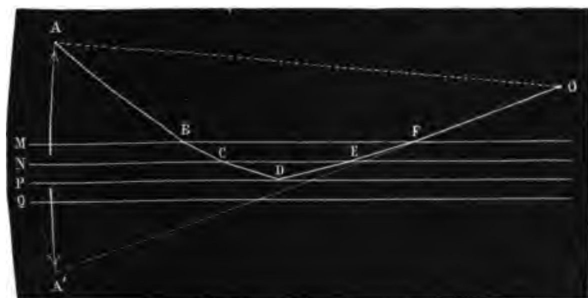


Fig. 525.

M, N, P sont des couches d'air dans lesquelles la densité va en diminuant de haut en bas d'une manière continue.

L'objet A et l'œil O sont tous deux dans une couche supérieure plus dense.

ABCDEF représente la trajectoire du rayon; l'image A' est vue dans le prolongement de la tangente en F à cette trajectoire.

Pour reproduire artificiellement les phénomènes de mirage, il suffit de chauffer un peu fortement une grande plaque de tôle. En regardant cette surface dans une direction très-inclinée, on voit l'image des objets éloignés se former par réflexion sur la couche d'air qui la touche immédiatement.

§ 2. — PASSAGE DES RAYONS LUMINEUX A TRAVERS LES MILIEUX RÉFRINGENTS TERMINÉS PAR DES FACES PLANES.

Après avoir, dans le paragraphe précédent, posé les lois fondamentales de la réfraction et en avoir tiré d'importantes conséquences, nous allons, dans celui-ci, étudier la transmission de la lumière : 1° à travers les milieux réfringents terminés par des faces planes et parallèles; 2° à travers des milieux réfringents terminés par des faces planes et inclinées entre elles. — Nous ne considérerons jamais dans nos raisonnements que des faisceaux formés de rayons lumineux identiques entre eux, c'est-à-dire possédant tous les mêmes degrés de réfrangibilité.

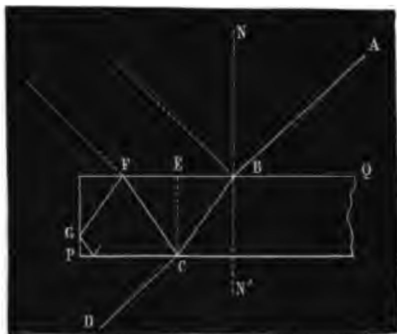


Fig. 526.

Si le milieu que l'on considère est terminé par deux faces planes parallèles entre elles, le rayon, après l'avoir traversé, est parallèle à sa direction initiale. Seulement, il ne se trouve pas exactement sur son prolongement. La distance de ces deux directions parallèles, nulle dans le cas de l'incidence normale, n'acquiert de valeur sensible que pour des inclinaisons un peu obliques ou pour de fortes épaisseurs du milieu traversé.

Pour le démontrer, soit PQ (fig. 526) une lame à faces parallèles, ABCD un rayon qui la traverse en se réfractant. — Les angles que la portion BC du rayon fait avec les normales BN' et CE' sont égaux entre eux, puisque ces normales sont parallèles; par suite il en sera de même des angles que AB et CD font avec ces mêmes normales : AB et CD sont donc parallèles.

7 Pour faire l'expérience, il faut prendre, ou bien un cube de verre un peu gros, bien pur et poli sur ses faces, ou, ce qui est moins couteux, une cuve à eau ayant pour parois des glaces à faces parallèles. On fait en sorte que le faisceau cylindrique incident soit horizontal, et qu'il ait son axe sur le niveau même de l'eau de la cuve. Soit PQ ce niveau (fig. 526); alors la portion du faisceau qui a subi la réfraction est à la sortie parallèle à celle qui n'a pas traversé l'eau. Mais elle ne se trouve pas directement au-dessous de cette dernière. Il est aussi très-facile de voir que chaque réfraction est accompagnée d'une réflexion. Ainsi, par exemple, tandis qu'au point C on voit émerger une partie du rayon réfracté, on en voit une autre se réfléchir dans le liquide et venir en F subir une nouvelle réfraction et une nouvelle réflexion, etc., etc.

Action des prismes sur la lumière. — Supposons maintenant que les deux faces du milieu réfringent soient inclinées l'une sur l'autre, ou, pour employer de suite le terme consacré, supposons que le rayon lumineux tombe sur un *prisme* BAC (fig. 527). Le plan d'incidence sera celui de la figure, et nous admettrons qu'il est perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre A, que nous appellerons *angle réfringent* du prisme.

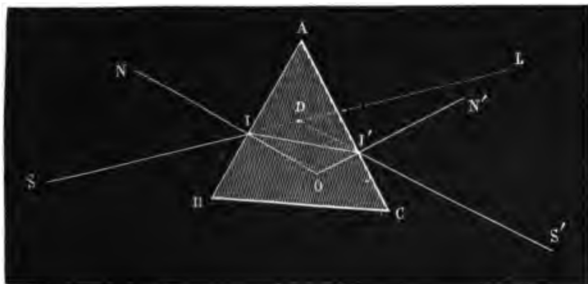


Fig. 527.

En entrant dans le prisme, le rayon incident SI s'infléchit sans sortir du plan de la figure, et l'angle I'IO $= r$, qu'il fait avec la normale NIO, est lié à l'angle d'incidence i par la relation $\sin i = n \sin r$, n étant l'indice de réfraction de la substance dont le prisme est fait. A la sortie, le rayon toujours contenu dans le plan d'incidence, prend une direction I'S' qui fait avec la normale un angle N'I'S' $= i'$, lié à l'angle II'O $= r'$ par la

relation $\sin i' = n \sin r'$. La déviation totale du rayon lumineux est la somme algébrique de celles qu'il éprouve à l'entrée et à la sortie, et dont les valeurs respectives sont $i - r$ et $i' - r'$. Sur la figure, cette déviation est l'angle LDS' = D.

On voit que l'on a

$$D = i + i' - r - r'.$$

Cette expression se met souvent sous une autre forme. Dans le quadrilatère AIOI', les angles en I et I' sont droits. Donc O = 180 — A. D'autre part, le triangle IOI' donne

$$O = 180 - (r + r'),$$

donc

$$A = r + r',$$

et par conséquent

$$D = i + i' - A.$$

Minimum de déviation. — Ainsi les différentes relations qui définissent complétement le trajet du rayon lumineux à travers le prisme sont les suivantes :

$$\sin i = n \sin r, \qquad r + r' = A, \qquad \sin i' = n \sin r',$$

et

$$D = i + i' - A.$$

Elles montrent que la déviation D est déterminée lorsque la direction et la nature du rayon incident, la nature du prisme et sa forme sont connues, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque i, n et A sont donnés.

La déviation D, variable avec l'incidence i, acquiert pour un prisme donné une valeur minimum, lorsque l'incidence est telle que l'angle i' soit égale à i, ou encore lorsque r est égal à r'. Dans ce cas, la direction du rayon II', dans le prisme, est évidemment perpendiculaire au plan bissecteur de l'angle réfringent A. Cette proposition est importante ; on en fait souvent usage dans les recherches expérimentales relatives à la détermination des indices de réfraction. Pour ces motifs, nous en allons donner ici la démonstration.

Supposons que l'on donne à l'angle i un accroissement infiniment petit di, les angles r, i', r' et la déviation D varieront en même temps, et comme les angles $i + di$, $r + dr$, $i' + di'$, $r' + dr'$,

et D + dD devront toujours satisfaire aux relations précédentes, on aura nécessairement

$$\cos i\, d i = n \cos r\, d r \qquad d r + d r' = 0$$
$$\cos i'\, d i' = n \cos r'\, d r' \qquad d D = d i + d i'.$$

Si, pour une certaine valeur de l'angle i, la déviation est minimum ou maximum, elle n'éprouvera aucune variation quand on donnera à i l'accroissement di, en d'autres termes, alors, on aura $dD = 0$ et par suite l'équation se réduira $di + di' = 0$.

On déduit de ces équations

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos^2 r'}{[1 - n^2 (1 - \cos^2 r)]} = \frac{\cos^2 r}{[1 - n^2 (1 - \cos^2 r')]}$$

d'où enfin

$$\cos^2 r = \cos^2 r'$$

Il en résulte $r = r'$, puisque ces deux angles sont tous deux compris entre zéro et 90.

L'égalité des angles r et r' entraîne celle de i et de i'.

Pour prouver expérimentalement que la déviation peut acquérir un minimum, il suffit de faire tomber vers le sommet d'un prisme tel que C, fig. 528, un faisceau lumineux dirigé de façon qu'une portion seulement en soit réfractée, le reste continuant sa route et venant marquer sa place sur un tableau blanc placé à quelque distance.

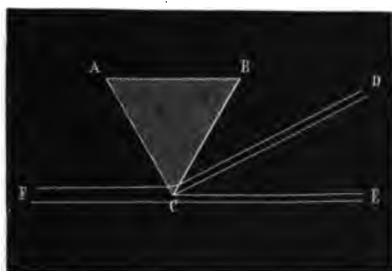


Fig. 528.

En tournant le prisme convenablement, on peut bien rapprocher le rayon réfracté du rayon incident jusqu'à une certaine distance qui dépend de l'angle réfringent et de la nature du prisme; mais toujours cette distance angulaire a une limite. Quand elle est atteinte, quel que soit le sens dans lequel on tourne

le prisme, le rayon réfracté s'écarte du rayon incident. Pour démontrer, approximativement au moins, qu'au moment du minimum les angles i et i' sont égaux, on répète l'expérience que nous venons de décrire, en employant un prisme équilatéral de petite dimension et un faisceau assez large pour qu'une partie tombe sur la base AB; au moment où le minimum est atteint, la portion du faisceau qui est réfléchie sur cette base vient sur le tableau se superposer au rayon réfracté.

De là résulte nécessairement que le faisceau réfracté et le faisceau incident font des angles égaux avec le plan qui coupe l'angle réfringent en parties égales. Or cette condition entraîne nécessairement l'égalité des angles formés par ces deux faisceaux avec les faces d'entrée et de sortie, c'est-à-dire le point même qu'il s'agissait d'établir.

Les équations de la page 196 montrent que la déviation augmente avec A. En effet i et r restent les mêmes, si A s'accroît d'une quantité infiniment petite dA, les variations des angles i', r' et D seront liées à celle de A par les relations

$$dr' = dA, \qquad dD = di' - dA,$$

$$\cos i'\, di' = n \cos r'\, dr'.$$

On déduit de la dernière :

$$di' = n\, dr' \frac{\cos r'}{\cos i'}.$$

Or, i' étant plus grand que r', $\cos r'$ est plus grand que $\cos i'$, donc $di' - dA$ est positif, au moins si n est plus grand que l'unité.

D augmente donc en même temps que A.

Dans les raisonnements ou les calculs qui précèdent nous avons supposé le prisme qui fait dévier la lumière plus réfringent que le milieu dans lequel il est plongé. C'est en général ce qui a lieu; pourtant l'inverse se présente lorsqu'on fait passer les rayons de l'air dans un prisme où l'on a fait le vide, et comme nous aurons spécialement l'occasion de considérer ce cas, nous ferons remarquer ici qu'alors la déviation a lieu, non plus vers la base du prisme, mais vers le sommet.

Dans ce cas elle est liée aux angles du prisme et à ceux d'incidence et d'émergence par la relation :

$$D = A - (i + i').$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la figure 529

dans laquelle la ligne brisée SII'S' est la route que suit le rayon lumineux.

La déviation alors est minimum quand $(i + i')$ est maximum. Or, il est facile de voir que cela arrive quand $r = r'$, et les calculs qui le prouvent sont trop semblables à ceux que nous venons de développer pour qu'il soit besoin d'y insister davantage.

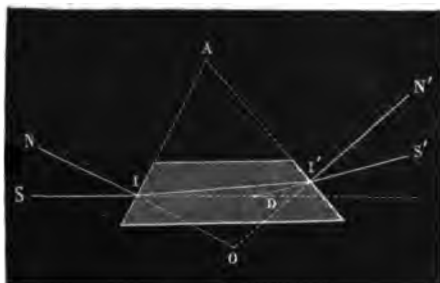


Fig. 529.

Conditions d'émergence. — Lorsqu'un rayon lumineux tombe sur un prisme plus réfringent que le milieu ambiant, il y pénètre toujours, mais il ne peut pas toujours en sortir.

Il est facile de préciser les circonstances dans lesquelles chacun de ces deux cas se présente.

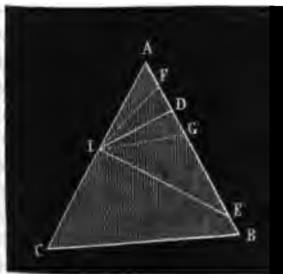


Fig. 530.

Par le point d'incidence I (fig. 530), menons une normale ID à la face d'émergence AB, et autour de cette ligne décrivons un cône dont le demi-angle au sommet soit égal à l'*angle limite* pour le milieu considéré; si le rayon qui traverse le prisme est renfermé dans ce cône, il pourra sortir par la deuxième face, parce qu'au point d'émergence il fera avec la normale un angle moindre que l'*angle limite*. Le contraire arriverait si le rayon était extérieur au cône GIF.

Il est facile de conclure de là que, si l'angle réfringent du prisme CAB était plus grand que le double de l'angle limite, aucun rayon entré par la face CA ne pourrait sortir par AB.

En effet, tous les rayons qui sont entrés au point I sont compris dans un cône ayant l'angle limite pour demi-angle au sommet, et pour axe la normale IE menée par le point I à la face CA. Par suite si l'angle DIE est plus grand que le double de l'angle limite, le nouveau cône dont il s'agit ne coupera point celui que nous considérions tout à l'heure, et nul rayon ne satisfera aux conditions d'émergence. Or, il est évident que l'angle DIE est égal à A, donc enfin la proposition énoncée est exacte.

CHAPITRE IV.

DÉVIATION DE LA LUMIÈRE DANS SON PASSAGE A TRAVERS LES MILIEUX TERMINÉS PAR DES SURFACES RÉFRINGENTES COURBES.

§ 1. — PRÉLIMINAIRES.

Lorsqu'un morceau de verre taillé en forme de *lentille*, reçoit sur une de ses faces un faisceau de rayons solaires, il les fait converger en un point situé derrière lui; en ce point il y a souvent concentration d'une grande quantité de lumière et de chaleur. Les textes abondent pour prouver que le fait était parfaitement connu dans l'antiquité. On en trouve, par exemple, chez les comiques grecs, dont tel personnage se propose d'exposer ses tablettes à l'action d'un verre ardent, sûr d'en fondre ainsi la cire et de faire par là disparaître une obligation qui le gêne. Les anciens savaient aussi qu'en mettant une boule diaphane pleine d'eau contre de fins caractères on les voit très-amplifiés.

L'emploi des besicles, c'est-à-dire des verres destinés à aider la vision des myopes et des presbytes, ne remonte pas à une date aussi reculée; il se répandit en Europe au XIII[e] siècle, et les traditions de l'époque semblent en attribuer la découverte ou la vulgarisation au Florentin Siviglio del' Armati, et à un savant religieux son contemporain, Alexandre de Spina. Enfin, Jean-Baptiste Porta, vers 1570, employa le premier, des lentilles biconvexes pour obtenir dans la chambre noire des images nettes des objets extérieurs.

Mais la connaisance complète de ces appareils et de leurs

plus belles applications ne se trouva définitivement acquise à la science que par les travaux de Galilée et de Kepler; la *Dioptrique* de ce dernier renferme une théorie déjà fort complète des lentilles et de leurs combinaisons. Dans l'étude que nous allons en faire, nous considérerons exclusivement le cas où les surfaces qui les terminent sont des calottes sphériques n'embrassant qu'un nombre de degrés peu considérable; de plus, nous admettrons dans nos calculs que les angles d'incidence sont fort petits. Cette condition, qui est toujours satisfaite dans la pratique, simplifie beaucoup les raisonnements en permettant d'étendre aux angles d'incidence et de refraction eux-mêmes, la proportionnalité qui, d'après la loi de Descartes, n'existe rigoureusement qu'entre leurs sinus.

Pour établir la théorie des lentilles, il faut étudier successivement les actions de leurs deux surfaces sur les rayons lumineux. Ainsi, quand il s'agit de lentilles convexes, on suppose d'abord qu'un point lumineux situé en avant d'une masse réfringente terminée par une surface sphérique convexe, envoie sur elle un faisceau conique de rayons divergents; on cherche ce que devient ce faisceau à son entrée dans le ménisque; et après avoir vu qu'il se trouve transformé en un autre faisceau également conique, ou convergent ou moins divergent que le premier, on cherche de même ce que devient ce nouveau faisceau en rentrant dans l'air par la seconde face de la lentille. L'étude des lentilles concaves se fait d'une manière analogue.

§ 2. — MÉNISQUES CONVEXES ET CONCAVES.

Le problème se trouve donc ainsi divisé en une série de questions particulières que nous traiterons successivement. — Le premier cas est, comme nous venons de le dire, celui où les rayons tombent en divergeant sur un ménisque qui tourne sa convexité vers eux.

Premier cas. — Soit P (fig. 531) le point lumineux placé dans le milieu le moins réfringent, et PM un rayon incident; OM étant la normale en M, le rayon réfracté sera MP'. Appelons i et r les angles d'incidence et de réfraction, n l'indice, α, β, γ les angles en P, O, P'. L'angle i est extérieur au triangle PMO, par conséquent est égal à la somme des angles intérieurs $\alpha + \gamma$. Ainsi

$$(1) \qquad i = \alpha + \gamma,$$

de même on aurait

$$(2) \qquad \gamma = r + \beta.$$

Enfin, la loi de réfraction donne $i = nr$. Multiplions (2) par n et au produit ajoutons (1), il vient :

$$(3) \qquad (n-1)\gamma = \alpha + n\beta.$$

Cette relation entre les angles γ, α, β, qui ont chacun un côté dirigé suivant PP', et l'autre passant par le point M, peut aisément se transformer en une relation entre le rayon de la sphère réfringente R et les distances p et p' des points P et P' au point A.

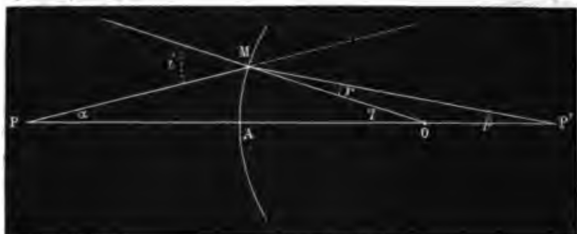


Fig. 531.

En effet, à cause de la petitesse des angles α et β, qui sont l'un et l'autre inférieurs à i, les arcs de cercle décrits soit du centre P et du rayon AP, soit du centre P' et du rayon P'A, sont très-peu différents de MA en grandeur absolue. Soit h cette longueur commune, les angles α, β, γ auront respectivement pour mesure $\frac{h}{p}$, $\frac{h}{p'}$, $\frac{h}{R}$, et l'équation (3) devient :

$$\frac{(n-1)h}{R} = \frac{h}{p} + \frac{nh}{p'} \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{R} = \frac{1}{p} + \frac{n}{p'},$$

Cette équation fait voir que tous les rayons partis d'un même point P viennent couper la ligne PO, à même distance de A. Elle montre donc que tous ces rayons concourent en un même point P'.

Discussion. — Lorsque $\frac{1}{p}$ devient égal à $\frac{n-1}{R}$, $\frac{n}{p'}$ doit être 0 ou $p' = \infty$. Ainsi, quand $p = \frac{R}{n-1}$, les rayons réfractés sont parallèles entre eux et à PO. Pour de plus petites valeurs de p, l'équation donne à p' une valeur négative. Cela indique que les constructions faites pour résoudre le problème ne sont plus applicables.

Deuxième cas. — Alors, en effet, le rayon réfracté n'est plus assez abaissé pour venir couper la ligne PO. Seulement, il semble alors diverger d'un point P', situé du même côté de A que P,

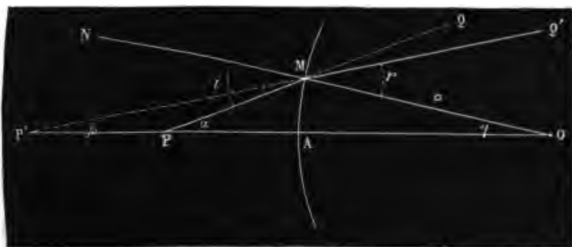


Fig. 532.

mais à une plus grande distance. La figure 532 est relative à ce cas. Les équations du problème sont alors :

$$\left.\begin{aligned} i &= \alpha + \gamma \\ r &= \beta + \gamma \\ i &= n r \end{aligned}\right\} \text{on en déduit} \quad \frac{\begin{aligned} i &= \alpha + \gamma \\ nr &= n\beta + n\gamma \end{aligned}}{(n-1)\gamma = \alpha - n\beta} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{n-1}{R} = \frac{1}{p} - \frac{n}{p'}.$$

Troisième cas. — Des rayons divergents d'un point situé dans un milieu plus réfringent pénètrent dans un milieu moins ré-

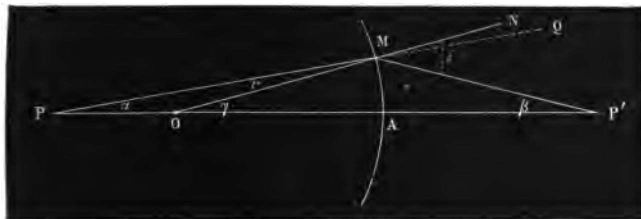


Fig. 533.

fringent en traversant une surface sphérique dont le centre est du même côté que le point de divergence, mais plus voisin d'elle que ce dernier (fig. 533). Alors, si le rayon émergent MP' vient réellement couper le prolongement de la ligne PA, on a

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \alpha + r \\ i = \gamma + \beta \\ \quad = n r \end{array}\right\} \text{d'où} \quad \begin{array}{l} n\gamma = n\alpha + nr \\ nr = \gamma + \beta \\ \hline (n-1)\gamma - \beta = n\alpha \end{array} \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{R} = \frac{n}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Si le point P était à une distance de A inférieure à $\frac{nR}{n-1}$ le signe de p' changerait dans la formule, qui deviendrait alors

$$\frac{n}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{R},$$

parce que les équations desquelles on la déduit seraient :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \gamma + r \\ \beta = \gamma + i \\ i = nr \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma = \alpha + r \\ \gamma = \beta + i \\ i = nr \end{array}\right.$$

suivant que l'on aurait P < ou > R.

Quatrième cas. — Lorsque des rayons formant déjà un faisceau convergent sortent d'un milieu plus réfringent pour pénétrer dans un autre qui l'est moins, la surface de séparation étant sphérique, il est clair que le point de concours définitif P′ (fig.

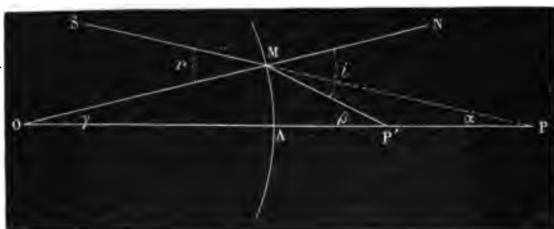


Fig. 534.

534) se trouvera plus rapproché de la surface que le point P vers lequel se dirigeaient les rayons convergents primitifs. Pour calculer la distance P′A on a :

$$\left.\begin{array}{l} r = \gamma + \alpha \\ \quad = i + \beta \\ \quad = n r \end{array}\right\} \text{d'où} \quad \begin{array}{l} nr = n\gamma + n\alpha \\ i = \gamma + \beta \\ \hline 0 = (n-1)\gamma + n\alpha - \beta \end{array} \left\} \begin{array}{l} \beta - n\alpha = (n-1)\gamma \\ \frac{1}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n-1}{R}. \end{array}\right.$$

Cinquième cas. — Des rayons partis d'un point P (fig. 535)

situé dans un milieu M pénètrent dans un milieu plus réfringent

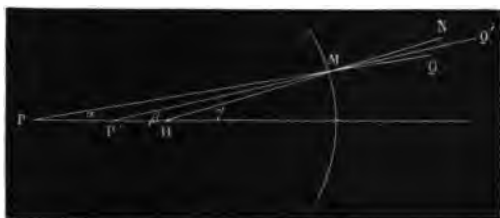


Fig. 535.

M' en traversant une surface sphérique dont le centre est du même côté que P. On a

$$\begin{aligned} \alpha + i &= \gamma \\ \beta + r &= \gamma \\ i &= n r \end{aligned} \qquad n\beta - \alpha = (n-1)\gamma \qquad \frac{n}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R}.$$

Enfin, quand des rayons divergents (fig. 536) passent d'un milieu plus réfringent dans un autre qui l'est moins en traversant

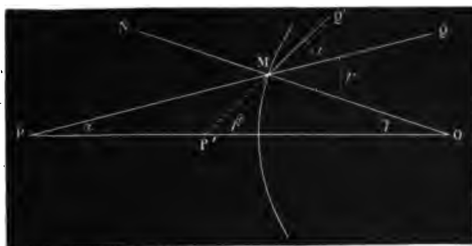


Fig. 536.

une surface sphérique dont le centre est du côté opposé à celui où se trouve le point de divergence, on a

$$\begin{aligned} i &= \gamma + \beta \\ r &= \alpha + \gamma \\ i &= nr \end{aligned} \qquad (n-1)\gamma + n\alpha - \beta = 0 \qquad \frac{n-1}{R} = \frac{1}{p'} - \frac{n}{p}.$$

§ 3. — THÉORIE DES LENTILLES.

Lentilles convexes. — Les lentilles convexes ordinaires, quoique faites d'un seul morceau, peuvent être, quant à leur forme,

considérées comme résultant de la réunion de deux calottes sphériques AMB, ANB de rayons quelconques, mais dont les bases sont égales et parfaitement superposées (voir fig. 537).

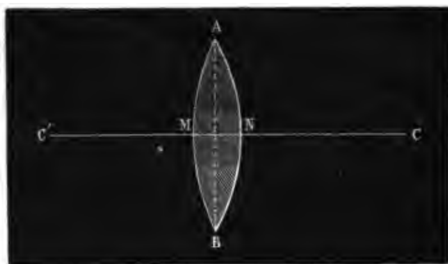


Fig. 537.

La droite CC' menée par le centre du cercle AB et perpendiculairement à son plan, s'appelle *axe de la lentille;* elle passe nécessairement par les centres C et C' des sphères dont font partie les segments AMB et ANB. Le problème que nous nous proposons maintenant de résoudre est de chercher l'action exercée par une lentille de cette espèce sur un faisceau de rayons lumineux qui la traverse; mais ici, comme nous l'avons remarqué page 201, nous nous bornerons au cas le plus simple, celui où les rayons incidents font de petits angles avec les normales aux points où ils rencontrent la surface réfringente. Or, pour que cette condition soit remplie, il faut : 1° que les arcs AMB, ANB ne soient que d'un très-petit nombre de degrés; 2° que la droite menée du point de divergence au centre de figure de la lentille ne fasse avec l'axe CC' qu'un angle de faible valeur; nous admettrons aussi, que l'épaisseur de la lentille est fort petite.

Ceci posé, supposons que les rayons lumineux divergent d'un point P (fig. 538) situé à une distance de la surface extérieure AMB, plus grande que $\frac{R}{n-1}$, n étant toujours l'indice de la substance dont la lentille est formée, et R le rayon de la face antérieure.

Alors, d'après ce que l'on a vu, p. 199, lorsque ces rayons auront pénétré dans la lentille, ils se trouveront, par le fait même des réfractions qu'ils auront subies à l'entrée, tous dirigés vers un point P'' situé sur la droite PC, à une distance p'' du point D donnée par la relation :

$$(1) \qquad \frac{1}{p} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{R}.$$

En traversant la seconde face AD'B pour rentrer dans l'air, ces rayons éprouvent de nouvelles déviations, et alors, en se repor-

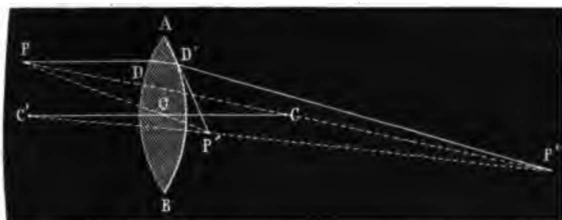


Fig. 538.

tant encore à ce qui a été dit, p. 204 *quatrième cas*, on voit que tous doivent venir converger en un point P' de la ligne P'C', distant de la lentille d'une quantité p' donnée par la relation :

$$(2) \qquad \frac{1}{p'} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{R'}.$$

Nous supposons ici que tous les points de la lentille sont à la même distance du point P' et aussi à même distance du point P. Ces hypothèses ne sont évidemment pas rigoureuses ; mais elles sont presque toujours suffisantes dans l'étude des effets des lentilles. La figure 538, il est vrai, ne les reproduit pas, mais nous avons dû exagérer les inclinaisons des lignes afin d'éviter toute confusion.

Si l'on ajoute les équations (1) et (2), p'' se trouve éliminé, et l'on obtient finalement une relation très-simple :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{R'},$$

entre p, p', et les quantités n, R, et R' qui, pour un rayon donné, ne dépendent que de la nature et de la forme de la lentille.

Mais il faut remarquer que cette relation fondamentale ne suffit pas pour déterminer la position du point de concours P', parce qu'elle indique seulement sa distance à la lentille. Pour faire disparaître l'indétermination, on est obligé d'assigner, comme nous l'avons fait précédemment, une ligne rencontrant la lentille, et sur laquelle se trouve le point dont il s'agit. Seule-

ment, la droite C'P'' dont nous nous sommes servi, ne se trouvant pas définie d'une manière simple, quand on a donné les positions du point lumineux et de la lentille, on lui en substitue une autre que nous allons maintenant faire connaître.

Centre optique. — Le *centre optique* d'une lentille est un point situé dans son intérieur, sur son axe principal, et à des distances OM et ON de ses faces respectivement proportionnelles à leurs rayons de courbure CM et C'N.

Lorsqu'un rayon lumineux traverse une lentille en passant par le point ainsi défini, il reste, à l'émergence, parallèle à sa direction primitive; en effet :

Soit O le centre optique d'une lentille AMB, SI, le rayon incident, IOI' la direction du rayon dans l'intérieur du verre, et I'S' la route qu'il suit à l'émergence.

Si l'on joint C'I et CI', on forme deux triangles C'IO, CI'O contenus dans un même plan; ces triangles sont semblables. En effet, les lignes CO et C'O sont proportionnelles à CI' et C'I, puisque l'on a

$$\frac{\text{OM}}{\text{ON}} = \frac{\text{CM}}{\text{C'N}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{CM} - \text{OM}}{\text{CM}} = \frac{\text{C'N} - \text{ON}}{\text{C'N}}$$

et de plus les angles égaux en O sont *obtus*.

Par suite, les angles en C et en C' sont égaux, et les côtés C'I et CI' sont parallèles.

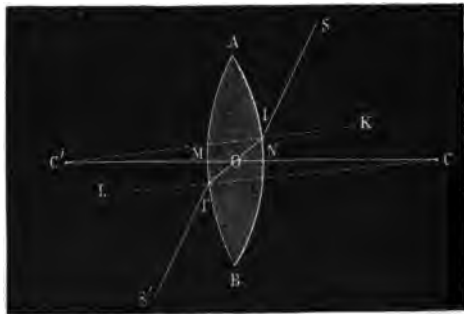


Fig. 539.

si g est l'épaiss[eur] de la lentille, on aura
$MO = g - NO$
$NO = g \frac{C_{,}N}{C_{,}N + CM}$
ou, en faisant :
$C_{,}N = r$
$CM = r_{,}$ $NO = g \frac{r}{r + r_{,}}$
si les deux centres étaient du même côté, alors $r_{,}$ serait négatif.

L'égalité des angles C'IO et OI'C, entraîne celle des angles SIK, LI'S' qui leur correspondent dans l'air. Ces deux derniers angles étant égaux et leurs côtés C'K, CL étant parallèles, il s'ensuit que I'S' est parallèle à IS.

Si l'épaisseur de la lentille est petite, et si l'angle d'incidence SIK n'est pas très-grand I'S' sera sensiblement le prolongement de SI. Ainsi, nous arrivons à cette conclusion, que le rayon dirigé d'un point extérieur vers le centre optique d'une lentille, la traverse sans se dévier.

Ceci posé, on voit que, pour déterminer complétement la position du point P' où vont concourir les rayons qui, partis d'un point lumineux P, tombent sur une lentille A biconvexe; il faut, par les points lumineux et le centre optique O, mener une droite indéfinie POP' et prendre sur elle le point P' dont la distance à la lentille satisfait à la relation établie plus haut :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{R'}.$$

Si l'on pose

$$\frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{R'} = \frac{1}{f},$$

la formule précédente se trouve avoir même forme que celle des miroirs convexes et se discute absolument de même.

f est évidemment la valeur de p' qui répond à $p = \infty$, c'est la distance focale principale de la lentille.

Il n'est pas inutile de remarquer que, quand on considère spécialement des lentilles de verre dont les deux faces ont même courbure, comme n est alors à très-peu près égal à $\frac{3}{2}$, on a simplement

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{R} = \frac{1}{R}.$$

Foyers virtuels. — Lorsque p est plus petit que f, alors la for-

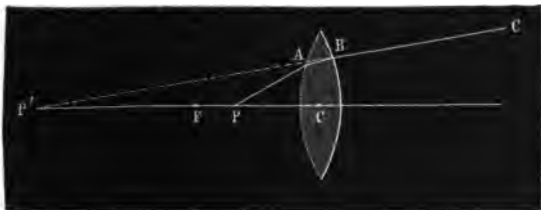


Fig. 540.

mule donne pour p' une valeur négative, et cela indique qu'alors les rayons lumineux ne sont plus amenés à convergence par leur passage au travers de la lentille.

La figure 540 représente alors la marche de la lumière.

Les rayons divergents des points P en pénétrant dans la lentille se rapprochent angulairement de la droite PFP' et semblent diverger d'un point de cette droite dont la distance à la lentille serait donnée par la formule

$$\frac{1}{p}-\frac{n}{p''}=\frac{n-1}{R},$$

en traversant la seconde face pour rentrer dans l'air, ils ne sont pas encore amenés à convergence, mais seulement ils ne conservent plus que le degré de divergence qu'ils auraient s'ils émanaient d'un point P' de l'axe PO, distant de la lentille d'une quantité p' donnée par la relation

$$\frac{n}{p''}-\frac{1}{p'}=\frac{n-1}{R'}.$$

En ajoutant cette relation et la précédente, on obtient la formule

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=\frac{n-1}{R}+\frac{n-1}{R'}=\frac{1}{f},$$

qui ne diffère que par le signe de p' de celle que nous avions établie d'abord.

§ 4. — DES IMAGES FORMÉES PAR LES LENTILLES.

Lentilles convexes. — Lorsqu'un objet lumineux AB (fig. 541) est placé devant une lentille biconvexe, à une distance plus grande

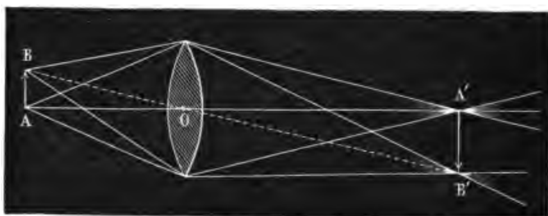


Fig. 541.

que la distance focale principale, chacun de ses points doit être considéré comme le sommet d'un faisceau conique de rayons qui,

tombent en divergeant sur la lentille, sont rendus convergents par son action réfringente, et vont se réunir en un point déterminé par nos précédentes formules. L'ensemble de tous ces points de concours forme dans l'espace une image réelle que l'on peut rendre visible en la recevant sur un verre dépoli. On peut la voir encore en plaçant l'œil au delà du lieu où elle se forme, et dans une position où il arrive à la fois quelques rayons de chacun des faisceaux qui se sont croisés en ses différents points.

Si l'objet lumineux est un petit arc de cercle ayant son centre au centre optique O de la lentille, l'image sera un autre arc de cercle ayant son centre au même point O, et comme les angles AOB A'OB' sont égaux, les longueurs AB et A'B' seront entre elles comme AO et A'O ou comme p et p'.

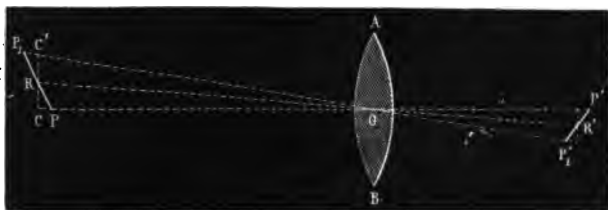


Fig. 542.

Mais, hors ce cas, on ne peut plus dire que l'image et l'objet soient côtés homologues de deux triangles semblables.

On le voit à l'inspection de la figure 542.

Lorsque la distance de l'objet à la lentille est plus petite que la distance focale principale, il ne se forme plus dans l'espace d'image réelle que l'on puisse recevoir sur un papier ou verre dépoli pour la rendre visible par diffusion.

Seulement, comme on l'a expliqué plus haut, les rayons partis d'un point P en avant de la lentille (fig. 543) semblent, après l'avoir traversée, diverger d'un point P' situé du même côté, mais à une distance plus grande donnée par la formule

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

La suite des points P' forme alors une image *virtuelle*, de même sens que l'objet, plus grande que lui, et dont la grandeur est toujours à celle de l'objet comme p' est à p.

Pour la voir, il faut placer l'œil derrière la lentille, de manière qu'il puisse recevoir à la fois quelques-uns des rayons qui sem-

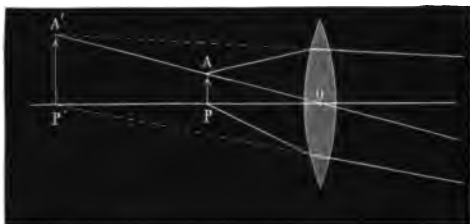


Fig. 543.

blent partir de chacun des différents points de A' P', alors, dans de bonnes conditions de distance, A'P' se voit distinctement.

Pour appliquer aux ménisques plans convexes tout ce que nous venons de dire, touchant les lentilles biconvexes, il suffit de supposer dans les raisonnements ou les formules précédentes, une valeur infinie au rayon de courbure de la face qui devient plane.

Lentilles concaves. — Les détails que nous avons donnés sur la théorie des lentilles convexes nous permettront de traiter rapidement des lentilles concaves.

Si des rayons tombent sur un verre de cette espèce en divergeant d'un point P (fig. 544), situé à une distance p de sa surface, ils sembleront, après avoir subi la réfraction à l'entrée, diverger d'un point P'' dont la distance p'' à la lentille sera donnée par la relation

$$-\frac{1}{p}+\frac{n}{p''}=\frac{n-1}{R}.$$

A la sortie, le faisceau, rendu plus divergent encore, semblera définitivement émaner d'un point dont la distance p' à la face d'émergence sera liée à p'' par la relation

$$\frac{1}{p'}-\frac{n}{p''}=\frac{n-1}{R'},$$

en ajoutant ces relations on obtient entre p et p' l'équation

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{n-1}{R}+\frac{n-1}{R'},$$

laquelle détermine complétement la position du point P', car on

sait d'ailleurs qu'il doit être sur la droite qui passe par P et le centre optique de la lentille.

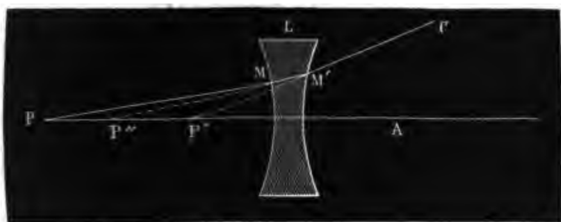


Fig. 544.

Les lentilles biconcaves ou plans-concaves ne forment pas d'images réelles des objets lumineux qui sont placés en avant de leur surface ; elles leur substituent seulement des images droites et qui, se trouvant à une distance du centre optique généralement plus petite que celle des objets, sont par cela même de grandeur réduite.

Remarque. — Toutes les formules données dans le 2e paragraphe de ce chapitre peuvent se déduire les unes des autres au moyen d'une règle assez simple. Dans le premier des cas que nous avons examinés, celui qui pour ainsi dire nous a servi de type, nous avons supposé que les rayons, divergeant d'un point situé dans l'air, tombaient sur une sphère de verre qui tournait vers eux sa convexité. — Or, si les rayons tombent en convergeant sur le verre, il faut dans la formule changer le signe de p. — Il faut changer le signe de r quand la surface de séparation des deux milieux tourne sa concavité vers les rayons incidents. Il faut remplacer n par $\frac{1}{n}$ quand les rayons passent du verre dans l'air au lieu de passer de l'air dans le verre.

CHAPITRE VII.

ABERRATIONS DES LENTILLES.

§ 1. — INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR.

Dans tout ce qui précède on a admis implicitement que les lentilles dont il s'agissait de calculer les effets n'avaient qu'une ouverture et une épaisseur extrêmement petites. Le plus souvent ces hypothèses conduisent à une approximation suffisante. Toutefois, comme en certains cas il faut apprécier le degré d'erreur qu'elles comportent, nous allons, dans quelques exemples particuliers, montrer comment on peut calculer l'influence qu'exercent et l'épaisseur et l'ouverture des verres dont on fait usage.

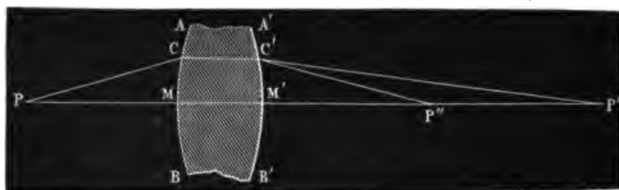


Fig. 545.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de calculer les effets d'une lentille de petite ouverture, mais d'épaisseur quelconque. Soient r et r' les deux rayons de courbure de la lentille, e son épaisseur, et n son indice de réfraction. Si la matière qui la forme était indéfiniment prolongée, un faisceau lumineux, parti d'un point P (fig. 545) situé sur l'axe à une distance p de la face antérieure AMB, irait converger à une distance p' donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r}.$$

Les rayons lumineux, convergeant vers P', se réfractent en traversant la deuxième face, et la distance de leur point de con-

cours P'' à la seconde face A'M'B' est donnée par l'équation

$$-\frac{1}{p'-e}+\frac{\frac{1}{n}}{p''}=-\frac{\frac{1}{n}-1}{r'},$$

ou

$$(2)\qquad -\frac{n}{p'-e}+\frac{1}{p''}=\frac{n-1}{r'}.$$

En ajoutant [1] et [2] on en déduit :

$$(3)\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p''}=\left(\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{r'}\right)+\frac{n}{p'-e}-\frac{n}{p'}=\frac{1}{f}+\frac{ne}{p'(p'-e)}.$$

Si l'on pose $p=\infty$, on tire de [1]

$$p'=\frac{nr}{n-1},$$

et alors l'équation (3) donne

$$\frac{1}{p''}=\frac{1}{f}+\frac{e}{r}\cdot\frac{(n-1)^2}{[nr-(n-1)e]}.$$

La distance du point de concours à la lentille change donc légèrement lorsqu'on retourne celle-ci, puisqu'il faut changer r en r' dans le second membre.

Si l'on supposait r et r' infinis et p quelconque, il viendrait :

$$p'=-np \qquad \text{et} \qquad p''=\frac{-np-e}{n},$$

$$p''=-p-\frac{e}{n}.$$

La marche des rayons est représentée fig. 546; et l'on voit

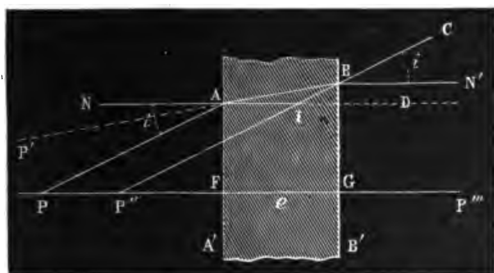


Fig. 546.

que, dans ce cas particulier, les formules qui conduisent à

la valeur de p'' s'établissent d'elles-mêmes ; car $\frac{AF}{p}$ et $\frac{AF}{-p'}$ d'une part, $\frac{BG}{-p''}$ et $\frac{BG}{-p'+e}$ d'autre part, sont des mesures d'angles d'incidence et de refraction qui se correspondent.

Si l'on considère un point Q hors de l'axe (fig. 547), il enverra entre autres, un rayon QO qui viendra tomber au milieu O de la

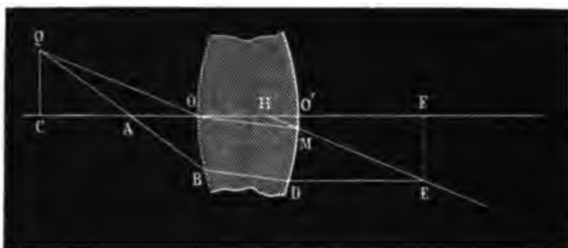


Fig. 547.

première face. Ce rayon se brise en entrant dans la lentille, se brise encore en sortant et son prolongement vient couper l'axe en H. Soit h la distance HO'; on aura, pour déterminer cette quantité, la relation

$$\frac{1}{e} - \frac{\frac{1}{n}}{h} = - \frac{\frac{1}{n} - 1}{r'},$$

$$\frac{n}{e} - \frac{1}{h} = \frac{n-1}{r'},$$

ou enfin

$$h = \frac{e}{n - (n-1)\frac{e}{r'}}.$$

Si un objet est compris dans l'angle QOC, l'image sera comprise dans l'angle MHO'. Or, il est facile de démontrer que MHO' est sensiblement égal à QOC. Soit en effet QOC $= i$; on aura :

$$O'OM = \frac{i}{n}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{O'M}{e} = \frac{i}{n},$$

$$O'M = \frac{ei}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{O'M}{O'H} = \frac{ei}{n} : \frac{e}{n-(n-1)\frac{e}{r'}},$$

$$\frac{O'M}{O'H} = \frac{i}{n} \times \left[n - (n-1)\frac{e}{r'}\right] = i\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{e}{r'}\right),$$

ce qui est très-sensiblement i, si le rapport $\frac{e}{r'}$ est une petite fraction comme cela arrive d'ordinaire.

Tous les rayons émanés du point Q vont, après leur passage à travers la lentille, concourir en un même point. Pour déterminer ce point, il suffit d'assigner deux droites sur lesquelles il se trouve. Or, déjà la ligne HM le contient ; pour obtenir une seconde droite satisfaisant à la même condition, soit A le point situé en avant de la lentille, à une distance AO $= b$, telle que les rayons émergents soient parallèles à l'axe. b est connu. Soit B le point où QA prolongé coupe la face antérieure de la lentille ; l'ordonnée y du point B s'obtiendra facilement. En effet, soit QC $= \alpha$ et CA $= \beta$; on a

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{y}{b}.$$

Le rayon AB se réfracte, et après sa réfraction il paraît venir d'un point de l'axe situé en avant de OB, à une distance p'.

Ce rayon vient couper la seconde face en un point D dont l'ordonnée y'' sera donnée par la relation :

$$\frac{y}{p'} = \frac{y''}{p'+e}.$$

Nous négligeons ici le sinus verse de l'arc OB.

Comme le rayon émergent est parallèle à l'axe, y'' sera aussi l'ordonnée du foyer conjugué du point Q, et en appelant x l'abscisse de ce foyer comptée à partir du point H, on a :

$$\frac{y''}{x} = tg\,\mathrm{MHO'};$$

or,

$$y'' = \frac{p'+e}{p'}y = \frac{p'+e}{p'}\frac{\alpha b}{\beta},$$

donc

$$x = \frac{p'+e}{p'} \times \frac{\alpha b}{\beta} \times \frac{1}{tg\,\mathrm{MHO'}},$$

ou, en posant tg MHO' $= N\, tg$ QOC,

$$x = \frac{p'+e}{p'}\frac{\alpha b}{\beta}\frac{1}{N\,tg\,\mathrm{QOC}} = \frac{p'+e}{p'}\frac{\alpha b}{\beta}\frac{b+\beta}{N\alpha};$$

$$x = \frac{p'+e}{p'}\frac{b}{\beta}\frac{b+\beta}{N};$$

dans cette équation, p' est déterminé par l'équation (1) de la page 214.

Ainsi donc x est le même dès l'instant que β est le même. En d'autres termes, tous les points de la perpendiculaire QC donnent leurs foyers sur la perpendiculaire EF. Par suite, l'image d'un objet tel que QC, fig. 547, situé à une distance p de la face antérieure de la lentille se forme à une distance p'' de la deuxième face donnée par l'équation (3) de la page 215, savoir :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p''}=\frac{1}{f}-\frac{ne}{p'(p'-e)}.$$

Ainsi, quant à la formation des images et à leurs positions, on arrive, sans négliger l'épaisseur de la lentille, à des résultats presque identiques à ceux que l'on obtient lorsqu'on n'en tient aucun compte.

§ 2. — INFLUENCE DE L'OUVERTURE.

Calcul de l'aberration longitudinale et de l'aberration latérale de sphéricité, pour une seule lentille. — Pour arriver au calcul des aberrations des lentilles, il faut d'abord considérer ce qui se passe lorsqu'il s'agit d'un ménisque indéfini comme celui de la figure 548.

Soit r le rayon de la surface sphérique AM; C son centre; n l'indice de réfraction de la substance qu'elle termine.



Fig. 548.

Soit p la distance AP du point lumineux à la surface réfringente, p' la distance focale conjuguée pour les rayons centraux; $p'+\delta p'$ la valeur de cette même distance pour les rayons marginaux. Posons $\mathrm{MI}=y$ et $\mathrm{CI}=x$; et enfin du centre C abaissons les droites CH et CK respectivement perpendiculaires sur PM et P'M.

Les triangles PMI, PCH sont semblables. Il en est de même de P'MI et P'CK.

Cette similitude conduit aux équations :

$$\frac{y}{PM} = \frac{CH}{p + r}, \qquad \text{d'où} \qquad CH = \frac{p + r}{PM} y,$$

$$\frac{y}{P'M} = \frac{CK}{p' + \delta p' - r}, \qquad \text{d'où} \qquad CK = \frac{(p' + \delta p' - r)}{P'M} y.$$

D'autre part on a :

$$CH = r \sin CMH,$$
$$CK = r \sin CMK,$$

et par suite :

$$\frac{CH}{CK} = n.$$

Ainsi :

$$\frac{p + r}{PM} = n \cdot \frac{(p' - r + \delta p')}{P'M}. \qquad (1)$$

On a encore :

$$\overline{PM}^2 = (p + r - x)^2 + y^2 = (p + r)^2 - 2(p + r)x + r^2,$$

et,

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

en négligeant les puissances supérieures de y,

$$x = r - \frac{y^2}{2r};$$

on en déduit :

$$\overline{PM}^2 = p^2 + \frac{p + r}{r} y^2,$$

$$PM = p + \frac{(p + r)y^2}{2pr}. \qquad (2)$$

La valeur de P'M se calculerait d'une manière analogue. Le triangle P'MC donne ;

$$\overline{P'M}^2 = (p' - r + x + \delta p')^2 + y^2.$$

On développe ; on remplace x par sa valeur, et, en négligeant $\delta p'^2$ et $\delta p' \times \frac{y^2}{r}$, on obtient :

$$\overline{P'M}^2 = (p' + \delta p')^2 - \frac{p' - r}{r} y^2,$$

et

$$P'M = p' + \delta p' - \frac{p' - r}{2p'r} y^2, \qquad (3)$$

Si l'on substitue, dans l'équation (1), les valeurs de PM et P'M données par les équations (2) et (3) on en tire :

$$\begin{aligned}(p+r)\left(p' + \delta p' - \frac{(p'-r)y^2}{2p'r}\right) \\ = n(p'-r+\delta p')\left(p + \frac{(p+r)y^2}{2pr}\right).\end{aligned} \qquad (4)$$

Dans le cas des rayons centraux, y est nul aussi bien que $\delta p'$, et l'équation précédente prend la forme connue (voir page 199):

$$(p+r)p' = np(p'-r).$$

Elle détermine le foyer relatif aux rayons centraux. Si l'on a égard à cette relation, et si l'on néglige toujours le produit de $\delta p'$ par y^2, l'équation [4] se simplifie et donne :

$$\delta p' = -\frac{(p+r)(p'-r)}{2r[(n-1)p-r]}\left(\frac{1}{p'} + \frac{n}{p}\right)y^2. \qquad (5)$$

Enfin l'équation

$$(p+r)\,p' = np\,(p'-r)$$

permet encore d'éliminer r de la valeur de $\delta p'$ qui devient alors :

$$\delta p' = -\frac{(p+p')^2\,(p+p'n)}{2(n-1)^2 p' p^3}\,y^2. \qquad (6)$$

Pour les rayons incidents parallèles, p est infini, et

$$\delta p' = \frac{-y^2}{2(n-1)^2 p'} = \frac{-y^2}{2nr(n-1)}. \qquad (7)$$

Aberration latérale. — Quant à l'aberration latérale P″ Q (fig. 548), on l'obtient en multipliant l'aberration longitudinale P′ P″ par $\frac{y}{\mathrm{P'I}}$ ou simplement par $\frac{y}{p'}$; elle est donc :

$$\frac{y\,\delta p'}{p'} = -\frac{(p+p')^2\,(p+p'n)}{2(n-1)^2 p'^2 p^3}\,y^3,$$

et, dans le cas des rayons parallèles, elle se réduit à :

$$\frac{-y^3}{2(n-1)^2 p'^2} = \frac{-y^3}{2n^2r^2}. \qquad (8)$$

Action de la deuxième surface de la lentille. — Si maintenant le faisceau de lumière, qui se propage vers le point P′,

(fig. 549) tant qu'il reste dans la lentille, sort dans l'air par une nouvelle surface de rayon r', on aura, comme on sait, la relation :

$$(9) \qquad \frac{1}{p''} - \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r'}$$

pour déterminer la distance p'' de la face d'émergence au point P'' (fig. 549) où concourent les rayons centraux.



Fig. 549.

Pour trouver le point où les rayons marginaux viennent couper l'axe, on raisonnera de la manière suivante :

Si vers le point P' convergeait un faisceau assez large pour couvrir toute la lentille, l'aberration $\delta p''$ due à l'action de la deuxième surface se déduirait dela formule (6) en y remplaçant :

$$p \text{ par } -p',$$
$$p' \text{ par } p'',$$
$$n \text{ par } \frac{1}{n},$$

on aurait alors :

$$\delta p'' = \frac{-(-p'+p'')^2\left(-p'+\frac{p''}{n}\right)n^2y^2}{-2(1-n)^2p''p'^3},$$

$$\delta p'' = \frac{n(p''-p')^2(p''-np')y^2}{2(1-n)^2p''p'^3}.$$

Cette quantité $\delta p''$ serait la distance du point de concours des rayons centraux donné par la formule (9) à celui des rayons marginaux.

Mais en réalité les rayons qui sortent par les bords de la face postérieure de la lentille se dirigeaient non pas vers P' mais vers un point P'_1 dont la distance à la lentille était $p' + \delta p'$.

Pour tous les rayons renfermés dans le cône convergeant en P'_1

la valeur de l'aberration produite par la seconde face est sensiblement la même que celle relative au cône des rayons convergeant en P'.

Seulement, l'origine à partir de laquelle il faut compter $\delta p''$ n'est plus la même que dans le premier cas. — Cette nouvelle origine est le point P''_1 où concourent les rayons centraux du faisceau convergent vers P'_1.

Soit $\Delta p''$ la distance $P'' - P''_1$; on a, pour la déterminer, la relation :

$$\frac{1}{p'' + \Delta p''} - \frac{n}{p' + \delta p'} = \frac{n-1}{r'},$$

et comme on a d'autre part :

$$\frac{1}{p''} - \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r'},$$

on obtient par soustraction :

$$\frac{\Delta p''}{p''^2} = \frac{n \delta p'}{p'^2} \qquad \Delta p'' = n \frac{p''^2}{p'^2} \delta p';$$

or

$$\Delta p'' = -\frac{p''^2}{p'^2} \frac{n(p+p')^2(p+p'n)y^2}{2(n-1)^2 p' p^3}.$$

L'aberration totale due à la lentille est donc :

$$\Delta p'' + \delta p'' = \text{A},$$

et l'on a

$$\text{A} = \Delta p'' + \delta p'' = \frac{n y^2 p''^2}{2(n-1)^2} \left[\frac{(p''-p')^2(p''-np')}{p''^3 p'^3} - \frac{(p+p')^2(p+p'n)}{p^3 p'^3} \right],$$

ou bien

$$(10) \quad \text{A} = \frac{n y^2 p''^2}{2(n-1)^2} \left[\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}\right)^2 \left(\frac{1}{p'} - \frac{n}{p''}\right) - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)^2 \left(\frac{1}{p'} + \frac{n}{p}\right) \right].$$

La valeur de A se simplifie lorsque $p = \infty$, et l'on peut sans longs calculs trouver la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure, pour que, la distance focale ayant une valeur déterminée, l'aberration soit minimum.

On reconnaît ainsi que, si $n = 3/2$, pour que l'aberration soit minimum, il faut que l'on ait $r' = 6r$.

Aberrations d'un nombre quelconque de lentilles. — On peut,

en suivant la marche précédente, calculer les aberrations produites par un système de verres aussi nombreux que l'on voudra. Soit, en effet, A et B (fig. 550) les foyers des rayons centraux et marginaux pour le cas de n lentilles. Si l'on en ajoute



Fig. 550.

une de plus, à la distance p de A, il arrivera d'abord que les rayons centraux iront converger en C à une distance $CO = x$ donnée par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f},$$

f étant la distance focale de la lentille ajoutée; et de même, les rayons centraux qui proviendraient du cône divergeant de B convergeraient en un point D situé à une distance z de la lentille donnée par la relation

$$\frac{1}{p + \mathrm{BA}} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f}.$$

Enfin, les rayons marginaux divergeant de B concourraient en un point E distant de D d'une quantité donnée par la formule qui donne généralement la valeur de l'aberration A relative à une seule lentille.

Aberrations d'un ménisque plan convexe. — La formule (10) se simplifie beaucoup lorsqu'il s'agit de ménisques plans convexes, et que l'on suppose le point de divergence situé à l'infini.

Dans l'hypothèse où $p = \infty$, on a :

$$A = \frac{n y^2 p''^2}{2 (n-1)^2} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}\right)^2 \left(\frac{1}{p'} - \frac{n}{p''}\right) - \left(\frac{1}{p'}\right)^8;$$

on a d'ailleurs :

$$\frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{nr},$$

et enfin comme on l'a rappelé à la page 221.

$$-\frac{1}{p'}+\frac{\frac{1}{n}}{p''}=-\left(\frac{\frac{1}{n}-1}{r'}\right).$$

$$-\frac{n}{p'}+\frac{1}{p''}=\frac{n-1}{r'}.$$

Si le ménisque a la face plane tournée vers l'objet, $r=\infty$ et $p'=\infty$.

Alors

$$A=\frac{ny^2 p''^2}{2(n-1)^2}\times\left(-\frac{n}{p''^3}\right)=-\frac{n^2y^2}{2(n-1)^2p''},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{1}{p''}$ par sa valeur $\frac{n-1}{r'}$,

$$A=-\frac{n^2y^2}{2(n-1)r'}.$$

Si le ménisque a la face convexe tournée vers l'objet, r' devient ∞, et $\frac{1}{p''}=+\frac{n}{p'}$.

$$A=\frac{ny^2p''^2}{2(n-1)^2}\left[\left(\frac{1-n}{p'}\right)^2\left(\frac{1-n^2}{p'}\right)-\left(\frac{1}{p'}\right)^3\right];$$

$$A=\frac{ny^2p''^2}{2p'^3}\left[(1-n^2)-1\right]$$

$$=\frac{ny^2\frac{p'^2}{n^2}}{2p'^3}\left[(1-n^2)-1\right]$$

$$=\frac{y^2}{2np'}\left[(1-n^2)-1\right]=-\frac{ny^2}{2p'}=-\frac{n(n-1)y^2}{2nr}.$$

Pour mettre en évidence la différence des points de concours des rayons centraux et des rayons marginaux, on prend une lentille ou un ménisque convexe de surface un peu considérable M, fig. 551. Sur une de ses faces on met un écran opaque percé de quatre trous, deux voisins du centre et deux près des bords. En avant de la lentille, on concentre, en un point A, un cône de rayons venus du soleil ou d'une lampe électrique. Il est bon que la distance du point A à la lentille ne soit que très-légère-

ment supérieure à la distance focale principale des rayons centraux. On voit alors, comme la figure le représente, les rayons



Fig. 551.

centraux s'entrecouper en C, à une distance considérable de la lentille, tandis que le point de concours B des rayons marginaux est beaucoup plus rapproché.

CHAPITRE VIII

DÉCOMPOSITION ET RECOMPOSITION DE LA LUMIÈRE.

§ 1. — DÉCOMPOSITION DE LA LUMIÈRE.

On savait, longtemps avant Newton, que les rayons solaires se teignent des couleurs de l'iris, en traversant un prisme de verre. Sénèque cite le fait, et Kepler y revient à plusieurs reprises; mais Kepler, pas plus que ses devanciers, n'avait déduit de cette notion les conséquences qu'elle renfermait. Newton les a décou-

vertes, et au premier livre de son *Traité d'optique*, il les développe en une série de propositions que nous allons resumer.

Spectre solaire. — La lumière blanche ou incolore qui vient du soleil est composée de rayons différemment réfrangibles et différemment colorés.

Pour démontrer l'exactitude de cet énoncé, on introduit dans une chambre noire un faisceau fort délié de rayons solaires SD (fig. 552), et on le reçoit sur un prisme ABC dont l'arête réfringente A est horizontale et en outre perpendiculaire à SD.

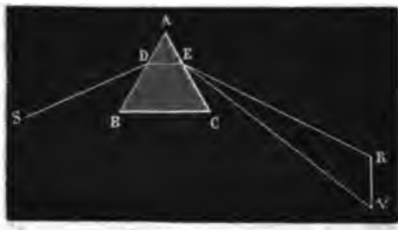


fig. 552.

En ces circonstances, le faisceau dévié de sa route première par l'action réfringente du prisme, se trouve en outre considérablement dilaté dans une direction perpendiculaire à l'arête du prisme.

Latéralement, aucun effet de dilatation n'est produit, en sorte que l'on obtient sur un écran perpendiculaire au plan ABC, une image oblongue RV dont la longueur est beaucoup plus grande que le diamètre de l'image ronde que les rayons solaires eussent formée sans l'interposition du prisme, mais dont la largeur est précisément égale à ce diamètre.

La dilatation du spectre solaire varie avec l'incidence des rayons sur la face antérieure du prisme; mais elle persiste toujours, même quand la déviation moyenne de l'image atteint sa valeur minimum. Or, en ces conditions, et Newton insiste fortement sur ce point, elle devrait être nulle, si tous les rayons dont le faisceau est formé avaient le même degré de réfrangibilité.

En effet, quand le prisme est dans la position relative au *minimum*, les *petites* différences qui peuvent exister dans les incidences des différents rayons élémentaires, n'en amènent *aucune* dans les déviations qu'ils subissent, et dès lors la réfraction ne saurait déformer l'image.

L'extrémité la moins réfrangible du spectre solaire lumineux,

celle qui en occupe la partie supérieure dans la figure 552 est d'un rouge sombre très-chaud de ton.

L'extrémité la plus réfrangible présente une teinte violette, pâle, se fondant dans une traînée grisâtre, limite extrême des rayons visibles de plus grande réfrangibilité. D'une extrémité à l'autre, les nuances passent les unes aux autres par dégradations insensibles, toutefois on distingue parfaitement les sept couleurs traditionnelles : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge.

Les faits que nous venons de décrire suffiraient à la rigueur pour établir la proposition fondamentale énoncée au commencement de ce paragraphe; mais à cause de son importance et de sa nouveauté, Newton a accumulé les preuves à l'appui de son exactitude. Seulement, comme la réussite complète des expériences suppose que l'on opère sur des spectres bien purs, il décrit avec détail la manière de se les procurer.

Règle pour former un spectre bien pur. — « Dans la lumière du soleil, introduite par un petit trou rond fait au volet de ma fenêtre, et environ à dix ou douze pieds de la fenêtre, je mis une lentille par laquelle l'image du trou pût être jetée distinctement sur une feuille de papier blanc placée à six, huit ou douze pieds de la lentille..., ensuite, immédiatement après la lentille, je mis un prisme par lequel la lumière transmise pût être jetée, par réfraction, en haut ou de côté; en vertu de quoi l'image ronde, que la lentille toute seule avait jetée sur le papier, put être formée en une image oblongue avec des côtés parallèles. Je fis tomber cette image oblongue sur un autre papier, à environ la même distance qu'auparavant, avançant le papier vers le prisme ou l'en éloignant jusqu'à ce que j'eusse trouvé la juste distance où les côtés rectilignes de l'image étaient marqués de la manière la plus distincte... Le mélange des rayons hétérogènes ne fut jamais moindre qu'en cette occasion.

« Toutefois, il est mieux encore de substituer au trou rond, un trou oblong en forme de parallélogramme et ayant sa grande longueur parallèle à l'arête réfringente du prisme; car, si ce trou a son petit côté égal au diamètre du trou rond primitivement employé, et si son grand côté est vingt ou trente fois plus considérable, la lumière de l'image sera aussi simple qu'auparavant, et comme l'image deviendra beaucoup plus large, sa lumière sera un sujet plus propre à faire les expériences. »

Les remarques suivantes font concevoir l'avantage que l'on trouve à employer ainsi une lentille pour la production d'un spectre.

Le diamètre apparent du soleil est d'environ $\frac{1}{2}$ degré. Par con-

séquent, dans le cas le plus favorable à la séparation des couleurs, celui où l'ouverture du volet se réduit à un simple point, les rayons blancs qui pénètrent dans la chambre noire forment un cône de $\frac{1}{2}$ degré d'ouverture. En traversant un prisme placé sur le trajet du faisceau, ces rayons se dispersent et chaque couleur homogène vient former sur le tableau un cercle de sa nuance et dont le diamètre vu du trou du volet sous-tend $\frac{1}{2}$ degré.

De là résulte qu'en chaque point du spectre, il y aura mélange d'une série de rayons qui, par suite de l'inégalité de leurs indices, auront éprouvé des déviations dont les différences auront toutes les valeurs possibles entre 0 et $\frac{1}{2}$ degré.

Mais si l'on reçoit, comme le prescrit Newton, les rayons incidents sur une lentille à long foyer placée à une distance de l'orifice double de sa distance focale, les rayons de chaque nuance formeront, à même distance de l'autre côté de la lentille, une image qui ne sera elle-même qu'un simple point lumineux, et ainsi, au point de concours, la séparation sera aussi complète que possible.

En réalité, l'orifice a toujours des dimensions appréciables; mais la confusion de rayons qui en résulte est ordinairement bien inférieure à celle qui aurait lieu si l'on n'employait pas la lentille.

Supposons que l'orifice ait 3 millimètres de large, la lentille $1^m,50$ de foyer, et qu'elle soit placée à 3 mètres de l'orifice; supposons, de plus, que le prisme soit contre la lentille, le tableau à 3 mètres de l'autre côté et qu'il soit à peu près perpendiculaire à la direction moyenne des rayons réfractés : chaque couleur simple y formera une bande de 3 millim. de large, et le spectre total aura une longueur à peu près égale à $3^m \times tg\ \omega$, ω étant l'angle compris entre les rayons extrêmes rouges et violets.

Sans lentille et à 3 mètres de l'orifice, le spectre occuperait sensiblement la même longueur, $3^m\ tg\ \omega$; mais la largeur de la bande, qui correspond à chaque couleur, au lieu d'être égale à $0^m,003$, serait $3^m\ tg\ 30'$, ou $0^m,062$, c'est-à-dire qu'elle serait 8 fois plus grande que dans le premier cas.

Rayons homogènes. — Si l'on fait tomber un spectre bien pur sur un écran noir et opaque, et si l'on perce en cet écran un trou de petites dimensions, les rayons qui le traverseront seront au point de vue de la réfrangibilité aussi homogènes que possible.

Si on les reçoit sur un second prisme, ils seront réfractés, mais leur teinte n'éprouvera aucune modification; de plus, sous l'incidence relative au minimum de déviation, la section droite du faisceau qu'ils forment ne sera point altérée.

Cette expérience fondamentale établit une connexion intime entre la réfrangibilité et la couleur. Comme cela devait être, elle a vivement frappé les contemporains de Newton, et l'on a formulé la vérité qu'elle démontre par la légende :

Non variat lux fracta colorem.

Mais, pour la reproduire convenablement, il est indispensable d'opérer sur des rayons bien homogènes. Du temps même de Newton, des physiciens habiles l'avaient révoquée en doute parce qu'ils n'avaient pas suffisamment épuré les spectres avec lesquels ils voulaient en vérifier l'exactitude.

Expérience des prismes croisés. — L'expérience des prismes croisés confirme les résultats précédents (fig. 553).

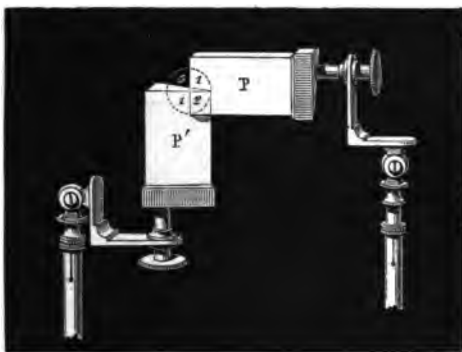


Fig. 553.

On dispose un prisme P, comme nous l'avons indiqué page 227, de manière à obtenir sur un tableau blanc un spectre dilaté verticalement et dans lequel le violet occupe la partie inférieure. Si alors, immédiatement derrière le premier prisme, on en place un autre de même nature et de même angle P' et dont l'arête soit verticale, ce second prisme recevant les rayons réfractés verticalement par le premier, les réfracte horizontalement, et chacun d'une quantité égale à celle dont il l'avait été par le premier, et alors, par suite de la superposition de ces deux déviations rectangulaires, le spectre que l'on obtient sur le tableau se trouve incliné à l'horizon d'un angle sensiblement égal à 45°, mais la largeur

de l'image, mesurée horizontalement, n'est pas augmentée, tandis que si chacun des rayons qui, dans le spectre vertical, forment une ligne horizontale quelconque se trouvait en son particulier dilaté par le second prisme comme le sont les rayons de lumière blanche en même occasion, le second spectre se serait trouvé dilaté en largeur autant que le premier l'avait été en longueur.

On rend l'expérience plus frappante en la disposant de manière à avoir à la fois sur le tableau la trace du rayon direct, le spectre formé par le premier prisme seul, le spectre formé par le second prisme seul, et enfin le spectre résultant.

Pour cela il suffit de placer les deux prismes (fig. 553) de telle sorte que leurs arêtes réfringentes passent toutes deux par le centre de la trace ronde du rayon direct. — Cette trace est alors partagée entre quatre quartiers égaux 0, 2, 1, 1; et il en est de même du faisceau total. La portion qui correspond au cadran 0 passe directement sans rencontrer les prismes et forme sur le tableau une image blanche A (fig. 554).

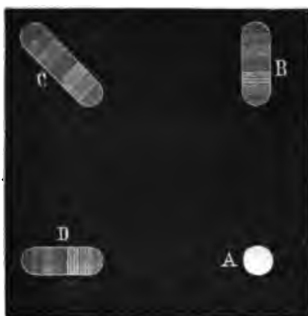


Fig. 554.

Les rayons qui passent par les cadrans 1 et 1 traversent le prisme P ou le prisme P' et donnent le spectre vertical B et le spectre horizontal D.

Enfin, ceux qui passent en 2 sont réfractés successivement par les deux prismes, et donnent le spectre résultant C.

Vision à travers les prismes. — Nous citerons encore deux autres preuves données par Newton à l'appui de sa théorie sur la composition de la lumière. La première est une expérience de vision à travers les prismes.

Si dans une chambre noire on fait tomber, en deux points voisins R et V d'une feuille de papier blanc (fig 555), deux rayons

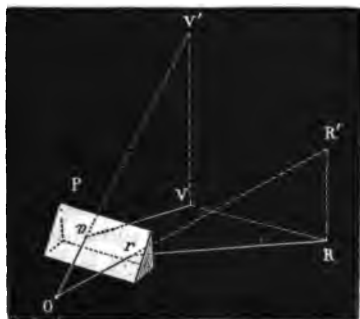


Fig. 555.

de lumière homogène l'un rouge, l'autre violet, en s'arrangeant de façon que les centres des deux taches lumineuses soient sur une même horizontale, et si on les regarde toutes deux à travers un prisme P dont l'arête réfringente soit elle-même horizontale et tournée en haut, on verra l'image violette V' beaucoup au-dessus de l'autre, ainsi qu'il est marqué sur la figure 555,

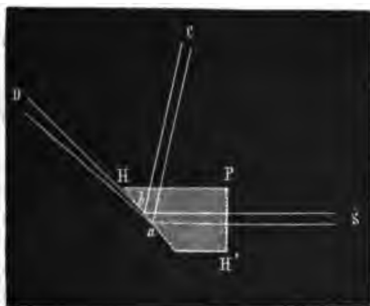


Fig. 556.

et cela parce que le rayon Ov est beaucoup plus incliné à l'horizon que le rayon Or.

On pourrait répéter l'expérience que nous venons de citer en regardant au travers d'un prisme une bande de papier dont les deux

moitiés seraient peintes l'une en rouge et l'autre en bleu. Ce fut même ainsi que Newton l'exécuta d'abord, mais les couleurs artificielles ne sont jamais bien pures, et, vue au travers d'un prisme, une bande de papier peinte donne toujours une image dilatée, une sorte de spectre dans lequel seulement prédomine beaucoup la couleur simple dont la nuance est voisine de celle du papier.

Enfin, lorsqu'on cherche à faire réfléchir totalement un faisceau de lumière blanche sur la face oblique d'un prisme semblable à celui qui a déjà été représenté (fig. 521) page 192 et que nous reproduisons ici (fig. 556), on peut, en faisant varier lentement l'angle d'incidence, séparer le faisceau S*a* en deux portions; l'une *a*D, formée des rayons les moins réfrangibles, émerge encore en rasant la face de sortie; tandis que l'autre *a*C se trouve complétement réfléchie vers la face supérieure, et la traverse en se mêlant à la portion de lumière blanche qui se trouve toujours réfléchie au point de séparation du verre et de l'air.

§ 2. — RECOMPOSITION DE LA LUMIÈRE BLANCHE.

Lorsque par l'action d'un prisme on a rendu divergents les rayons différemment colorés qui, primitivement parallèles et mêlés entre eux, formaient un faisceau de lumière solaire naturelle, on peut en les réunissant de nouveau reproduire cette lumière blanche dont on les avait fait dériver.

Newton a imaginé plusieurs procédés pour arriver à ce résultat.

Nous décrirons d'abord l'expérience qui est exposée au cinquième chapitre de la seconde partie du premier livre de l'optique, *Expérience X*.

Recomposition par les lentilles. — Dans une chambre noire on fait tomber sur un prisme ABC (fig. 557) un faisceau de lumière blanche, et l'on reçoit le spectre correspondant sur une lentille MN d'ouverture suffisamment grande et ayant une distance focale principale f, inférieure à la longueur p de la ligne qui joint le centre de la lentille au milieu de la face d'émergence AC.

En ces circonstances, si l'on place un écran blanc de l'autre côté de la lentille, à une distance p' à peu près égale à celle qu'on déduirait de l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, on verra le spectre tout entier s'y concentrer en une image parfaitement blanche.

Si l'on plaçait l'écran à une distance d du prisme, notablement différente de p', l'image blanche serait remplacée par un spectre d'autant moins pur que d serait plus éloigné de p', et dont la partie supérieure serait rouge ou violette suivant que l'on aurait $d >$ ou $< p'$.

La figure 557 a été prise dans l'optique de Newton. — En traversant le prisme AB, le faisceau incident F se transforme en un spectre qui tombe sur la lentille MN. Par l'action de celle-ci, le faisceau rouge Ttt' et le faisceau violet Ppp' se trouvent rejetés l'un vers l'autre, ils se recouvrent d'une manière à peu près complète en ab. C'est en ce point que la recomposition du blanc est complète.

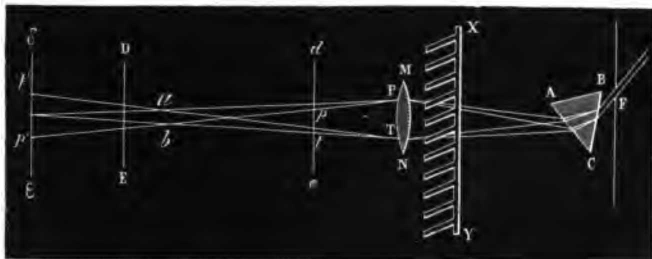


Fig. 557.

Si l'écran était placé en de, on aurait un spectre de même sens que celui qui couvre la lentille; en DE, les couleurs seraient disposées en sens inverse; mais la partie centrale serait blanchâtre. Sur l'écran $\delta\epsilon$ les rayons extrêmes seraient de nouveau séparés.

Si l'on interceptait quelques-unes des couleurs du spectre avant leur concentration en ab, l'image formée en ce point se colorerait. Elle prendrait une teinte rouge dans le cas où l'on arrêterait les rayons violets, et réciproquement.

La figure précédente est, à proprement parler, relative au cas où le faisceau qui tombe sur le prisme a déjà subi l'action d'une lentille, de telle sorte que les rayons de chaque teinte forment sur la surface de MN un foyer linéaire à partir duquel ils divergent ensuite. Souvent le croisement des rayons de chaque nuance n'a lieu qu'après leur passage au travers de MN; mais, dans tous les cas, c'est en ce point de croisement qu'il est le plus avantageux d'arrêter les rayons que l'on veut empêcher de concourir à la formation de la teinte recomposée. Au lieu d'arrêter avec un écran

opaque une des extrémités du spectre P′, on peut la recevoir sur un petit prisme qui la rejette latéralement; de cette manière on obtient à la fois sur le tableau deux images amplifiées de la section lumineuse du prisme, l'une est rouge, l'autre bleue.

M. Duboscq a disposé un appareil (fig. 558) à l'aide duquel on



Fig. 558.

obtient très-commodément cet effet: la lentille A est cylindrique, et le prisme P, qui sert à rejeter une partie du spectre, est porté sur un système de tiges articulées C, D, E, qui permet de le manœuvrer facilement.

Recomposition par les miroirs. — On peut aussi opérer la recomposition avec un miroir concave. Il faut toujours que l'image de la face lumineuse du prisme soit formée nettement sur l'écran à l'endroit où l'on veut obtenir la recomposition, et il faut éviter les réflexions trop obliques.

Enfin, en ces circonstances comme en toutes celles où l'on veut former des images, il faut autant que possible remplacer les miroirs étamés ordinaires, par des miroirs de verre argentés à leur face antérieure, ainsi que nous l'avons déjà indiqué plus haut.

Recomposition par un second prisme. — « Enfin, au lieu d'une lentille ou d'un miroir, on peut encore employer deux

prismes K et L (fig. 559), lesquels rompant la lumière en sens contraire à celui de la première réfraction, peuvent faire en sorte que les rayons divergents convergent et se réunissent en G, comme on le voit représenté dans la figure; car, dans l'endroit où les rayons se mêlent et s'unissent ensemble ils composent de la lumière blanche tout de même que quand on se sert d'une lentille. » (*Optique. Proposition.*) Si au lieu de placer en G l'écran sur lequel on observe le phénomène, on le rapprochait jusqu'en *de*, la tache lumineuse redeviendrait irisée.

Recomposition obtenue par la persistance des impressions sur la rétine. — La troisième solution que Newton a donnée au problème de la recomposition de la lumière blanche est fondée sur la persistance des impressions sur la rétine.

« Enfin, je fis un instrument en forme de peigne, dont les dents, au nombre de seize, avaient environ un pouce et demi de large, les intervalles des dents comprenant environ deux pouces, après quoi interposant successivement les dents de cet instrument tout auprès de la lentille (fig. 557), j'interceptai une partie des couleurs au moyen de la dent interposée, tandis que les autres couleurs, passant par l'intervalle de la dent, allaient tomber sur le papier et y faire une image du soleil de figure ronde. D'abord, je plaçais le papier de manière que l'image pût paraître

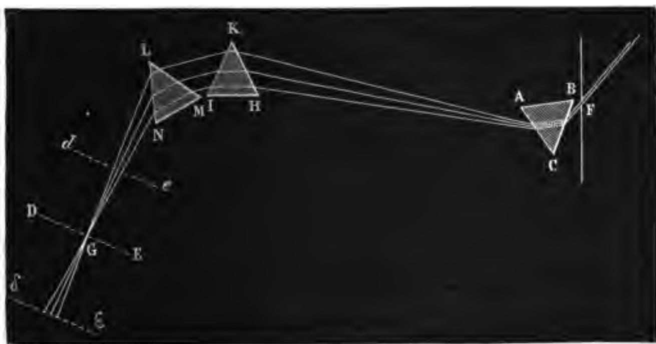


Fig. 559.

blanche toutes les fois qu'on retirait le peigne : après quoi le peigne étant interposé il arrivait qu'à cause de la partie des couleurs interceptée près de la lentille, cette blancheur se changeait toujours en une couleur, composée des couleurs qui n'étaient

pas interceptées... Et si je faisais passer le peigne lentement, on voyait une perpétuelle succession de couleurs sur le papier. Mais si je le faisais passer si rapidement que les couleurs ne pussent point être distinguées l'une de l'autre à cause qu'elles se succédaient trop vite, chacune de ces couleurs disparaissait en apparence, et de leur mélange confus il provenait une seule couleur d'un blanc uniforme... »

A l'expérience que nous venons de citer textuellement on en substitue ordinairement une autre plus facile à faire et qui conduit aux mêmes résultats.

On prend un disque de carton blanc et on le divise en quatre ou cinq groupes de secteurs. Les secteurs de chaque groupe sont au nombre de sept, ils sont inégaux et leurs angles au centre sont entre eux comme les nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{9}$. On les peint successivement en rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet, toujours dans le même ordre, puis on fixe le disque sur un axe passant par son centre, perpendiculaire à son plan, et l'on fait tourner cet axe avec une grande vitesse.

Les nuances différentes des secteurs successifs se fondent alors et disparaissent, et le disque paraît complétement blanc, au moins si l'on a la précaution de l'éclairer fortement en projetant sur sa surface un large faisceau de rayons solaires.

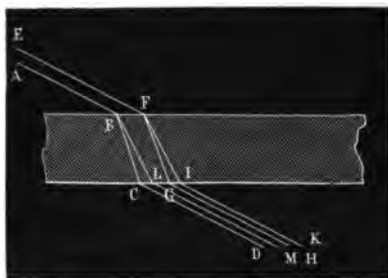


Fig. 560.

Si l'on n'avait pas recours à cet artifice, le disque pourrait paraître grisâtre à cause de l'absorption que les couleurs artificielles font éprouver à la lumière qui tombe sur elles.

Cette influence de l'éclairement du disque a été remarquée par Newton dans des conditions analogues à celles qui se trouvent réalisées dans l'expérience précédente.

Ayant composé une sorte de couleur grise par un mélange d'orpiment, de pourpre, d'azur et de vert-de-gris, il en mit une couche sur le plancher de sa chambre en un endroit où le soleil donnait dessus; puis il plaça un papier blanc dans l'ombre tout à côté de cet enduit, et se reculant à une certaine distance, il remarqua que l'enduit paraissait tout aussi blanc que le papier.

Lorsqu'un faisceau de lumière blanche ABEF (fig. 560) traverse obliquement un morceau de verre terminé par deux faces parallèles, il redevient blanc à la sortie, présentant seulement sur l'un de ses bords une légère teinte rouge et une teinte bleue de l'autre côté. Cet effet s'explique facilement d'après ce que nous avons vu sur la recomposition de la lumière.

En effet, dans l'intérieur, tous les rayons rouges provenant du faisceau primitif forment un nouveau faisceau, BFLI. Les rayons violets en forment un autre, BFCG, de direction différente.

Si le trait de lumière incidente était fort mince et la lame de verre assez épaisse, les rayons rouges et violets finiraient par se séparer complétement; à l'émergence ils redeviendraient parallèles entre eux et aux rayons incidents, mais ils ne se recouvriraient pas : le plus souvent les faisceaux rouges et violets se recouvrent en partie à l'émergence; dans la portion de l'espace où ils cheminent ensemble, il y a en même temps mélange des rayons de toutes les teintes intermédiaires et recomposition de lumière blanche, mais évidemment aux bords IK et CD cette superposition n'a plus lieu : le premier est teint de rouge, le second de violet.

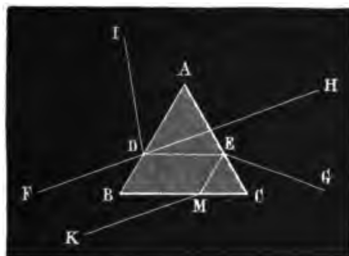


Fig. 561.

On obtient une recomposition de ce genre dans une expérience curieuse indiquée par Kepler. « Lorsque le soleil éclaire un prisme il en résulte trois sortes de rayons : un rayon blanc, un

rayon couleur du verre et un rayon teint des couleurs de l'iris. »

Le rayon blanc DI (fig. 561) est dû à la réflexion qu'éprouve, au point d'incidence D, une partie du faisceau incident; le rayon teint des couleurs de l'iris EG est le spectre dans lequel s'étalent les rayons élémentaires qui émergent en EG. Quant au troisième faisceau MK, celui que Kepler nomme *vitreum*, il est sensiblement blanc comme le premier, lorsque le prisme est lui-même formé d'un verre bien blanc et bien pur.

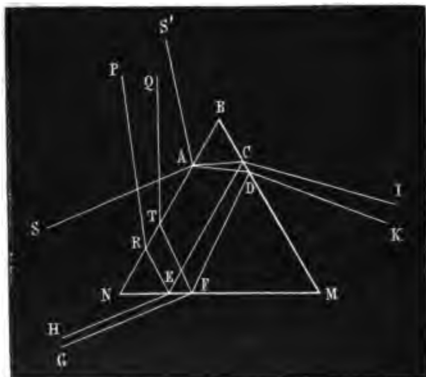


Fig. 562.

La figure 562 donne une idée plus complète du phénomène; les rayons de différentes teintes AC, AD qui rencontrent la face d'émergence BM, y éprouvent à l'intérieur une réflexion partielle, à la suite de laquelle ils rencontrent la face d'émergence MN en faisant avec elle des angles CEM, DFM respectivement égaux aux angles CAB, DAB. Cela résulte de ce que les angles en B et en M, les triangles ABC, CEM sont semblables entre eux, et il en est de même des triangles BAD, DFM. — Or, de ce que les angles CAB et CEM sont égaux, il résulte qu'il en est de même des angles NEH et SAN. On prouverait de même que NFG est égal à SAN. Donc EH et FG sont parallèles, et le faisceau qui émerge en EF est blanc.

Kepler n'avait remarqué que les trois rayons AS', CDIK, EFHG. En réalité, avec des prismes bien purs, on peut en apercevoir davantage ils sont alternativement colorés et blancs, mais leurs intensités décroissent rapidement et s'éteignent. Nous représentons,

sur la figure, en RTPQ le faisceau dispersé qui provient de la portion des rayons CE, DF qui, réfléchis en EF, émergent en RT...

Règle de Newton pour la détermination des teintes qui résultent du mélange d'un certain nombre de couleurs simples en proportions données. — Après avoir montré que l'on peut recomposer de la lumière blanche en réunissant toutes les couleurs du spectre, et former des teintes variables lorsqu'on rassemble seulement un certain nombre de rayons élémentaires, Newton a posé une règle au moyen de laquelle on peut déterminer à l'avance la couleur qui résultera du mélange d'un certain nombre de teintes élémentaires prises en des proportions déterminées.

Voici en quoi consiste cette règle. On décrit une circonférence de cercle; on la partage en sept arcs AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA, comprenant respectivement les nombres de degrés suivants :

AB = 60°45′34″; BC = 34°10′38″; CD = 54°41′1″; DE = 60°45′34″
EF = 54°41′1″; FG = 34°10′38″ GA = 60°45′34″.

Les longueurs de ces arcs n'ont aucun rapport avec les étendues, variables d'ailleurs, que les différentes couleurs occupent

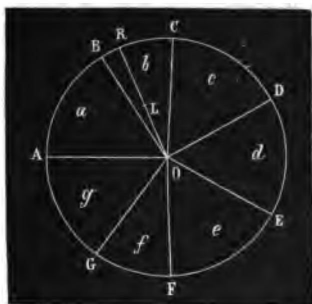


Fig. 563.

dans les spectres formés avec tel ou tel prisme; toutefois on conçoit que le premier représente le rouge, le second l'orangé, etc.

Par les procédés ordinaires de la géométrie, on détermine leurs centres de gravité *a, b, c, d, e, f, g*. Puis, si l'on veut connaître la teinte qui résulte du mélange de *m* parties de rouge, *n* de jaune

et *p* de bleu, on suppose appliqués aux points *a*, *c*, *e* des poids qui soient entre eux comme *m*, *n*, *p*. Soit L le centre de gravité du système qu'ils forment; on mène la ligne OL, et on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence au point R.

La teinte du mélange sera celle de la lumière simple que représente celui des arcs élémentaires dans lequel tombe le point R; et si le point R n'est pas au milieu de cet arc, mais s'approche de celui qui le précède ou de celui qui le suit, la teinte variera de manière à se rapprocher de celle de l'arc dont le point R lui-même se rapproche.

La teinte sera vive si le point L est voisin de la circonférence, très-lavée de blanc s'il est proche du centre O, et le rapport des lignes LR et LO indiquera la proportion de blanc dont est lavée la teinte indiquée par la position du point Q.

« Cette règle, dit Newton, n'est pas d'une rigueur mathématique, mais pour la pratique elle est assez exacte. Car, si dans l'expérience de la recomposition de la lumière blanche par une lentille, on arrête quelque couleur que ce soit, les autres couleurs qui passent au foyer y composeront, ou exactement ou à fort peu de chose près, la couleur qui, d'après cette règle, doit résulter de leur mélange.

« On arriverait aux mêmes résultats en supprimant plusieurs des couleurs du spectre à leur entrée dans la lentille... »

Pour le calcul des expériences dans lesquelles on supprime ainsi une ou plusieurs couleurs dans leur totalité, on applique aux centres de gravité des arcs qui représentent les couleurs non supprimées des poids proportionnels aux longueurs de ces arcs, ou, si l'on aime mieux, aux nombres de degrés qu'ils renferment.

Si l'on voulait, au contraire, déterminer la teinte qui résulterait du mélange de la moitié du rouge prismatique avec le tiers de l'orangé et le quart du vert, il faudrait appliquer en *a*, *b*, *d* des poids proportionnels à $\frac{1}{2} \times 60° 45' 34''$, $\frac{1}{3} \times 34° 10' 38''$, $\frac{1}{4} \times 60° 46' 34''$; et pour faire l'expérience, il faudrait se débarrasser de toutes les autres couleurs, et s'arranger de façon que celles que l'on conserve se superposent aussi exactement que possible.

CHAPITRE IX.

ABERRATIONS DE RÉFRANGIBILITÉ ET ACHROMATISME.

§ I. — ABERRATIONS DE RÉFRANGIBILITÉ.

Par suite de l'inégale réfrangibilité des rayons élémentaires, une lentille de verre ne fait pas converger à la même distance de son centre optique des rayons de diverses teintes partis d'un même point placé à distance fixe de sa face antérieure.

Newton a constaté le fait de la manière suivante : il forma un spectre bien pur en suivant les règles que nous avons reproduites page 227, et le fit tomber sur un livre imprimé ; « après quoi, prenant une lentille de 3 pieds et un demi-pouce de foyer, et la plaçant à six pieds et un pouce du livre pour rassembler les *espèces* ou images des caractères illuminés, à la même distance, de l'autre côté, il trouva que les images des caractères illuminés en bleu étaient environ trois pouces ou trois pouces et un quart plus proches de la lentille que celles des caractères illuminés d'un rouge foncé. »

Ainsi, dans l'expérience de Newton, le point lumineux étant à une distance de la lentille double de sa distance focale principale, la distance qui séparait les foyers des rayons de plus grande et de moindre réfrangibilité se trouvait être environ la $\frac{1}{22}$ partie de celle qui existe entre la lentille et le lieu moyen des foyers.

Lorsque les rayons étaient parallèles, la distance des foyers extrêmes ou, si l'on aime mieux, l'aberration longitudinale était notablement plus petite.

En général, pour deux rayons lumineux dont les indices sont n_1 et n_2, on a, si les deux faces de la lentille ont le même rayon de courbure R,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1} = \frac{2(n_1 - 1)}{R},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_2} = \frac{2(n_2 - 1)}{R},$$

d'où

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p'_2} = \frac{2(n_1 - n_2)}{R}$$

ou

$$\frac{p'_2 - p'_1}{p'_1} = \frac{2(n_1 - n_2)}{R} p'_1$$

ou très-sensiblement

$$\frac{p'_1 - p'_2}{\frac{1}{2}\left(p'_1 + p'_2\right)} = \frac{2(n_1 - n_2)}{R} \frac{1}{2}\left(p'_1 + p'_2\right).$$

La distance qui sépare les foyers des rayons extrêmes est l'aberration longitudinale de réfrangibilité. L'aberration latérale est le rayon Rl du cercle suivant lequel le cône des rayons violets est coupé par le plan mené perpendiculairement à l'axe, par le foyer R des rayons rouges (fig. 564). Or, on a

$$\frac{Rl}{LO} = \frac{VR}{VO}.$$

Ainsi, comme le remarque Newton, le rapport entre l'aberration latérale et la demi-ouverture de la lentille est le même

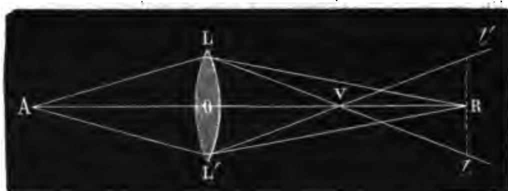


Fig. 564.

que celui de l'aberration longitudinale à la distance qui sépare la lentille du foyer des rayons violets. L représente le bord supérieur de la lentille, le point où cesse le cercle de cuivre qui l'entoure.

Pour mettre en évidence les aberrations de réfrangibilité des lentilles, on peut avoir recours au ménisque plan convexe représenté sur la figure 565. On place sur sa face plane un écran percé d'une fente circulaire, qui laisse passer les rayons marginaux venus du point lumineux L placé à une distance de la lentille un peu plus grande que la distance focale des rayons rouges. Alors, tandis que ceux-ci vont converger en un point H très-éloigné, les rayons violets convergent au contraire beaucoup plus près de la lentille en E. En plaçant donc un écran blanc successive-

ment en H et en E, on voit en H une tache d'un rouge vif entourée d'un cercle jaune et bordée d'une forte bande bleue ; en E au contraire la tache centrale obtenue sur l'écran est bleue, et elle est entourée d'une auréole rouge; en CD l'écran paraît blanc; enfin, entre la lentille et le point E, la section du cône lumineux est extérieurement bordée de rouge, elle l'est de bleue à une distance de AB supérieure à celle du point H.

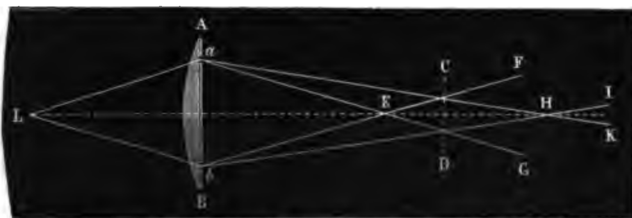


Fig. 563.

§ II. — ACHROMATISME DES PRISMES ET DES LENTILLES.

Les détails dans lesquels nous sommes entrés touchant les aberrations de réfrangibilité des lentilles montrent combien doivent être indécises sur leurs bords les images réelles qu'elles servent à former, et combien, par conséquent, il est important de remédier à ce défaut capital. Newton regardait « l'affaire comme désespérée »; mais, vers le milieu du siècle dernier, les expériences de Dollond [1] ont prouvé qu'il est possible d'obtenir, par réfraction, des images sensiblement achromatiques sur leurs bords, ou, ce qui revient au même, de former des objectifs réunissant à peu près au même foyer les rayons rouges et les rayons violets.

Achromatisme des prismes. — Nous allons faire connaître les procédés qui conduisent à la solution de la question; et, suivant l'usage, nous examinerons d'abord le cas où il s'agirait de construire un prisme achromatique, c'est-à-dire un prisme qui, tout en conservant aux rayons qui le traversent une certaine déviation, rendrait parallèles entre eux, à l'émergence, les rayons de deux ou trois teintes déterminées.

Enfin, pour écarter du calcul toute complication inutile, nous supposerons qu'il s'agisse de prismes de petits angles, et nous admettrons que les incidences sont faibles.

1. Célèbre opticien anglais.

Dans ce cas (fig. 566), si l'on représente, comme à la page 102, l'angle réfringent par A et l'indice par n, la formule qui donne la déviation D se réduit à

$$D = (n - 1)A,$$

car en général on a

$$D = i - r + i' - r' \qquad \text{et} \qquad r + r' = A,$$

et comme ici les angles i, i', r et r' sont petits $(i - r)$ devient $(n - 1)r$, et $(i' - r')$ devient $(n - 1)r'$.

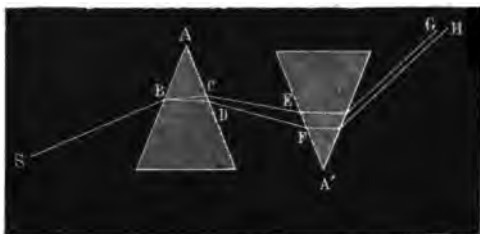


Fig. 566.

En traversant un autre prisme d'angle A' et dont l'indice de réfraction serait n', le rayon éprouverait une autre déviation dont la grandeur serait

$$D' = (n' - 1)A'$$

et cette déviation s'ajouterait à la première, ou s'en retrancherait suivant que les réfractions auraient lieu dans le même sens ou en sens opposé, et ainsi de suite.

En particulier, si l'on admet qu'il s'agit de deux prismes de positions inverses, la déviation d, que les rayons rouges SBCEG éprouvent en les traversant sera :

$$d_r = (n_r - 1)A - (n'_r - 1)A'.$$

et celle des rayons violets SBDFH :

$$d_v = (n_v - 1)A - (n'_v - 1)A'.$$

Pour que ces deux sortes de rayons soient parallèles à l'émer-

gence comme ils l'étaient à l'incidence, il faudra que l'on ait

$$d_r - d_v = 0$$

ou bien

$$(n_r - n_v)A = (n'_r - n'_v)A'.$$

Cette condition qui assure l'achromatisme du prisme composé ne lui ôte pas, en général, la propriété de dévier la lumière. Si, en effet, dans l'expression de d_r, on remplace A' par sa valeur tirée de l'équation précédente, il vient

$$d_r = (n_r - 1)A - \frac{(n'_r - 1)(n_r - n_v)}{n'_r - n'_v}A,$$

et cette expression n'est pas généralement nulle. Elle ne le deviendrait que si l'on avait

$$\frac{n'_r - n'_v}{n'_r - 1} = \frac{n_r - n_v}{n_r - 1},$$

et alors les deux substances pour lesquelles cette relation aurait lieu ne pourraient pas être employées à la construction d'un prisme achromatique.

Ce cas est précisément celui qui se présenterait si les déviations des différentes couleurs étaient proportionnelles entre elles dans les deux prismes dont on veut combiner les actions : alors en effet on aurait les deux équations suivantes :

$$\frac{A'}{A} \cdot \frac{n'_r - 1}{n_r - 1} = \frac{A'}{A} \cdot \frac{n'_v - 1}{n_v - 1},$$

ou

$$\frac{n'_r - 1}{n'_v - 1} = \frac{n_r - 1}{n_v - 1},$$

ou enfin

$$\frac{n'_r - n'_v}{n'_r - 1} = \frac{n_r - n_v}{n_r - 1}.$$

Mais la proportionnalité dont il s'agit ici n'est pas une loi de la nature, et quand elle se présente, on ne peut la regarder que comme un fait particulier.

On fait (fig. 567 et 568), à l'occasion de l'achromatisme des prismes, une expérience intéressante : on prend une sorte d'auge à quatre faces, deux en laiton, parfaitement immobiles, et deux en glace, qui peuvent s'écarter angulairement l'une de l'autre, de manière à faire entre elles un angle quelconque compris entre

zéro et 120° environ. On commence par rendre parallèles les faces de glace (fig. 567); puis on verse de l'eau dans l'auge et

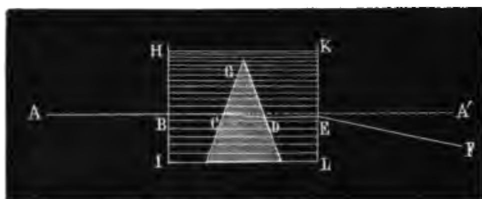


Fig. 567.

l'on y place un prisme de flint ayant l'angle réfringent tourné en haut. Un rayon de lumière qui traverse le système est alors dévié, rejeté vers la base du prisme de flint, et coloré de manière à présenter le violet en bas. Mais si l'on écarte l'une de

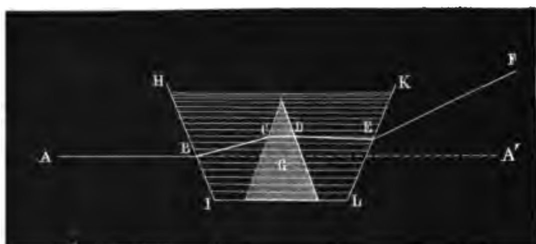


Fig. 568.

l'autre les faces mobiles de l'auge, on arrive bientôt à rendre parfaitement blanc le rayon transmis EF (fig. 568), tout en lui laissant une certaine déviation. Si, à partir de ce moment, on ouvre davantage l'angle du prisme à eau, l'image réfractée se colore de nouveau, mais le violet est à la partie supérieure.

Achromatisme des lentilles. — Lorsqu'il s'agit d'obtenir un système lenticulaire achromatique, on le forme d'ordinaire d'une lentille de crown biconvexe et d'une autre en flint qui peut être biconcave ou concave-convexe, mais dans laquelle alors le rayon de la concavité est moindre que celui de la convexité, de telle sorte que cette seconde lentille fonctionne comme biconcave. La condition de l'achromatisme est que les rayons rouges et violets,

partis d'un même point, concourent en un même point après avoir traversé le système réfringent.

Si l'on désigne par f_r la distance focale de la lentille de crown dans la lumière rouge, par p la distance qui la sépare du point de divergence, par p''_r celle à laquelle les rayons rouges iraient converger si la lentille de flint n'existait pas, on aurait entre ces quantités la relation :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p''_r} = \frac{1}{f_r}.$$

Maintenant le cône convergent tombe sur la lentille biconcave, que nous supposons tout proche de la première, et il reste convergent après l'avoir traversée ; seulement, le point de concours est rejeté à une distance p'_r plus considérable que p''_r, et si l'on appelle f'_r la distance focale de cette seconde lentille, on a entre p''_r, p'_r et f'_r la relation :

$$-\frac{1}{p''_r} + \frac{1}{p'_r} = -\frac{1}{f'_r},$$

en éliminant p''_r entre ces deux équations, il vient :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_r} = \frac{1}{f_r} - \frac{1}{f'_r};$$

pour les rayons violets on aurait de même :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_v} = \frac{1}{f_v} - \frac{1}{f'_v},$$

et pour que p'_r soit égal à p'_v, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{f_r} - \frac{1}{f_v} = \frac{1}{f'_r} - \frac{1}{f'_v}.$$

Soit r le rayon de la face antérieure de l'objectif composé ; r' celui des deux faces en regard, lesquelles ont même courbure, et enfin r'' le rayon de la face postérieure. Soit enfin n_r, n_v, n'_r, n'_v les indices des deux lentilles pour les rayons rouges et violets ; la condition de l'achromatisme devient :

$$\frac{n_r - 1}{r} + \frac{n_r - 1}{r'} - \frac{n_v - 1}{r} - \frac{n_v - 1}{r'}$$

$$= \frac{n'_r - 1}{r'} + \frac{n'_r - 1}{r''} - \frac{n'_v - 1}{r'} - \frac{n'_v - 1}{r''}$$

$$\frac{n_r - n_v}{r} + \frac{n_r - n_v}{r'} = \frac{n'_r - n'_v}{r'} + \frac{n'_r - n'_v}{r''}.$$

Cette équation renferme trois arbitraires r, r', r'', et ne peut que déterminer l'une d'elles en fonction des deux autres. Quant à celles-ci, on les choisit de façon que, d'une part, le système ait une distance focale déterminée, et que, d'autre part, les aberrations de sphéricité y soient aussi petites que possible.

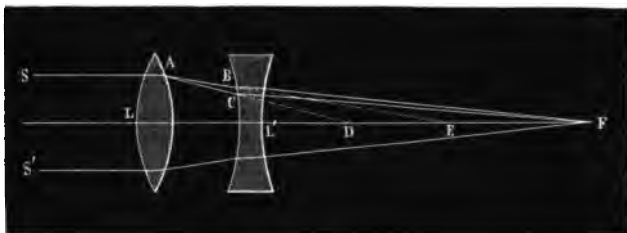


Fig. 569.

La figure 569 représente la marche du rayon dans un objectif achromatique. Sans l'interposition de la deuxième lentille, le faisceau incident SS' formerait derrière la première, un foyer violet en D et un foyer rouge en E. La deuxième lentille rassemble les deux sortes de rayons en un foyer unique F, beaucoup plus éloigné des verres que les points D et E. La lentille biconvexe, quand on l'emploie seule, donne des images bordées d'auréoles; mais elle a un court foyer, et, par suite, forme à même distance des images beaucoup plus amplifiées que celles que fournit l'ensemble des deux verres.



Fig. 570.

La figure 570 représente un appareil que l'on peut employer pour mettre en évidence l'action des deux lentilles du verre achromatique. — Le coulant D sert à rapprocher ou à éloigner la lentille A de la lentille B. — La vis C permet de fixer B dans la position indiquée sur la figure ou de a laisser retomber contre le pied EF.

CHAPITRE X

INSTRUMENTS D'OPTIQUE.

Dans ce chapitre, on traitera d'abord de quelques instruments d'optique, dont la disposition et les effets se comprennent, indépendamment de toute notion sur le mécanisme de la vision.

Puis on décrira sommairement l'œil, et l'on indiquera les opinions généralement reçues touchant la manière dont nous estimons la grandeur, la distance et le relief des objets.

Enfin on insistera sur l'étude des microscopes simples et composés, des lunettes et des télescopes.

§ I. — LAMPE DE M. SOLEIL. — CHAMBRE NOIRE. — MICROSCOPE SOLAIRE.

On est souvent gêné dans les expériences d'optique par l'absence des rayons solaires, et dès lors on a dû chercher des dispositions qui permissent d'obtenir, à l'aide de lumières artificielles, des faisceaux de rayons, ayant, quoiqu'à un degré bien inférieur, quelque chose du parallélisme et de l'intensité des rayons solaires.

Lampe de M. Soleil. — La disposition à laquelle M. Soleil s'est arrêté est toute semblable à celle que Kepler indique comme pou-

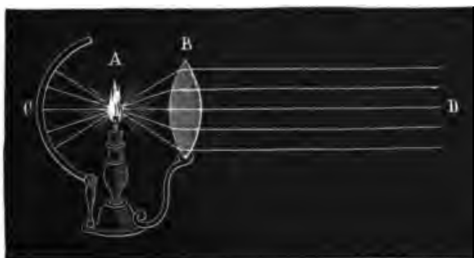


Fig. 571.

vant servir à envoyer, la nuit, à grande distance, un faisceau lumineux. L'appareil donné par Kepler est reproduit fig. 571.

La source lumineuse est placée au foyer principal d'une lentille B qui rassemble en un faisceau sensiblement cylindrique tous les rayons compris dans l'intérieur du cône divergeant du point A et circonscrit à la lentille B; de plus, de l'autre côté de la source, en C, est placée une portion de miroir sphérique concave, ayant son centre précisément au foyer lumineux, et qui, par suite, réfléchit sur eux-mêmes tous les rayons qui lui arrivent.

La lumière lancée vers le miroir revient donc, en majeure partie au moins, se joindre à celle qui forme le cône dont la génératrice est AB', et accroît ainsi, dans une forte proportion, l'intensité du faisceau parallèle définitif.

Dans l'appareil de M. Soleil (fig. 572), la source et le miroir

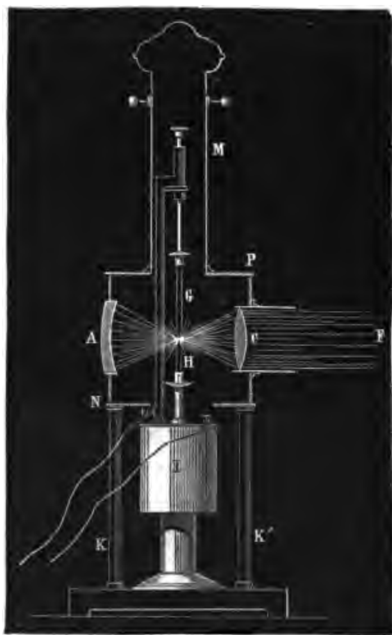


Fig. 572.

sont enfermés dans une boîte à parois opaques MPN soutenue par des colonnes K et K'. La lentille C est portée par un tube à tirage qui permet d'en faire varier la position. Quant à la source

lumineuse, elle peut être une lampe ordinaire, un morceau de chaux porté à l'incandescence par la flamme d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène, ou enfin les extrémités incandescentes de deux pointes de charbon G et H entre lesquelles se transmet un courant électrique énergique.



Fig. 573.

Cette dernière source est d'un emploi très-commode pour les cours. Nous décrirons ultérieurement les mécanismes qui ont été successivement adoptés pour maintenir les charbons à distance à peu près constante. Ici nous ajouterons seulement que, pour graduer la largeur du faisceau que l'on veut employer, on recouvre le tube qui porte la lentille C avec le diaphragme à trous ABH (fig. 573); H est le disque mobile percé de trous de différentes grandeurs, D le centre de mouvement.

Chambre noire. — J. B. Porta paraît être le premier qui ait employé les lentilles convexes comme objectifs, ou, si l'on aime mieux, qui les ait utilisées pour faire des images réelles des objets.

Maurolyc avait étudié les apparences que l'on observe dans une chambre obscure, voir page 153, lorsque les rayons lumineux, venus des objets extérieurs, peuvent y pénétrer par une petite ouverture; mais, comme nous l'avons indiqué, ces images présentent toujours beaucoup d'indécision sur leurs contours.

Porta remarqua qu'elles acquièrent un degré de netteté remarquable lorsqu'on place une lentille biconvexe en avant de l'ouver-

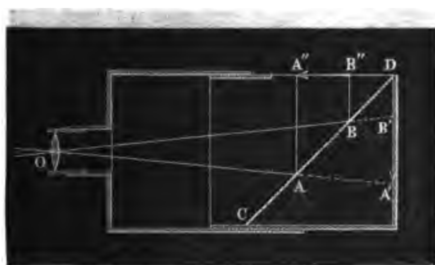


Fig. 374.

ture, et il dota ainsi la science de l'appareil connu sous le nom de chambre noire.

La chambre noire peut être avantageusement employée pour copier un paysage. Seulement, comme il est commode d'avoir dans une position horizontale l'image dont on veut suivre le contour avec la pointe du crayon, on reçoit les rayons sur une glace CD (fig. 574), inclinée à 45° sur l'axe de la lentille, les rayons qui iraient peindre en A'B' sur un verre dépoli l'image des objets extérieurs.

Il est essentiel de remarquer que, grâce à la double action de la lentille et de la glace, les images se trouvent redressées sur le tableau. — Il faut aussi se rappeler que la distance des images à la lentille varie en même temps que celle de la lentille aux objets que l'on veut reproduire. Par suite, lorsqu'on voudra prendre une vue, il faudra commencer par ajuster le verre O au moyen du tube à tirage qui le porte, de manière que la vue à reproduire soit peinte aussi nettement que possible sur la glace. — Enfin pour que ces images ne soient point noyées dans une trop grande quantité de lumière extérieure, il faut arrêter l'accès de celle-ci à l'aide d'une toile noire ou au moins fort opaque dont on forme une sorte de petite tente, suffisante pour contenir à la fois l'appareil et la moitié du corps de l'opérateur.

La chambre noire sert ordinairement à faire les images réduites d'un monument, d'un paysage, etc. Mais l'objectif dont elle est munie pourrait tout aussi bien être employé à former une image amplifiée d'un objet que l'on placerait à une distance suffisamment petite de sa surface extérieure.

Lanterne magique. — Faire sur un papier avec un ou deux verres convexes des images droites des objets extérieurs, les faire tantôt plus grandes et tantôt plus petites, sont toutes

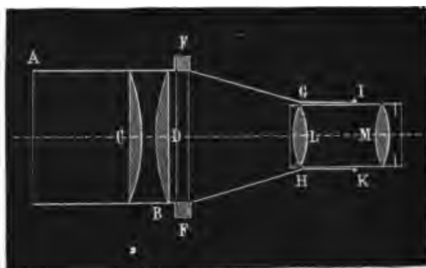


Fig. 575.

questions dont Kepler donne la solution dans sa dioptrique; mais les solutions de Kepler sont presque exclusivement théoriques,

Le père Kircher paraît être un de ceux qui se sont les premiers occupés de construire des appareils propres à réaliser, sous une forme plus ou moins intéressante, les expériences auxquelles elles conduisaient.

L'*Ars magna lucis et umbræ* expose avec de grands détails les effets que Kircher se plaisait à obtenir. Ce sont, à proprement parler, ceux de la lanterne magique.

M. Duboscq a ajouté à l'appareil éclairant décrit plus haut une pièce (fig. 575) à l'aide de laquelle on projette commodément sur un tableau les images amplifiées de vues photographiques prises sur verre ou plus généralement de figures tracées sur lames transparentes, de telle sorte que l'ensemble constitue la lanterne magique perfectionnée. Le tube AB (fig. 575), dans lequel entrent les rayons émanés de la source, porte un système de lentilles éclairantes C et D. On place la vue à projeter dans la coulisse FF. Enfin l'objectif est double et formé par deux lentilles L et M, qui sont montées dans une même bague mobile dans le tube GIHK.

On peut aussi, avec le même appareil, projeter, toujours sous des dimensions amplifiées, les images d'objets opaques, d'un médaillon, par exemple : on place le médaillon dans la lanterne même, et grâce au puissant éclairement de l'arc électrique, l'image très-amplifiée, qui se trouve formée sur un tableau blanc, placée à 4 mètres de l'appareil, est encore assez lumineuse pour être vue de tout un amphithéâtre.

Microscope solaire. — Microscope à gaz. — Microscope électrique. — Comme la lanterne magique, le microscope solaire est

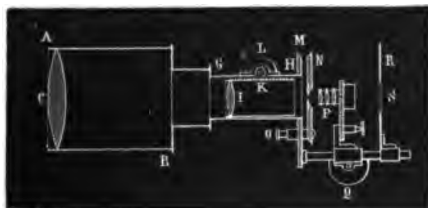


Fig. 576.

destiné à former des images agrandies d'objets transparents. Seulement l'amplification doit être extrême, et dès lors il faut éclairer très-fortement les objets. — A cet effet, on reçoit les rayons solaires sur le miroir d'un héliostat qui les projette sur

une large lentille C (fig. 576), placée à l'une des extrémités du tube AB qui sert de support général à tout l'appareil.

Une deuxième lentille de plus court foyer, I, reçoit le faisceau et le fait converger près de l'ouverture du diaphragme N et un peu en deçà de cette ouverture; la lentille I est mobile dans le tube GH, et reçoit le mouvement de la crémaillère K. L'objet microscopique est ordinairement placé entre deux lames de verre; il est maintenu dans la pince à ressort OHMN.

L'objectif est achromatique, il peut être formé d'une seule lentille à très-court foyer P. — Ordinairement on en superpose plusieurs pour avoir un plus fort grossissement.

Le système est porté au bout du tube qui peut être rapproché ou écarté de l'objet à l'aide d'une crémaillère et d'une vis Q.

Lorsqu'on veut employer la lumière électrique ou celle de la craie incandescente, il suffit de monter le microscope sur la lanterne ordinaire.

Dans tous les cas, il faut avoir soin d'opérer dans une pièce bien obscure : toute lumière étrangère nuirait singulièrement à la beauté des images.

§ 2. — PHOTOGRAPHIE.

A la fin du siècle dernier, Charles, dans les cours qu'il faisait à Paris, utilisait les propriétés du chlorure d'argent pour obtenir, sur un papier enduit de cette substance, des silhouettes fugitives d'objets qu'il pouvait appliquer contre le papier lui-même. — On conçoit, en effet, que si l'on recouvre un papier d'une substance impressionnable à la lumière, il suffit d'appliquer sur une partie de sa surface un corps plat et opaque, pour soustraire l'enduit sous-jacent à l'action lumineuse, en tous les points recouverts par cette sorte d'écran.

Lorsque le recto du papier était devenu noir, on enlevait le corps que l'on avait appliqué sur lui, et alors la silhouette de ce dernier restait blanche au moins pendant quelque temps. Mais il eût fallu trouver le moyen de fixer ces images, et c'est ce que Charles ne paraît pas avoir fait. Vers la même époque Wegdwood et Davy, en Angleterre, obtenaient dans la chambre noire quelques copies de vitraux d'église, en en faisant tomber les images sur des papiers enduits les uns de nitrate, les autres de chlorure d'argent. — Mais, pas plus que Charles, ces savants ne savaient conserver les impressions photographiques ainsi obtenues.

Joseph-Nicéphore Niepce résolut la question vers 1814. — La

substance sensible dont il faisait usage était une sorte de vernis formé de bitume de Judée, dissous dans l'essence de lavande et auquel il avait trouvé la remarquable propriété de se modifier, sous l'action de la lumière, de manière à devenir insoluble dans l'essence. — Il enduisait de ce vernis une plaque de cuivre disposée pour la gravure, puis il appliquait dessus l'objet à reproduire, soit une gravure, et il exposait le tout au jour. — Au bout d'un certain temps, le vernis, complétement préservé sous les noirs, était devenu tout à fait insoluble sous les clairs, et à demi-insoluble dans les demi-teintes. — Alors il traitait la plaque ainsi *impressionnée*, d'abord par un dissolvant formé d'huile de pétrole et d'essence de lavande, et puis par l'eau : par ce moyen il enlevait le vernis partout où les noirs avaient arrêté l'action de la lumière, et le laissait subsister là où avaient été les clairs. — Il *développait* donc l'image, en ce sens que les portions persistantes de l'enduit reproduisaient les clairs en diffusant la lumière à leur surface, tandis que les parties métalliques, mises à nu, ne renvoyaient à l'œil aucun rayon, sauf le cas particulier où elles se trouvaient, par rapport à l'œil, dans une position telle qu'elles pussent réfléchir régulièrement vers lui les rayons incidents. — Enfin, on pouvait transformer la plaque en une planche à graver en la passant à l'eau forte. Le vernis insoluble préservait le cuivre partout où il était resté, et la place des noirs se trouvait creusée par l'acide.

Plus tard, ainsi qu'il résulte des communications faites à la Société royale de Londres, J.-N. Niepce, parvint aussi à reproduire, d'une manière analogue, les images de la chambre noire. Mais le temps ne lui permit pas de donner à ses résultats tout le degré de perfection désirable.

Plaques. — En 1838, Daguerre donna une solution complète du problème de la photographie ; il parvint à fixer complétement les images que l'on obtient dans les chambres noires. Au lieu de planches à graver, il fit des tableaux.

La substance sensible dont il faisait usage était l'iodure d'argent, et, pour l'obtenir en voile excessivement mince, appliqué sur un fond solide, il exposait pendant quelques minutes à vapeur d'une couche d'iode prise à la température ordinaire une plaque de cuivre argentée, parfaitement propre. L'exposition à l'iode se faisait nécessairement dans l'obscurité.

Quand la plaque avait été ainsi préparée, on faisait agir sur elle la lumière, en la substituant dans la chambre noire à la glace dépolie sur laquelle on forme d'ordinaire les images des objets.

Dans les chambres destinées à la photographie, cette plaque est verticale, et n'est fixée que dans une coulisse.

Au bout d'un temps qui nous semble actuellement fort long, vingt minutes environ, l'iodure était impressionné. — Toutefois il n'y avait pas d'image visible, et la faire apparaître était un problème fort difficile. Après beaucoup d'essais, M. Daguerre reconnut qu'on peut y arriver en exposant, toujours dans l'obscurité, la plaque impressionnée à l'action des rares vapeurs mercurielles qui s'échappent d'un bain de ce métal chauffé à 60°; d'imperceptibles gouttelettes de mercure se fixent sur la plaque partout où l'iodure a été attaqué, et cela en proportion d'autant plus grande que l'action de la lumière a été plus forte. Il ne s'en dépose pas aux endroits des noirs.

Quand on a fait ainsi apparaître l'image, on la fixe en lavant la plaque dans l'hyposulfite de soude, lequel dissout tout l'iodure non attaqué, de sorte que la plaque n'éprouve plus d'altération ultérieure.

Ainsi, les noirs de l'image sont aux points où le métal a conservé son poli spéculaire, et les blancs aux endroits où la plaque s'est recouverte d'une poudre mercurielle mate et diffusante.



Fig. 577.



Fig. 578.

De là résulte que, si l'on regarde la plaque en plaçant l'œil dans la direction suivant laquelle se réfléchit régulièrement la majeure partie de la lumière éclairante, l'image paraît inverse de ce qu'elle est d'ordinaire, les clairs deviennent noirs et réciproquement, parce qu'en ces circonstances particulières la réflexion est plus intense sur le métal poli que sur la poudre de mercure.

M. Claudet a apporté aux procédés de Daguerre un perfectionnement extrêmement important. Il a montré qu'on accélère sin-

gulièrement l'action de la lumière en exposant, pendant quelques secondes, la plaque iodée à la vapeur de chlorure d'iode. Et les travaux successifs de M. Fiseau d'une part, de M. Foucault d'autre part, ont montré que la vapeur de brome donne des résultats meilleurs encore. M. Fiseau employait l'eau bromée, M. Foucault a utilisé avec succès le bromure de chaux, et la grande commodité qui résulte de l'état solide de ce produit l'a fait généralement adopter.

Lorsqu'on veut faire une épreuve Daguerrienne, il faut commencer par débarrasser exactement la plaque que l'on doit iodurer de toute substance étrangère, et en particulier des matières grasses qui la recouvrent toujours. A cet effet on l'assujettit sur un support en bois, formé d'un pied solide *c* (fig. 577) muni d'une pince à vis *d* qui permet de la fixer sur une table, et d'une planche *ab* dont les dimensions soit égales à celles de la plaque. On verse sur cette dernière un peu d'alcool, puis on y projette de la ponce très-fine ou de la terre pourrie, et l'on frotte avec un tampon de coton cardé très-propre. Quand on a obtenu une surface bien brillante, on lui donne le dernier fini avec deux polissoirs, le premier au rouge d'Angleterre, le second à surface nue (fig. 578).

On place alors la plaque sur une petite planchette, on l'y assujettit avec des taquets, puis on l'expose à l'iode.

L'iode est renfermé dans une cuve carrée, en porcelaine E ou

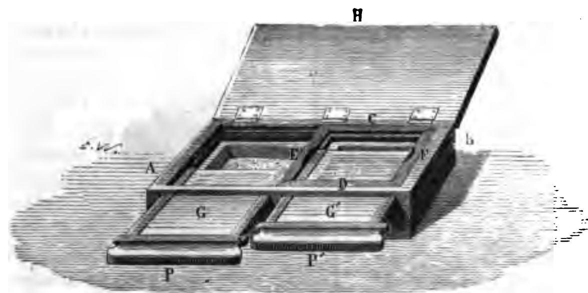


Fig. 579.

F (fig. 579), entourée à sa partie supérieure d'un cadre de bois dans lequel la plaque peut entrer exactement; à travers le cadre glisse une plaque de verre PG ou P' G' qui sert à arrêter les émanations d'iode quand on ne veut pas les employer.

La durée de l'exposition à l'iode varie entre une et deux minutes, suivant la température. Ordinairement on s'arrête quand la plaque a pris une teinte jaune d'or. — On l'expose alors aux vapeurs qui se dégagent d'une couche de bromure de chaux renfermée dans une cuve identique à la cuve à iode. Au bout de quelques secondes la plaque est rose; on l'enlève et on la remet un instant au contact les vapeurs d'iode. Aussitôt qu'elle a acquis ainsi son maximum de sensibilité, on la place dans un châssis dont le fond glisse dans une coulisse, et par conséquent peut s'ouvrir. La face sensibilisée se trouve tournée vers ce fond quand la plaque est en place. La figure 580 représente un châssis de cette espèce : EDGF, cadre en bois; BEA, planchette qui peut se lever et s'abaisser dans une coulisse; DH, fond pouvant s'ouvrir ou se fermer en pivotant autour d'une charnière.

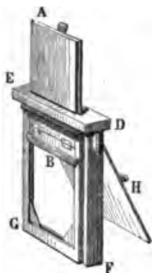


Fig. 580.

Toutes ces opérations doivent être faites dans une chambre noire à la lueur d'une bougie; quand elles sont terminées, on fait agir la lumière. — Comme nous l'avons déjà dit, la chambre noire que l'on emploie forme les images sur une plaque verticale en verre dépoli, soutenue dans un cadre qui glisse dans une coulisse; de sorte qu'elle peut être mise en place et enlevée sans difficulté. On tire la chambre, on fait mouvoir l'objectif jusqu'à ce que les images soient nettes, et alors on

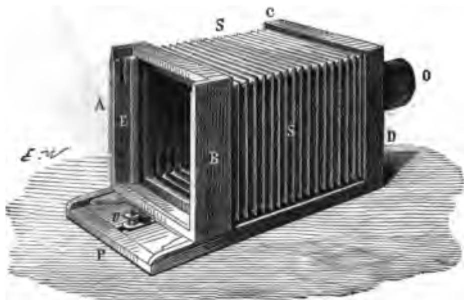


Fig. 581.

enlève le cadre qui contenait la glace, et on y substitue le châssis qui renferme la plaque sensible. On ouvre le volet qui fermait ce

dernier, la plaque qui occupe la position où se trouvait la glace, reçoit l'image nette : au bout de quelques secondes, l'impression est complète; on ferme le châssis, on l'enlève et on retourne dans l'obscurité, pour exposer la plaque aux vapeurs mercurielles. La figure 581 représente une chambre noire qui s'étire et se raccourcit comme un soufflet d'orgue. EB est le cadre dans lequel on fixe le châssis de la figure 580, O l'objectif; PD est la base sur laquelle glisse le corps de la chambre; la vis *v* le fixe à la longueur nécessaire.

La boîte à mercure a une forme parallélipipédique; le fond est en métal, les parois en bois et en verre jaune. Elle est portée sur des pieds qui l'élèvent assez pour qu'on puisse placer sous elle une lampe à alcool.

La plaque y est placée comme on voit, figure 582, c'est-à-dire qu'elle est inclinée environ de 45° à l'horizon.

On chauffe le mercure jusqu'à ce qu'un thermomètre qui y plonge marque 60°, un instant suffit en général pour arriver à ce terme; puis on éteint la lampe, et au bout de deux ou trois minutes, plaçant une bougie contre une des fenêtres de la boîte, et regardant par l'autre, on voit l'image apparaître.

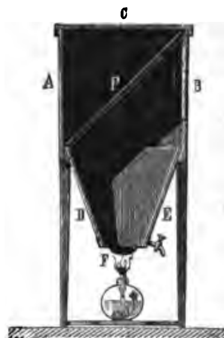


Fig. 582.

Quand on la juge suffisamment venue, on immerge la plaque dans un bain d'hyposulfite de soude, on l'y laisse quelques instants, puis on la met dans un bain d'eau que l'on renouvelle plusieurs fois.

Enfin on la sèche. Pour cela on la supporte sur une espèce de fourchette, de façon que sa ligne de plus grande pente coïncide avec une de ses diagonales. On la chauffe à la lampe, en dessous, en commençant vers le point le plus élevé et l'on descend graduellement la flamme, en évitant avec soin que la ligne qui sépare la portion encore humide de celle qui est déjà sèche ne stationne sur l'épreuve. L'eau s'amasse en B, et s'écoule par ce point en deux ou trois gouttes.

Après toutes ces opérations, on rehausse souvent les tons de la plaque et l'on donne de la fixité à l'image en faisant agir sur elle le chlorure d'or. Pour cela on la dispose horizontalement sur un mince cadre, sensiblement de même dimension qu'elle, et formé d'un fil de laiton replié quatre fois à angle droit; on verse quelques gouttes de chlorure d'or dissous sur la plaque, et, quand il

s'y est répandu bien uniformément, on chauffe quelques instants, puis on arrête l'action et on lave de nouveau.

Papier. — Quelques mois après la publication de la découverte de M. Daguerre, M. Fox Talbot, en Angleterre, annonça qu'il était arrivé à reproduire, sur un papier convenablement préparé, les images de la chambre noire, et montra les premières *épreuves sur papier* que l'on ait obtenues. En France, les travaux de M. Blanquart Evrard de Lille ont puissamment contribué à vulgariser la photographie sur papier.

Lorsqu'on veut obtenir sur papier un portrait, une vue, etc., on commence par tirer de l'objet à reproduire une image négative, c'est-à-dire une image dans laquelle les noirs ont pris la place des blancs, et réciproquement.

Les papiers *négatifs* sont rendus sensibles par une couche d'iodure d'argent, que l'on obtient en imprégnant successivement le papier d'iodure de potassium et d'azotate d'argent. Du reste, les recettes suivies pour arriver à ce résultat peuvent varier. Quelquefois on commence par imbiber le papier d'une faible solution d'azotate d'argent. On le sèche, puis on le plonge dans une solution d'iodure; on le lave, on le sèche de nouveau. Enfin, au moment d'opérer, on le met en contact avec une solution plus concentrée d'azotate à laquelle on ajouté une dose convenable d'acide acétique cristallisable.

On emploie souvent le papier humide; mais on peut aussi l'employer sec.

Le papier est placé sous glace dans le châssis représenté fig. 580 et mis à la chambre noire, comme on l'a expliqué à l'occasion des plaques. Pour faire apparaître l'image, on place le côté impressionné du papier sur une solution d'acide gallique saturée à froid. Lorsque les noirs sont suffisamment prononcés, on passe à l'hyposulfite de soude, mais sans laisser à cette substance le temps de dégrader l'épreuve; puis on lave à l'eau pendant longtemps et on fait sécher.

Le papier humide est un peu plus sensible; le papier sec est plus commode en beaucoup de circonstances. Pour empêcher qu'il ne s'altère il faut avoir soin de le bien laver, et, si faire se peut, il est très-bon de le mettre un quart d'heure au moins sous un robinet d'eau avant de le pendre pour le faire sécher.

Seulement, dans toutes ces opérations, il faut non-seulement éviter tout accès de la lumière du jour, mais même ne s'éclairer que le moins possible.

Lorsque l'épreuve négative, le cliché, a été obtenue et bien fixée, on peut l'employer pour en tirer un nombre considérable

d'épreuves *positives*. Pour cela on applique l'épreuve négative sur un papier sensibilisé surtout par du chlorure d'argent. — L'endroit du négatif doit être posé sur le côté sensible de la feuille positive; l'ensemble des deux feuilles est placé dans un châssis, sous une glace un peu épaisse et qui les presse toutes les deux de façon à éviter les plis. Le tout est exposé au grand jour ou même aux rayons solaires jusqu'à ce que le *positif* soit *bien venu*. On *fixe* à l'*hyposulfite* et au besoin on rehausse les teintes au chlorure d'or.

On emploie avec avantage, pour les papiers positifs, la recette suivante : on fait une solution de chlorure de sodium renfermant environ 5 0/0 de sel. On pose le papier dessus, et lorsqu'il est imprégné, on l'enlève et on le sèche; puis on le sensibilise en le faisant reposer pendant quelques instants sur une solution de nitrate d'argent renfermant 10 à 15 p. 0/0 de ce nitrate contre 100 d'eau. On sèche et on garde à l'abri de la lumière.

Albumine. — Dans toutes ces opérations, les feuilles de papier sont des supports pour la matière sensible. Ainsi que M. Niepce de Saint-Victor l'a fait le premier, on peut les remplacer par de minces couches de substances toutes différentes, mais pouvant comme elles absorber des iodures ou chlorures alcalins solubles, et par suite se sensibiliser au nitrate d'argent. M. Niepce de Saint-Victor a employé d'abord l'albumine. Une couche de cette substance étendue sur une lame de glace polie, bien propre, sensibilisée par des procédés tout semblables à ceux que nous venons de décrire, donne des épreuves négatives ou positives d'une finesse extrême.

L'albumine n'est pas du reste le seul vernis que l'on emploie à cet effet.

Collodion. — On fait maintenant, surtout pour les négatifs, un grand usage du *collodion*. Pour obtenir ce produit, on dissout du coton poudre dans un mélange d'éther et d'alcool, et l'on y ajoute un peu d'iodure de zinc ou de cadmium contenant une trace de bromure.

M. Bourbouze m'a indiqué la formule suivante comme donnant un bon collodion pour négatifs :

Éther...............	75gr.
Alcool à 40°.........	35
Iodure de zinc.......	1
Bromure de zinc......	0,1
Coton azotique.......	1

Quand on veut l'employer, on en verse quelques gouttes sur une glace que l'on vient de nettoyer à l'alcool et à la terre pourrie; en imprimant un léger mouvement à la plaque, on le force à s'étendre en couche bien uniforme. Et aussitôt que cette couche a une consistance suffisante, ce qui arrive très-vite à cause de la facile évaporation de l'éther, on la sensibilise en la plongeant dans un bain de nitrate d'argent au dixième, c'est-à-dire renfermant 1 kil. d'eau et 100 grammes de nitrate, puis on la met à la chambre noire.

On développe à l'acide pyrogallique; la formule du bain est : 1 d'acide pyrogallique, 5 d'acide acétique cristallisable et 300 d'eau.

On fixe au cyanure de potassium ou à l'hyposulfite.

Un collodion négatif peut servir à tirer un grand nombre de papiers positifs, ainsi que nous l'avons expliqué aux pages précédentes.

Nous terminerons cet exposé rapide des méthodes photographiques en faisant remarquer que, pour obtenir de bons résultats, il faut, aux principes généraux que nous venons d'indiquer, ajouter les renseignements indispensables que l'on trouve dans les traités spéciaux; et puis enfin, comme en toute sorte d'expériences, pour bien faire, il faut un long exercice.

Objectifs doubles. — Les chambres noires destinées aux opérations photographiques ne doivent pas avoir une trop grande profondeur. Par conséquent, les distances focales des objectifs doivent toujours être peu considérables; 0m50 est une limite qu'on ne dépasse point. D'une autre part, pour que les actions soient promptes, il faut que les images soient fort éclairées, et par suite, le diamètre de la surface réfringente sur laquelle tombe la lumière doit être aussi grand que possible.—Or, nous avons vu qu'une lentille donne des aberrations de sphéricité de plus en plus fortes, lorsque le rapport de son diamètre à sa distance focale va en croissant. Quand ce rapport est un peu considérable, les images deviennent mauvaises et le verre doit être rejeté. Il semblerait donc qu'il y a grande difficulté à obtenir d'un objectif de daguerréotype les qualités qu'il doit présenter; mais l'emploi des objectifs doubles résout la difficulté.

Avec ces appareils, en effet, on peut former, à faible distance de la première surface réfringente, des images à la fois nettes et lumineuses.

Il est facile de trouver la relation qui doit exister entre la distance focale F d'un objectif simple et les distances focales f et f' des deux verres d'un objectif double, pour que l'un comme l'autre

forme, à la même distance a de leur première surface réfringente, les images d'objets AB, ab situés à la même distance Δ en avant de cette surface (fig. 583). En effet,

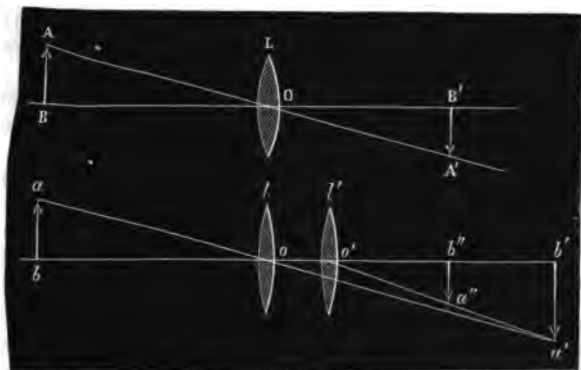


Fig. 583.

B et B' (figure 583), étant foyers conjugués par rapport à l'objectif simple L, on a l'équation

$$\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{a}=\frac{1}{F}.$$

Soit maintenant d la distance des deux verres de l'objectif composé, et b' le point où le premier d'entre eux ferait concourir les rayons partis de b. Soit $ob' = x$ et toujours $ob = \Delta$. On a entre les quantités Δ, x et f, la relation

$$\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f},$$

Puis, comme b' et b'' sont foyers conjugués par rapport à la lentille l', on peut écrire comme on l'a vu pages 204 et suivantes,

$$-\frac{1}{x-d}+\frac{1}{a-d}=\frac{1}{f'}.$$

On déduit de ces trois équations :

$$-\frac{d}{a(a-d)}+\frac{d}{x(x-d)}=\frac{1}{F}-\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right).$$

Si $d = 0$, il vient simplement

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'},$$

et cette dernière relation se trouve encore assez approximativement satisfaite, toutes les fois que d ne dépasse pas le cinquième de a.

Si l'on suppose les diamètres des deux verres l et l' égaux entre eux et à celui de l'objectif simple L, et si de plus on prend $f = f'$, chacune des lentilles l et l' sera, au point de vue des aberrations, bien supérieure à l'objectif simple L; et il en sera de même du système qu'elles forment. On peut s'en assurer en appliquant ici les formules établies pages 219 et suivantes. Enfin, on obtiendrait encore de meilleurs résultats si l'ouverture de l' était notablement moindre que celle de l; et cette dernière condition peut être remplie sans qu'il en résulte grande perte de lumière, puisque le verre l rapproche déjà fortement de bb' les faisceaux lumineux qui le traversent.

Quant à l'influence des réflexions plus nombreuses, elle n'est pas très-considérable, et d'ailleurs l'image $a''b''$, formée par l'objectif double, est un peu plus petite que ne le serait celle de l'objectif simple. On le voit à l'inspection de la figure 583, et cette diminution d'étendue est un avantage au point de vue de la clarté.

Enfin nous ajouterons encore que, dans les bons objectifs allemands, les courbures des lentilles ne sont pas identiques entre elles. D'après les calculs de M. Petzwald, on dispose de l'une des surfaces pour ajouter à la qualité que le seul emploi de deux verres ordinaires eût donnée aux images.

§ 3. — ŒIL. — VISION.

Description de l'œil. — La théorie physique de l'œil est due à Képler, et le *Traité de Dioptrique*, que nous avons déjà bien des fois cité, est le premier ouvrage où l'on trouve exposées, sous une forme rigoureuse, les principales notions que l'on a sur le phénomène de la vision. (Voir *Dioptrique de Képler*, proposit. 57 et suivantes.)

Pris dans son ensemble, l'œil a la forme d'un globe dont l'enveloppe est presque complétement constituée par une membrane résistante et opaque nommée *cornée opaque*. Mais à la partie

antérieure, cette enveloppe manque sur toute l'étendue d'un segment ayant environ $0^m,018$ de diamètre, et elle est remplacée par une autre parfaitement transparente et d'une courbure un peu plus forte.

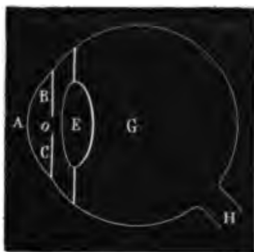


fig. 584.

Au point où la *cornée transparente* s'attache à la *cornée opaque*, se trouve tendue une membrane particulière, *l'iris*, BC (fig. 584), dont la couleur varie chez les individus. Elle est percée en son centre d'un trou *o* destiné à livrer passage aux rayons incidents et que l'on nomme la *pupille*.

Derrière ce diaphragme est placé le *cristallin*, E, véritable lentille biconvexe à courbures inégales et d'une extrême transparence. Enfin, au fond de la chambre noire ainsi constituée, s'étend, sur un fond noir nommé *choroïde*, une sorte de pellicule blanche, la rétine, laquelle n'est que l'épanouissement du nerf optique, H.

Le cristallin sépare l'œil en deux parties : la première, celle qui est limitée antérieurement par la cornée transparente est remplie d'un liquide nommé *humeur aqueuse*, dont le pouvoir réfringent diffère très-peu de celui de l'eau.

La seconde renferme une humeur notablement plus réfringente et qui a reçu le nom d'humeur vitrée.

La seule description que nous donnons ici de l'œil montre que cet organe doit être assimilé à une chambre noire dont la pupille est l'ouverture et le cristallin la lentille. Seulement, l'action de la cornée s'ajoute à celle du cristallin pour donner aux rayons une convergence qui n'acquiert sa valeur définitive qu'après la réfraction à l'entrée dans l'*humeur vitrée*.

Une expérience très-curieuse confirme ces propositions. Si l'on extrait de son orbite un œil encore sain, et si, après avoir aminci la cornée opaque à la partie postérieure, on place une bou-

gie devant la cornée transparente à la distance à laquelle on met ordinairement les objets pour les bien voir, on peut constater que l'image se forme très-nettement sur la rétine [1].

Pour regarder un point, nous tournons vers lui l'axe de l'œil, c'est-à-dire la droite qui passe par le centre optique du cristallin, le centre de la pupille et celui de la cornée transparente. De là résulte que nous sommes obligés de relever l'axe de l'œil pour voir le haut des objets, et de l'abaisser pour voir leur partie inférieure : et cela quoique les images soient renversées sur la rétine.

Estimation de la grandeur. — Lorsque plusieurs objets de grandeurs différentes o, o', o'' sont également éloignés de l'œil, ils forment sur la rétine des images dont les dimensions I, I′, I″, sont sensiblement proportionnelles à o, o' o'' ; et par suite, l'estimation des grandeurs relatives se fait d'elle-même.

L'estimation de la grandeur absolue devient plus difficile lorsqu'il ne se trouve pas de terme de comparaison auprès de l'objet à mesurer; toutefois, on peut encore arriver presque instinctivement à la solution de la question, pourvu que l'on apprécie sûrement la distance à laquelle on se trouve de l'objet à mesurer, et que l'on se rappelle la grandeur de l'image, qu'à cette distance, un objet bien connu forme au fond de l'œil. En un mot, la mémoire ramène alors le problème au cas précédent.

Estimation des distances. — Les axes des deux yeux sont à peu près parallèles quand nous regardons un point éloigné; ils forment au contraire un angle très-notable lorsque nous cherchons à voir un objet voisin; nous avons conscience du mouvement que font ainsi nos yeux en s'inclinant l'un vers l'autre, et nous pouvons par là, entre certaines limites au moins, apprécier la distance à laquelle se trouve de nous l'objet que nous regardons; mais ce mode d'appréciation est tout à fait insuffisant lorsqu'il s'agit d'estimer ou même de comparer entre elles des distances un peu grandes, parce qu'à des différences considérables dans ces éléments ne répondent plus que des variations insensibles dans les directions relatives des axes de nos yeux.

L'estimation des distances est alors le résultat d'un jugement complexe. Pour le former, nous nous fondons le plus ordinairement sur l'appréciation instinctive de la grandeur de l'image formée au fond de l'œil par la lumière que nous envoie un objet

1. Le texte de Képler est le suivant:
« Cristallinus humor oculi est lens convexa... et retiformis tunica, spiritus plena post cristallinum est papyri vice, et pinguntur in ea visibilia picturâ reali. »

bien connu placé au milieu de ceux dont on veut trouver l'éloignement.

Il est clair, en effet, que les dimensions de cette image sont d'autant plus petites que la distance à mesurer est plus grande, et l'habitude donne une grande sûreté aux résultats que l'on

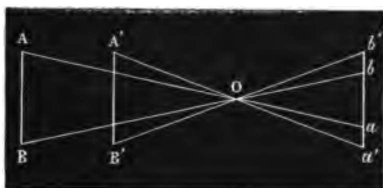


Fig. 585.

obtient en employant cette méthode. La figure 585 représente en *ab* et *a'b'* les images inégales que donne au fond de l'œil un même objet placé successivement en AB et A'B'. O est le centre optique du cristallin.

Enfin, dans les conditions atmosphériques ordinaires, le seul degré de clarté des objets nous permet d'en apprécier la distance; car par suite de l'absorption que la lumière éprouve en traversant les couches atmosphériques, les objets éloignés nous paraissent beaucoup moins lumineux que ceux dont la distance est moindre, c'est même ainsi le plus souvent que, dans un paysage un peu étendu, les plans lointains se distinguent les uns des autres.

Mais ce mode d'appréciation, quoique très-utile, conduit quelquefois à de singulières erreurs. Lorsqu'on a l'habitude des contrées brumeuses du Nord, et qu'on se trouve tout à coup transporté dans les pays chauds, où l'air est beaucoup plus transparent, on est toujours porté à croire assez voisins des objets réellement très-éloignés, et dès lors on les juge petits, parce qu'ils ne forment pas dans l'œil des images aussi grandes qu'elles devraient l'être eu égard à la proximité qu'on leur suppose; ou réciproquement, lorsque par un temps de brouillard on aperçoit tout à coup, à faible distance de soi, un objet de grandeur bien connue, un homme, par exemple, on lui prête d'abord instinctivement des dimensions exagérées, parce que, vu le peu de lumière qu'il envoie à l'œil, on le croit très-loin malgré la grandeur de son image sur la rétine.

Pour produire les illusions de la fantasmagorie, on forme sur un tableau translucide, comme dans la lanterne magique ordi-

naire, les images d'un objet fortement éclairé ; mais de plus, on fait mouvoir l'objet et la lentille de telle sorte que l'image grandisse ou diminue tout en restant nette sur le tableau.

Dans le premier cas, l'image paraît se rapprocher de l'observateur, et le fuir au contraire dans le second. Toutefois, l'illusion n'est complète qu'à une condition : il faut éclairer très-fortement l'objet quand l'image doit avoir des dimensions considérables, l'éclairer au contraire fort peu dans l'autre cas. Sans cette précaution, elle s'assombrirait en devenant plus grande, tandis qu'en se rapprochant de l'œil, les objets paraissent de plus en plus lumineux.

Vision simultanée par les deux yeux. — Si l'on place un écran opaque, un peu étendu, perpendiculairement à la ligne qui joint les deux yeux, on pourra sans aucune gêne voir deux objets différents, placés, l'un d'un côté de l'écran, l'autre, de l'autre; le premier sera vu de l'œil droit, et le second de l'œil gauche.

Mais ordinairement, quand on regarde un point, un objet, on les voit des deux yeux à la fois. Dans chaque œil, il y a une image distincte, et pourtant le point ou l'objet ne nous paraît pas double. Il faut toutefois, pour qu'il y ait ainsi unité d'impression, malgré la dualité des images, que les deux yeux soient dans les positions respectives qu'ils prennent naturellement; que l'on dérange l'un d'eux en en poussant légèrement le globe avec le doigt, et les objets paraîtront doubles.

Relief des corps. — Le concours des deux yeux dans l'acte de la vision, contribue à nous faire percevoir le relief des corps. On peut s'en assurer par l'expérience suivante :

Soit CD (fig. 586) une fenêtre un peu en retrait sur le mur d'un appartement, et soient O et O′ les deux yeux d'un observateur, O étant sur le prolongement de la paroi CB, si l'on ferme O′, la distance du plan DC au plan AB disparaîtra presque complétement. La fenêtre semble se rapprocher au niveau AB. Qu'on ouvre O′, aussitôt on aperçoit BC, et CD semble fuir instantanément.

Ainsi la vision binoculaire nous aide à voir le relief de DCAB, et en même temps il est bien clair que les images de cette saillie ne sont pas les mêmes sur les deux rétines.

Stéréoscope. — En partant d'observations analogues, M. Wheatstone a imaginé une manière très-curieuse de produire l'impression complète du relief à l'aide d'images planes. On prend d'un même objet deux vues, M et M′ (fig. 587), qui le représentent, l'une telle qu'on le voit de l'œil droit, l'autre telle qu'on le voit de l'œil gauche. — On place chacune d'elles devant l'œil auquel

elle se rapporte, de manière qu'elle puisse en être vue distinctement, et puis on s'arrange de façon qu'avant leur entrée



Fig. 586.

dans l'œil gauche, O, les rayons venus de la vue M soient tous déviés vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens de la flèche F, et que les rayons partis de la vue M' soient tous, avant leur



Fig. 587.

entrée dans l'œil droit, O', déviés dans le sens de F'. En donnant à ces inclinaisons un juste degré de grandeur, et en posant convenablement les deux vues par rapport à la ligne XX', on peut arriver à faire coïncider, au moins d'une manière très-approchée, les sommets des cônes lumineux, qui divergent de *presque* tous les points de l'image de gauche avec les sommets

des cônes lumineux qui divergent des points correspondants dans l'image de droite.

Quand cette condition est remplie, on ne voit plus deux vues planes et distinctes. — On voit un objet unique et on le voit en relief.

L'appareil de M. Wheatstone (fig. 588) consistait en deux miroirs PQ, QR inclinés l'un sur l'autre de 90° environ. On prenait deux vues, AB, A'B', de l'objet dont on voulait voir le re-

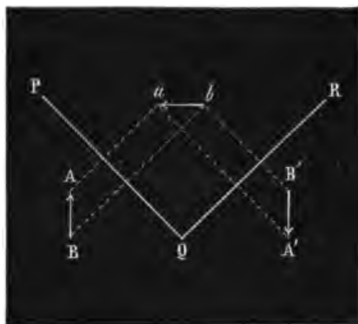


Fig 588.

lief, et on les plaçait chacune devant un des miroirs de façon que leurs images se superposassent en *ab* aussi exactement que possible, et alors les yeux étant placés de manière à recevoir chacun l'une de ces images, on obtenait la sensation cherchée.

M. d'Almeida a fait connaître plusieurs procédés qui permettent de montrer en projection les phénomènes stéréoscopiques. Nous décrirons l'un d'eux :

« Au moyen de lentilles, on projette sur un écran les images de deux épreuves stéréoscopiques telles que les épreuves ordinaires. Les images projetées sont amenées à se superposer, non pas trait pour trait, ce qui est impossible, car elles ne sont pas indentiques, mais à peu près dans la position relative où elles se seraient présentées, si les objets qu'elles reproduisent étaient devant les yeux. Ces deux images forment sur l'écran un enchevêtrement de lignes qui n'offre que confusion. Il faut que chacun des yeux n'en voie qu'une seule : celle de la perspective qui lui convient. A cet effet, on rend intermittente, mais à de très-courts intervalles, la production de chacune d'elles ; et l'on interdit la vue de l'écran, tantôt à l'un tantôt à l'autre œil, au moment où se produit l'image qu'il ne doit pas voir. En ces circonstances on aperçoit tous les effets du relief. »

M. Brewster a eu la très-heureuse idée d'employer, pour dévier les images, deux prismes légèrement lenticulaires, et de substituer ainsi un stéréoscope par réfraction au stéréoscope à réflexion. Les deux vues sont l'une à côté de l'autre dans un même plan parallèle à celui des verres (voir fig. 588). On regarde chacune d'elles par le verre correspondant.

Enfin, les perfectionnements importants que M. Duboscq a apportés à cet appareil ont puissamment contribué à en répandre l'usage autant qu'il l'est aujourd'hui.

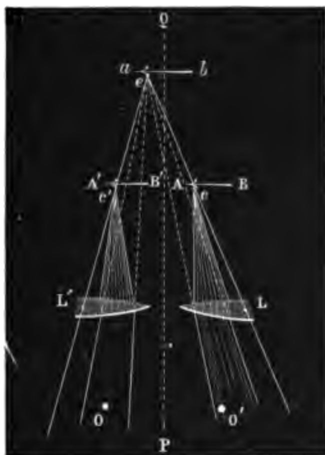


fig. 589.

La figure 589 représente la marche des rayons dans un stéréoscope à réfraction. L et L' sont les deux prismes lenticulaires, ABc, A'B'c' les deux vues. Le faisceau lumineux émané de c' se plie en traversant la lentille L' et semble diverger d'un point *e* situé sur la droite c'L'; le faisceau du point c, correspondant à c' se plie de même en traversant le verre L et semble aussi concourir en *e*.

Persistance des impressions sur la rétine. — L'étude optique des mouvements vibratoires, celle de la recomposition de la lumière, nous ont déjà amené à parler de la persistance des impressions sur l'œil. On peut varier les expériences à l'aide desquelles on met ordinairement le fait en évidence; nous en citerons seulement deux.

Sur un disque de verre, on trace une série de secteurs égaux, et on les noircit alternativement comme on le voit sur la figure 590 ; au centre O; on fixe un pivot sur lequel on monte un second disque de mêmes dimensions que le premier, mais qui est complétement noirci, à l'exception d'un seul secteur, et, mettant l'appareil entre une fenêtre et l'œil, on imprime au second disque une rotation plus ou moins rapide. Si le mouvement est lent, on voit successivement tous les secteurs transparents *b, b,...* mais on n'en voit qu'un à la fois; par une rotation plus rapide on en aperçoit simultanément deux, trois ou un plus grand nombre.

L'expérience peut se faire aisément en projection.

M. Plateau a étudié d'autres phénomènes de persistance qui présentent des particularités extrêmement curieuses. Si, après avoir regardé pendant quelques instants une fenêtre fortement éclairée, on vient à fermer tout à coup les yeux, on voit persister l'image pendant quelques instants encore, c'est-à-dire que l'on voit un châssis formé de carrés lumineux entourés d'encadrements noirs, mais après quelques secondes les apparences deviennent inverses : on aperçoit de nouveau le même châssis, mais les encadrements sont brillants et les vitres sont parfaitement noires; enfin cette nouvelle apparence peut se renverser de nouveau, et revenir à celle dont elle semble être primitivement dérivée.



Fig. 590.

On peut évidemment rapprocher de ce phénomène celui que l'on observe lorsqu'on a regardé quelques instants le soleil, voisin de l'horizon. On sait qu'alors, en détournant les yeux de l'astre, on en voit une série d'images qui semblent flotter dans l'air et qui sont ordinairement verdâtres, c'est-à-dire colorées de la teinte complémentaire de celle qui avait impressionné la rétine tandis que l'on regardait directement le soleil; absolument comme, dans l'expérience précédente, à l'image de la fenêtre succédait sur l'œil une autre apparence, inverse de la précédente.

Influence des couleurs voisines. — Nous ne pouvons terminer ces indications relatives à la vision, sans citer le phénomène si curieux des auréoles accidentelles; ce phénomène consiste en ce que, par suite de l'influence des couleurs voisines, un objet coloré placé sur un fond blanc semble ordinairement entouré d'une auréole de couleur complémentaire. En des circonstances con-

venablement choisies, l'effet est on ne peut plus marqué. Par exemple, que l'on prenne une feuille de papier vert-pomme, glacé et translucide, qu'on le tende sur un cadre, et qu'on colle au milieu une bande de carton blanc d'environ 0m,12 sur 0m,04, on pourra, avec un mode d'éclairement convenable, faire paraître la bande de carton complétement rose. M. Chevreul a tiré de l'étude de ce fait et de ses analogues des conséquences importantes touchant l'association des couleurs voisines dans une tenture, et l'une des principales règles qui résultent de son étude est que deux couleurs complémentaires, placées l'une près de l'autre, s'avivent par le seul fait de leur proximité.

Ombres colorées. — Il est enfin une dernière circonstance dans laquelle les effets de contraste se développent avec une netteté remarquable.

Que dans une chambre close et ne recevant le jour que par une fenêtre de peu d'étendue, on place une tige noire devant un tableau blanc, l'ombre portée de la tige paraîtra noire. Que l'on ferme exactement le volet et que l'on éclaire l'intérieur de la chambre par une lampe, l'ombre portée de la tige sur le tableau semblera aussi très-noire; qu'on laisse la lampe agir et qu'on entr'ouvre le volet, on aura alors deux ombres sur le tableau; l'ombre portée par la lampe, c'est-à-dire la portion du tableau éclairée par le jour seul, paraîtra bleue, l'autre semblera jaune foncée.

Quant au tableau, il paraît blanc dans les trois cas; mais en réalité, quand il est éclairé par la lampe et le jour à la fois, il est jaunâtre. Il est d'un jaune plus prononcé quand il est éclairé par la lampe seule.

Ainsi, sur un fond jaunâtre et lumineux, une bande blanche paraît bleue, et une bande légèrement jaune semble d'un orangé sombre.

§ 4. — BESICLES. — LOUPES.

Besicles. — Le plus ordinairement, lorsqu'on veut voir nettement des objets de faibles dimensions, des chiffres, des caractères un peu fins, on les place environ à 30 centimètres de l'œil; toutefois cette distance de vision distincte varie avec la conformation de l'organe; chez les myopes elle est beaucoup plus faible, et beaucoup plus grande chez les presbytes.

Les besicles, dont l'usage remonte au commencement du XIIIe siècle, servent à remédier aux inconvénients de ces vues

trop courtes ou trop longues ; pour les myopes, elles sont formées de verres concaves, et donnent aux rayons qui émanent d'un point situé à 30 centimètres de l'œil le même degré de divergence que s'ils partaient d'un point situé à la distance de vision distincte du myope.

Pour les presbytes, les verres sont convexes; ils ajoutent leur action à l'action trop faible de l'œil, et grâce à ce concours, les faisceaux partis des points situés à 30 centimètres de la cornée sont amenés à converger sur la rétine.

La force du verre dépend de sa distance focale. Soit f la valeur absolue de cette distance; soit V' et V'' les distances de vision du presbyte et du myope, et V la distance de vision ordinaire; f se détermine dans le cas des presbytes par l'équation

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{V'} = \frac{1}{f},$$

et dans le cas des myopes par l'équation

$$\frac{1}{V''} - \frac{1}{V} = \frac{1}{f}.$$

Loupe. — Lorsqu'un objet de très-faibles dimensions est placé

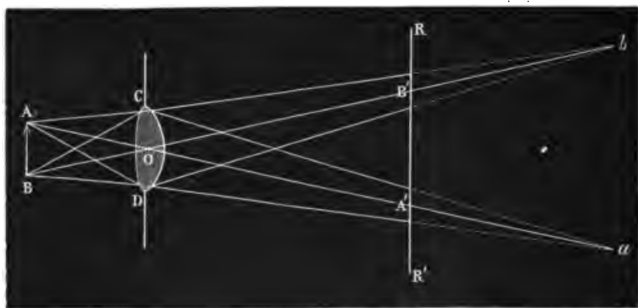


Fig. 591.

à une distance de l'œil égale à celle de la vision ordinaire, l'image formée sur la rétine peut être trop petite pour être nettement perçue. Pour accroître cette image, il faudrait rapprocher l'objet; mais alors les différents faisceaux réfractés par le cristallin, C D*b*, C D*a* (fig. 591), rencontrent le fond de l'œil avant leurs points de concours respectifs, et la vision devient confuse. On peut, il est

vrai, lui rendre une certaine netteté en interposant entre l'objet et la cornée une carte percée d'un très-petit trou; car les faisceaux qui tombent sur l'œil à travers ce diaphragme sont tellement resserrés que leur section par la rétine est presque assimilable à un point. Les contours se dessinent donc, mais la clarté de l'image est si faible qu'il n'y a pas de parti à tirer de ce moyen de grossissement.

Marche des rayons. — On obtient, au contraire, les meilleurs résultats en interposant, entre l'objet AB et l'œil, une lentille biconvexe qui, placée en un point convenable, substitue à l'objet une image virtuelle A'B' rejetée à la distance de la vision distincte; dans la figure 592, O représente le centre optique du

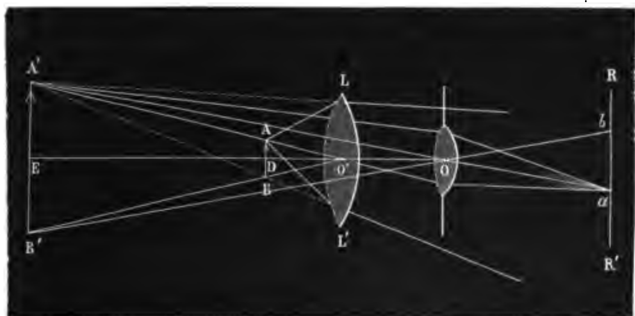


Fig. 592.

cristallin. Les rayons incidents sont alors dans des conditions convenables pour converger sur la rétine. La vision est nette, et de plus, l'image se trouve accrue dans une proportion considérable et qu'il est facile d'estimer.

Grossissement. — Si l'on n'employait pas la lentille L, il faudrait, pour voir l'objet AB, le placer à la distance OE de la vision distincte, c'est-à-dire à la distance même à laquelle l'image A' B' est rejetée par l'action de la lentille. L'angle sous lequel on le verrait alors aurait pour mesure $\frac{AB}{OE}$; celui sous lequel on voit l'image est $\frac{A'B'}{OE}$. Le grossissement est donc $\frac{A'B'}{AB}$. Mais à cause de la similitude des triangles A' O' B', A O' B, on a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'E}{O'D},$$

et comme D et E sont foyers conjugués par rapport à la lentille L, dont nous représentons la distance focale par f, on a

$$\frac{1}{O'D} - \frac{1}{O'E} = \frac{1}{f}, \quad \text{ou} \quad \frac{O'E}{O'D} = \frac{O'E}{f} + 1.$$

Par conséquent, si V est la distance de vision distincte, δ celle de la lentille à l'œil, et G le grossissement, on aura

$$G = \frac{V - \delta}{f} + 1.$$

D'après cette formule, on voit que V et δ restant constants, le grossissement est d'autant plus petit que f est plus grand. Il est à peu près inversement proportionnel à cette quantité lorsque le rapport $\frac{V-\delta}{f}$ est considérable. Par suite, les *fortes* loupes sont celles qui ont une distance focale très-courte.

Le grossissement croît avec V.

Il croît aussi quand δ diminue. Ordinairement on met la loupe très-près de l'œil. Quant à la position de l'objet, elle est donnée par la formule

$$\frac{1}{O'D} - \frac{1}{O'E} = \frac{1}{f},$$

de laquelle on tire

$$O'D = \frac{(V - \delta)f}{V - \delta + f} = f \frac{1}{1 + \frac{f}{V - \delta}}.$$

O' D est donc très-sensiblement égal à f dès que la loupe a un pouvoir grossissant un peu fort.

Discussion. — L'expérience suivante me paraît très-propre à fixer les idées sur diverses particularités de l'emploi de la loupe.

Derrière une lentille A (fig. 593) ayant un diamètre de 10 à 15 centimètres et environ 30 centimètres de foyer, on place un carton blanc sur lequel on a tracé à l'encre des lignes bien prononcées et distantes les unes des autres de 5 à 6 millimètres. Le carton est placé au foyer principal de la lentille; les lignes dont il est sillonné débordent de beaucoup le contour de cette dernière.

Les choses ainsi disposées, si l'on regarde les lignes à travers la lentille, on les voit nettement à quelque distance que l'œil O' soit placé. Seulement, plus on s'éloigne, moins on en voit.

En ces circonstances, l'angle D' O' C' sous lequel on aperçoit à travers la lentille l'intervalle DC de deux quelconques des lignes qu'elle recouvre, reste invariable, parce que D'O' et O'C' sont respectivement parallèles à CO et à DO. Aussi lorsqu'on regarde

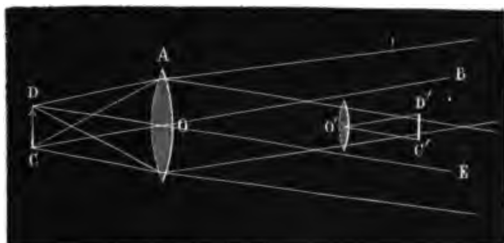


Fig. 593.

d'un œil le carton et de l'autre la lentille, l'image transmise à travers cette dernière semble croître d'une manière continue; enfin, il est facile de compter combien l'intervalle de deux lignes vu à travers la lentille vaut d'intervalles semblables vus directement sur le carton, et l'on peut ainsi mesurer le rapport de l'image directe à l'image grossie à toute distance de O'.

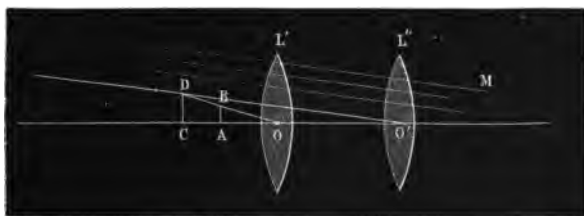


Fig. 594.

Loupe double. — On emploie souvent des loupes formées de deux verres placés à une certaine distance d l'une de l'autre.

Nous allons montrer comment on peut calculer le grossissement que l'on obtient avec cet appareil, en supposant que les faisceaux élémentaires provenant de chacun des points de l'objet soient, à l'émergence définitive, formés de rayons parallèles entre eux et à la ligne O' D (voir fig. 594). Soit f' la distance focale du premier verre L', f'' celle du second L''.

Le premier verre L′ substitue à l'objet AB, placé à une distance a de sa surface, une image virtuelle CD dont la distance au verre L″ doit être égale à f''. On a donc $CO = f'' - d$, et a se trouve déterminé par l'équation

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{f''-d} = \frac{1}{f'}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{f'(f''-d)}{f'+f''-d}.$$

L'angle sous lequel on verrait l'objet AB, supposé à une distance V, serait $\frac{AB}{V}$.

Celui sous lequel on voit l'image lorsque l'œil se trouve immédiatement derrière le verre L″ est $\frac{CD}{f''}$

Or,

$$CD = AB\,\frac{CO}{a} = AB\,\frac{f''-d}{a},$$
$$= AB\,\frac{f'+f''-d}{f'}.$$

Le grossissement, c'est-à-dire le rapport des angles dont les tangentes sont $\frac{CD}{f''}$ et $\frac{AB}{V}$, est donc

$$\frac{V}{f''}\,\frac{f'+f''-d}{f'}.$$

Au lieu de supposer que la distance comprise entre la première image virtuelle et le second oculaire est précisément égale

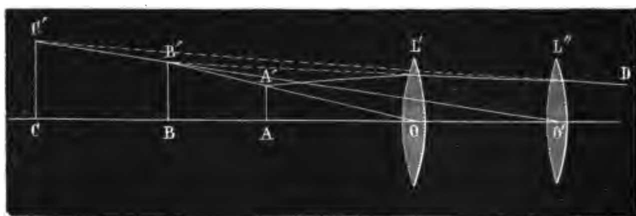


Fig. 595.

à f'', on pourrait admettre qu'elle est déterminée par cette condition, que les faisceaux par lesquels on voit l'image semblent diverger d'un point situé à une distance V du second oculaire. La figure 595 est relative à ce cas. A est la grandeur de l'objet AA′,

B celle de la première image virtuelle, C celle de la seconde, $CO' = V$, $BO' = x$, $AO = a$.

L'angle sous lequel on voit l'image C est $\frac{C}{V}$.

Celui sous lequel on verrait l'objet A placé à distance de vision distincte serait $\frac{A}{V}$, le rapport, c'est-à-dire le grossissement, est $\frac{C}{A}$

Or, il suffit de se reporter à la figure pour s'assurer que l'on a, d'une part

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{x-d}; \qquad \frac{C}{B} = \frac{V}{x}; \qquad \frac{C}{A} = \frac{V}{x}\,\frac{x-d}{a};$$

et, d'autre part

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{V} = \frac{1}{f''}, \quad \text{d'où} \quad \frac{V}{x} = \frac{V}{f''} + 1 = \frac{V+f''}{f''}, \quad \text{et} \quad x = \frac{f''\,V}{V+f''}.$$

de même,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x-d} = \frac{1}{f'}; \text{ d'où } \frac{x-d}{a} = \frac{x-d}{f'} + 1 = \frac{f''V - Vd - f''d + f'V + f''f'}{(V+f'')f'}$$

et enfin

$$\frac{C}{A} = \frac{V+f''}{f''}\left[\frac{V(f'+f''-d)+f''(f'-d)}{(V+f'')f'}\right],$$

$$= \frac{V}{f''}\left[\frac{f'+f''-d}{f'} + \frac{f''(f'-d)}{Vf'}\right];$$

Or, le second des deux termes de la parenthèse est en général très-petit par rapport au premier. En le négligeant, on retrouve le résultat déjà obtenu.

§ 5. — LUNETTES.

Lunette de Galilée. — La découverte des lunettes paraît avoir été faite par hasard à Middelbourg dans les ateliers d'un fabricant de besicles, Zacharie Jansen, dans les dernières années du XVI^{e} siècle.

Au mois de mars 1610, Galilée écrivait aux premières lignes de son *Nuncius sidereus* : « Il y a environ dix mois, le bruit me vint qu'un Belge avait construit une lunette à l'aide de laquelle on voyait distinctement, et comme s'ils étaient tout proches, des objets très-éloignés, et l'on racontait comme faites, avec cet admirable appareil, quelques expériences auxquelles les uns ajou-

taient, foi tandis que d'autres les révoquaient en doute. — Le fait me fut récemment confirmé dans une lettre d'un gentilhomme français, Jacob Badover, de Paris. J'entrepris alors de chercher à construire un instrument semblable, et j'y arrivai bientôt en m'appuyant sur la théorie des réfractions. Je disposai donc un tube de plomb aux extrémités duquel je mis deux verres. Tous deux étaient plans d'un côté, mais la seconde face de l'un était convexe, tandis que celle de l'autre était concave. En mettant cette dernière contre l'œil, je vis les objets que j'observais à une distance trois fois moindre que celle à laquelle ils se trouvaient réellement ; ils me paraissaient donc avoir une surface neuf fois plus grande que leur véritable. Bientôt je construisis un nouvel appareil qui me grossissait plus de soixante fois les objets. Enfin, ne reculant devant aucuns frais ni aucun travail, je me fis une lunette qui fait voir les objets mille fois plus grands (en surface) qu'ils n'apparaissent à la vue simple. »

Marche des rayons dans la lunette de Galilée. — Dans la lunette de Galilée, l'oculaire reçoit les rayons avant qu'ils se soient croisés au foyer de l'objectif. Sur la fig. 596, on a tracé la

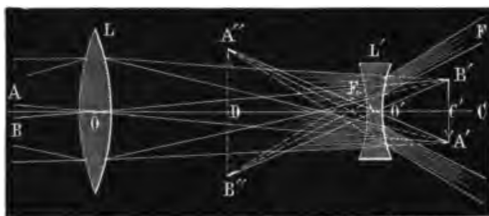


Fig. 596.

marche du faisceau qui, parti du point B de l'objet sur l'axe O B, tend à converger en B′, et l'on voit comment, au point E, où il rencontre la lentille, il se trouve redressé et semble diverger d'un point B″ situé sur l'axe secondaire B′ O′ à une distance donnée par la théorie des lentilles. Voir p. 213 et suivantes.

Ici les faces d'entrée et de sortie sont concaves, le faisceau incident est convergent, et il est rendu divergent par l'action du verre, il faut alors, pour appliquer au cas qui nous occupe la relation fondamentale

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'}$$

changer les signes des quatre quantités p, p', r et r', ce qui revient à n'en changer aucune.

Soient donc F et f les distances focales des deux verres. Si l'on cherche à voir des objets un peu éloignés, OC' ne différera point de F; de plus, O'D devra être égal à la distance de la vision distincte V de l'observateur; car pour ne point perdre de champ il faut que l'œil soit en contact avec la face postérieure de l'oculaire. Donc la distance x que l'on doit établir entre les deux verres sera donnée par la relation

$$\frac{1}{F - x} + \frac{1}{V} = \frac{1}{f};$$

on en déduit

$$\frac{1}{F - x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{V} = \frac{V - f}{fV};$$

$$F - x = \frac{fV}{V - f}; \qquad x = F - \frac{fV}{V - f};$$

$$x = F - f\frac{1}{1 - \frac{f}{V}};$$

x augmente donc avec V, et devient sensiblement $F - f$, pour les vues très-presbytes. Les myopes sont obligés de rapprocher un peu les deux verres.

Le grossissement est le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'image A'' B'' et celui sous lequel on voit l'objet directement.

En d'autres termes, il est égal à $\frac{A''\,O'\,B''}{A\,O\,B}$ ou, ce qui revient au même, à $\frac{B'\,O'\,A'}{B'\,O\,A'}$;

en un mot, il a pour expression $\frac{OC'}{O'C'}$ ou enfin $\frac{F}{F - x}$.

Or, d'après ce qui a été dit quelques lignes plus haut

$$\frac{F}{F - x} = \frac{F}{f}\,\frac{V - f}{V} = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{f}{V}\right).$$

Il se réduit donc à $\frac{F}{f}$, si l'on suppose $\frac{f}{V}$ négligeable de l'unité.

Après avoir décrit son instrument, Galilée donna un moyen de vérifier qu'il grossit bien dans la proportion qu'il avait indi-

quée, soit 400 fois. — « Que l'on prenne deux cercles ou deux carrés en carton dont l'un ait une surface 400 fois plus grande que l'autre, ce qui arrivera si son diamètre est vingt fois plus considérable; qu'on les fixe à une même muraille et qu'on les regarde tous deux à la fois, mais chacun par un seul œil, à savoir le plus petit à travers la lunette et le plus grand directement, et l'on verra les deux disques de même grandeur. »

M. Pouillet a employé un procédé analogue dans une série de mesures ayant pour objet la détermination directe du grossissement des lunettes.

Lunette astronomique. — La *Dioptrique* de Képler est datée du mois de janvier 1611. Dans cet ouvrage, l'auteur, entre autres choses, se propose de faire voir que « les principes par lesquels il avait expliqué la vision et les effets des verres simples, suffisent aussi à faire comprendre l'action qu'exerce sur la lumière un système de plusieurs lentilles assemblées dans un tube, » et dans la suite de ses propositions il explique comment, avec deux verres convexes, on peut voir les objets grandis et renversés.

Un premier verre L (fig. 597) forme une image renversée B' A',



Fig. 597.

l'œil vient ensuite après le point de concours, mais à cause de la trop grande divergence des rayons la vision est confuse. Alors, entre la première lentille et l'œil, et près de celui-ci, on en met une seconde L' qui ne redresse pas l'image, mais la fait voir nettement et peut la faire voir grossie.

Il explique également comment, avec trois lentilles, on peut rendre les objets distinctement visibles, dans leur position naturelle et sous des dimensions amplifiées.

En un mot, Képler indique la construction de la lunette astronomique à deux verres et celle de la lunette terrestre.

Lunette à deux verres. — Dans la lunette astronomique proprement dite, dans celle que Képler décrit sommairement à la première des propositions que nous venons de citer, il y a donc

essentiellement deux verres convexes, un objectif L (fig. 597) qui forme près de son foyer une image réelle A′ B′, des objets que l'on observe, et un oculaire L′ avec lequel on regarde de très-près cette première image.

L'oculaire est porté par un tube à tirage, on l'écarte de l'objectif quand les objets à observer se rapprochent, et on l'enfonce le plus possible quand on vise aux étoiles.

En outre, pour une distance déterminée des points où l'on vise, il faut l'enfoncer d'autant plus que l'on a la vue plus courte. Cela résulte de ce que nous avons dit en exposant la théorie de la loupe (page 276).

L'œil doit être placé au point C (fig. 598) où se croisent, après la dernière réfraction, les pinceaux venus des points

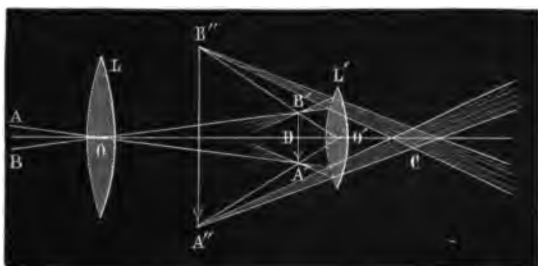


Fig. 598.

extrêmes A et B de l'objet. Si l'on se plaçait au delà ou en deçà, on ne recevrait plus ces pinceaux lumineux; on ne verrait plus, par conséquent, les points desquels ils émanent.

Il résulte de là que, lorsqu'on emploie des lunettes à oculaires simples, il faut placer l'œil à une distance h du second verre, sensiblement égale à la distance focale f de celui-ci. En effet, la distance doit nécessairement satisfaire à la relation

$$\frac{1}{F+f}+\frac{1}{h}=\frac{1}{f},$$

laquelle se réduit sensiblement à

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{f},$$

parce que F est toujours fort grand par rapport à f.

Pour fixer ainsi au point C la position de l'œil, on adapte, au bout du porte-oculaire et à la distance que nous venons de calculer, une petite plaque percée d'un trou et formant ce qu'on appelle l'œilleton.

La distance O' D est théoriquement définie par la relation

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{V - h} = \frac{1}{f},$$

ou si l'on admet $h = f$,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{V - f} = \frac{1}{f},$$

d'où

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} + \frac{1}{V - f} = \frac{V}{f(V - f)}.$$

Grossissement. — Le grossissement, comme nous avons déjà eu occasion de le dire, est le rapport de l'angle B'' C A'' sous lequel on voit la dernière image A'' B'' à l'angle sous lequel on voit l'objet c'est-à-dire que l'on a la relation

$$G = \frac{B''CA''}{B'OA'},$$

$$G = \frac{B''A''}{V} : \frac{B'A'}{F};$$

mais

$$B''A'' = B'A'\frac{V - f}{x} = B'A'\frac{V}{f};$$

donc

$$G = \frac{F}{f}.$$

Champ. — Pour qu'un point puisse envoyer, à travers la lunette, quelques rayons de lumière à l'œil placé en C, il faut qu'il soit compris dans le cône ayant son sommet en O, et pour section droite le grand cercle de l'oculaire L'. Si le point lumineux sort tant soit peu de ce cône, il ne sera plus visible dans l'instrument. On appelle champ de la lunette l'angle compris entre la génératrice et l'axe du cône que nous venons de définir. Soit X cet angle et $2y$ le diamètre de l'oculaire ; on aura très-sensiblement:

$$\text{tang}\, X = \frac{y}{OO'} = \frac{y}{F + f};$$

en sorte que, si l'on pose $\frac{y}{f} = w$, on aura entre le champ et le grossissement la relation

$$\frac{w}{G+1} = tang\,X, \qquad w = (G+1)\,tang\,X.$$

Pour que l'oculaire soit tolérable, il faut que le rapport w soit toujours petit, $\frac{1}{4}$ est une limite supérieure, par suite $tang$ X sera nécessairement inférieure à $\frac{1}{4(G+1)}$.

Les lunettes ne servent pas seulement à grossir les images des objets éloignés que l'on veut observer; elles constituent en outre une partie essentielle de presque tous les appareils de mesure. Mais alors elles portent au foyer de leur oculaire un réticule ordinairement formé de deux fils très-fins, rectangulaires entre eux et tendus dans un plan perpendiculaire à l'axe du tube. Le point de croisement des fils doit être sensiblement sur cet axe, et l'on peut toujours satisfaire à cette condition en déplaçant convenablement ou le réticule entier ou l'un de ses fils.

On appelle axe optique d'une lunette la ligne qui joint le centre optique de l'objectif au point de croisement des fils du réticule; et par suite on peut dire que la lunette aura son axe optique dirigé vers un point quand l'image de ce point se fera à la croisée des fils.

Le pouvoir amplifiant, que possèdent souvent les oculaires, permet de juger, avec beaucoup d'exactitude, du moment où la coïncidence a lieu. Supposons, pour fixer les idées, que l'oculaire grossisse vingt fois : si un point de l'image est à un vingtième de millimètre de la croisée des fils, on s'en apercevra très-aisément. Or, si dans ce cas la lunette a deux mètres de long, l'angle compris entre l'axe et la ligne qui joint le point au centre optique de l'objectif ne sera que de cinq secondes environ.

Oculaire négatif. — La condition d'avoir le plus de champ possible est tellement importante pour les observations que, dès le temps de Galilée et de Képler, on a cherché à modifier les lunettes de manière à en accroître le champ sans diminuer le grossissement, ou, ce qui revient au même, à accroître le grossissement en conservant le même champ. C'est dans ce but que Huygens et Campani ont construit des oculaires à deux verres que l'on emploie encore aujourd'hui sous le nom d'oculaires négatifs. Dans ces oculaires, les rayons sont reçus un peu avant

leur concours en A'B' sur une première lentille de convergence L' qui plie les faisceaux, ainsi qu'on le voit sur la figure 599, et les envoie sur une loupe L'' qui fonctionne comme l'oculaire simple des lunettes à deux verres. Pour comprendre comment cette disposition résout la question qui nous occupe, reportons-

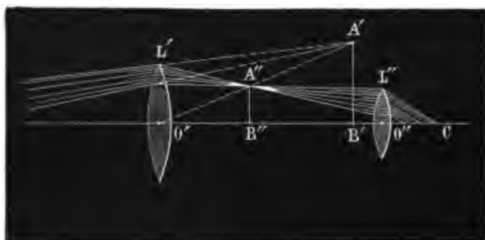


Fig. 599.

nous à la description que nous avons donnée de la lunette de Képler : en supposant que l'on place l'oculaire L' (fig. 600) dont la distance focale sera f', un peu en avant de l'image A'B' donnée par l'objectif et à une distance égale précisément à f' ; alors l'image primitive A'B' sera remplacée par une autre A''B'' égale en grandeur à $\frac{A'B'}{2}$ et située à une distance $\frac{1}{2} f$ du verre collecteur, et en même temps les faisceaux tels que L'A', etc., etc., qui primitivement étaient très-sensiblement parallèles à l'axe, seront fortement inclinés vers lui. Prenons un second verre L'' dont le diamètre $2y''$ soit le quart du diamètre $2y'$ du premier verre L'; supposons de plus que sa distance focale f'' soit égale à $\frac{f'}{4}$, et plaçons-le à une distance de A''B'' égale à f'' : il recevra tous les rayons qui ont concouru à la formation de l'image A''B'', et par suite le champ de l'appareil ne sera pas diminué. Tout cela résulte de ce que, dans la figure 599, O'L'A'B' est très-sensiblement un rectangle dont O'A' et L'B' sont les diagonales. Quant au grossissement, il sera accru. En effet, l'angle sous lequel on verra A'' B'', en plaçant l'œil contre le dernier oculaire, sera $\frac{A''B''}{f''} = \frac{2\,A'B'}{f'}$, tandis que, dans la lunette à deux verres, fonctionnant avec le seul oculaire de distance focale f', l'angle en question eût été simplement $\frac{A'B'}{f'}$.

Ces indications suffisent pour faire comprendre en principe les avantages de l'oculaire négatif. Il faut un peu plus de détails pour montrer comment on est arrivé aux règles pratiques que l'on suit dans sa construction.

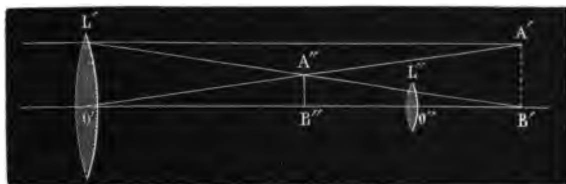


Fig. 600.

Un objectif achromatique étant donné, on se propose de construire une lunette ayant un grossissement déterminé, un champ le plus grand possible, et donnant d'ailleurs une image aussi exempte qu'on peut l'obtenir des déformations ou des irisations dues aux aberrations de sphéricité ou de réfrangibilité.

Les inconnues de la question sont les distances focales f' et f'' des deux verres de l'oculaire; leurs demi-diamètres y' et y'', leur écartement δ. Soit F la distance focale de l'objectif et G le grossissement, lesquels sont donnés; soit A'B' (fig. 601) l'image qui se ferait

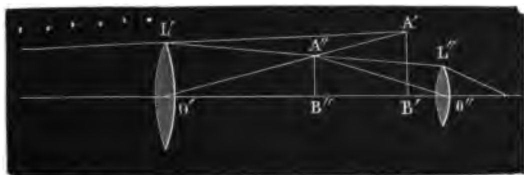


Fig. 601.

au foyer de l'objectif, et A'' B'' celle que le collecteur lui substitue. Nous supposerons que A'' B'' est à une distance de O'' égale à f''; ce que nous avons dit page 276 légitime cette hypothèse. L'angle sous lequel on verrait l'objet directement est $\frac{A'\,B'}{F}$; l'angle sous lequel on le voit à travers l'appareil est $\frac{A''\,B''}{f''}$, le rapport est $\frac{A''B''}{A'\,B'} \cdot \frac{F}{f''}$.

Soit α' la distance O′B′ du collecteur à l'image A′B′, comme $O'B'' = \delta - f''$, on a

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\delta - f''}{\alpha'};$$

D'autre part on a

$$-\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\delta - f''} = \frac{1}{f'};$$

et par suite

$$-\frac{\delta - f''}{\alpha'} = \frac{\delta - f''}{f'} - 1 = \frac{\delta - f'' - f'}{f'}$$

$$\frac{\delta - f''}{\alpha'} = \frac{f' + f'' - \delta}{f'};$$

Et finalement

$$G = \frac{F}{f''}\,\frac{f' + f'' - \delta}{f'}$$

ce qui est une première relation entre les inconnues f', f'' et δ.

On obtient une seconde équation entre ces quantités, en exprimant que les images doivent être dépourvues d'irisation sur les bords. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut et il suffit que G ne varie pas avec la couleur. Différentions donc l'expression du grossissement par rapport à l'indice de réfraction, en y regardant F comme constant, puisque par hypothèse l'objectif est achromatique, et égalons la différentielle à zéro. Il vient

$$dG = F \cdot d \cdot \frac{f' + f'' - \delta}{f'f''} = 0;$$

ou bien

$$(df' + df'')f'f'' - (f' + f'' - \delta)(f'df'' + f''df') = 0;$$

c'est-à-dire

$$f'f''df' + f'f''df'' - f'^2df'' - f'f''df' - f''f'df'' - f''^2df' + \delta f'df'' + \delta f''df' = 0,$$

ou

$$f'^2df'' + f''^2df' = \delta(f'df'' + f''df'),$$

ou

$$\frac{f'df''}{f''} + \frac{f''df'}{f'} = \delta\left(\frac{df''}{f''} + \frac{df'}{f'}\right).$$

Si l'on suppose maintenant que les deux lentilles ont le même indice de réfraction n, que les deux faces de la première ont le même rayon de courbure r', et les deux faces de la deuxième le même rayon de courbure r'', il viendra

$$\frac{1}{f'} = \frac{2(n-1)}{r'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f''} = \frac{2(n-1)}{r''},$$

ou

$$f' = \frac{r'}{2(n-1)}; \qquad f'' = \frac{r''}{2(n-1)};$$

$$df' = -\frac{r'dn}{2(n-1)^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{df'}{f'} = -\frac{dn}{n-1};$$

on aurait de même

$$\frac{df''}{f''} = -\frac{dn}{n-1};$$

par suite

$$(f' + f'')\frac{dn}{n-1} = \delta\,\frac{2dn}{n-}.$$

ou

$$2\delta = f' + f''.$$

Le grossissement, le champ et les raisons d'ouverture $\frac{y'}{f'}$, $\frac{y''}{f''}$ des deux verres de l'oculaire sont liés par une relation très-simple, qui d'une part, met bien en évidence l'avantage des oculaires multiples au point de vue du champ, et qui, d'autre part explique pourquoi, le plus ordinairement au moins, on prend égales entre elles ces deux raisons d'ouverture.

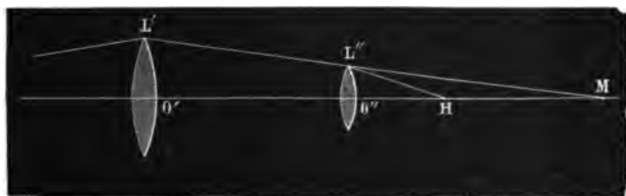


Fig. 602.

Soit Δ la distance du verre L' à l'objectif (fig. 602), M le point où le rayon mené du centre de l'objectif au bord L' du premier oculaire irait couper l'axe O' O'' s'il ne se réfractait que dans ce verre L', on a

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{O'M} = \frac{1}{f'}, \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{\Delta} + \frac{y'}{O'M} = \frac{y'}{f'}.$$

D'autre part, H étant le point où ce même rayon L' L'' M, vient rencontrer l'axe lorsqu'il est infléchi par la dernière lentille.

$$-\frac{1}{O''M} + \frac{1}{O''H} = \frac{1}{f''}, \quad \text{ou} \quad -\frac{y''}{O''M} + \frac{y''}{O''H} = \frac{y''}{f''}.$$

Si nous supposons que le rayon L' M réfracté près du bord du collecteur touche aussi le bord du second oculaire, et cette condition doit évidemment être satisfaite pour qu'il n'y ait pas de champ perdu, on aura $\frac{y'}{O'M} = \frac{y''}{O''M}$, et dès lors, en ajoutant les deux relations précédentes, il viendra

$$\frac{y'}{\Delta} + \frac{y''}{O''H} = \frac{y'}{f'} + \frac{y''}{f''}.$$

Or, $\frac{y'}{\Delta}$, est le champ de l'instrument, $\frac{y''}{O''H}$ le champ grossi, ou, si l'on aime mieux, le produit du champ par le grossissement; donc on peut écrire

$$(G + 1)\, tg\, X = \frac{y'}{f'} + \frac{y''}{f''}.$$

Avec un oculaire simple de raison d'ouverture $\frac{y'}{f'}$, on aurait (voir p. 285)

$$(G + 1)\, tg\, X = \frac{y'}{f'}.$$

Donc le champ serait bien moindre, si le grossissement conservait la même valeur.

Pour avoir le plus de champ possible, on prend les deux raisons d'ouvertures égales entre elles et à la limite que l'on peut atteindre sans compromettre la régularité des images.

Nous admettrons donc

$$\frac{y'}{f'} = \frac{y''}{f''} \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{y''} = \frac{f'}{f''},$$

et comme

$$\frac{y'}{y''} = \frac{O'M}{O''M},$$

on en conclura

$$\frac{f'}{f''} = \frac{O'M}{O''M}.$$

Or, O'M diffère très-peu de f' parce que Δ est toujours fort grand par rapport à f'; donc O''M diffère également très-peu de f''. Si l'on néglige la différence, il vient

$$f' - \delta = f'' \quad \text{ou} \quad f' - \frac{f' + f''}{2} = f'';$$

$$2f' - f' - f'' = 2f'';$$

$$f' = 3f'';$$

et par suite

$$\delta = 2f'';$$

f', f'' et δ sont donc complétement déterminés en fonction du grossissement. Si l'on se donne la valeur w de la raison d'ouverture commune aux deux verres, X s'en déduit au moyen de l'équation

$$(G + 1)\,tg\,X = 2w,$$

laquelle peut en général se réduire à

$$G\,tg\,X = 2w,$$

ainsi que nous l'avons supposé en posant plus haut

$$f' = O'M.$$

Enfin, quant à la distance $O''H$ qui définit la position de l'œilleton, elle résulte de la relation

$$-\frac{1}{f''} + \frac{1}{O''H} = \frac{1}{f''};$$

d'où

$$O''H = \frac{1}{2}f''.$$

L'image réelle se forme précisément à la moitié de la distance qui sépare les deux oculaires. C'est en ce point que l'on place le diaphragme; on lui donne une ouverture qui est la demi-somme de celles des deux oculaires. De cette manière il ne fait rien perdre au champ.

Oculaire positif. — Les oculaires négatifs sont moins employés aujourd'hui que les oculaires positifs imaginés par Ramsden, et dont nous avons donné la description. — La raison principale est que, dans les lunettes à oculaires positifs, l'image réelle des objets éloignés se fait en avant du verre collecteur et ne se déplace pas avec lui. On peut donc, au point où elle se forme, c'est-à-dire au foyer de l'objectif, fixer le réticule.

La croisée des fils et le centre optique de l'objectif déterminent alors dans la lunette une direction fixe, ou, si l'on aime mieux, une droite dont l'orientation, par rapport à l'axe de figure du tube de

la lunette, est indépendante des petits mouvements de l'oculaire.

Cette indépendance ne saurait être obtenue avec les oculaires négatifs, puisque le réticule, pour être visible, doit être placé entre les deux verres de l'oculaire.

L'expression du grossissement d'une lunette à oculaire positif est identique à celle qui est relative au cas des oculaires négatifs; on la déduit de ce qui a été dit page 278, à l'occasion des loupes doubles.

Le grossissement d'une loupe de cette espèce est, avons-nous vu, donné par l'équation (voir p. 278)

$$G = \frac{V}{f''}\frac{f' + f'' - d}{f'},$$

dans laquelle f' et f'' sont les distances focales des deux verres, d la distance qui les sépare, V la distance de vision distincte.

Soit I la grandeur de l'image réelle, F la distance focale de l'objectif. Du centre optique de ce verre, on la verrait sous un angle $\frac{I}{F}$, actuellement on la voit sous un angle

$$\frac{I}{V} \times G = \frac{I}{V} \times \frac{V}{f''}\frac{f' + f'' - d}{f'},$$

Le rapport est

$$\frac{F}{f''}\frac{f' + f'' - d}{f'};$$

c'est le grossissement de la lunette.

Nous ne reproduirons pas, à l'occasion de l'oculaire positif, les calculs que nous avons développés en parlant de l'oculaire négatif

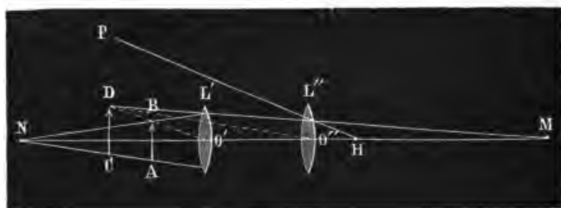


Fig. 603.

Il paraît, du reste, que le plus souvent on ne se conforme pas rigoureusement aux règles qui résulteraient de la condition de l'achromatisme.

Quant à la relation

$$(G + 1)\, tg\, X = \frac{y'}{f'} + \frac{y''}{f''}.$$

elle doit toujours être satisfaite si l'on veut avoir le plus de champ possible.

En effet, qu'on se reporte à la figure 603 : si l'on appelle toujours Δ la distance de l'objectif au premier verre de l'oculaire, y' et y'' les diamètres respectifs de L' et L'', et que l'on conserve du reste toutes les notations de la page 278, on aura toujours :

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{O'M} = \frac{1}{f'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'}{\Delta} + \frac{y}{O'M} = \frac{y'}{f'};$$

et

$$-\frac{1}{O''M} + \frac{1}{O''H} = \frac{1}{f''}, \qquad -\frac{y''}{O''M} + \frac{y''}{O''H} = \frac{y''}{f''};$$

et comme

$$\frac{y'}{O'M} = \frac{y''}{O''M},$$

on en conclura

$$\frac{y'}{\Delta} + \frac{y''}{O''H} = \frac{y'}{f'} + \frac{y''}{f''},$$

c'est-à-dire

$$(G + 1)\, tg\, X = \frac{y'}{f'} + \frac{y''}{f''}.$$

Oculaire terrestre. Redresser à l'aide d'une lentille les images renversées formées par une autre, est le second des problèmes que Képler résout à l'occasion des lunettes à verres convexes.

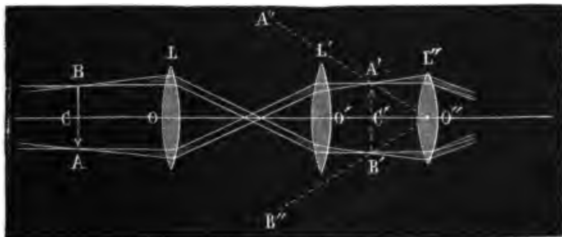


Fig. 604.

Lorsqu'on veut ne point perdre de champ, tout en conservant aux images la même grandeur, il vaut mieux employer à ce but deux verres égaux écartés l'un de l'autre d'une quantité à peu près égale à leur distance focale commune.

La marche des rayons est représentée fig. 604. A'B' est l'image renversée formée par l'objectif; OC' est égal à la distance focale de l'oculaire L; A'B' est l'image redressée que l'on observe avec l'oculaire L''.

La figure 605 représente la disposition que l'on donne ordi-

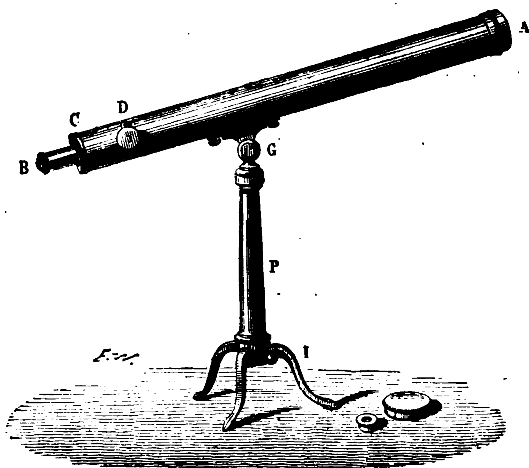


Fig. 605.

nairement aux lunettes de moyennes dimensions que l'on trouve dans tous les cabinets de physique. Le pied GPI est une colonne de cuivre massive. L'objectif se visse en A. D est le bouton d'une crémaillère à l'aide de laquelle on fait mouvoir l'oculaire B. On a représenté près du pied de la lunette : 1° le couvercle de l'objectif; 2° le verre noir dont on arme l'oculaire pour observer le soleil.

§ 6. — MICROSCOPE COMPOSÉ.

Le microscope composé paraît aussi avoir été construit pour la première fois par Zacharie Jansen. — Comme la lunette astronomique il est formé d'un objectif et d'un oculaire.

L'ouverture et la distance focale f de l'objectif doivent être fort petites toutes deux. L'oculaire a une ouverture beaucoup plus grande et par suite une distance focale f' plus considérable.

L'objectif est vissé à l'extrémité inférieure G d'un tube vertical fixe EFG (fig. 606); il forme dans l'intérieur de ce tube une image AB renversée et fortement grossie d'un très-petit objet soutenu sur un porte-objet C qui peut être élevé ou abaissé par un mouvement de vis très-lent. On place l'objet à une distance de l'objectif un peu supérieure à *f* et telle que l'image AB vienne se former sensiblement dans l'ouverture d'un diaphragme placé à la partie supérieure de la partie centrale du microscope.

L'oculaire O est contenu dans un tube D qui, le plus souvent entre à frottement doux dans le corps du microscope; alors il se place naturellement dans une position telle qu'en appliquant l'œil en O, on voie distinctement une image située, soit dans le diaphragme même, comme nous l'avons supposé tout à l'heure, soit à une très-petite distance de ce diaphragme.

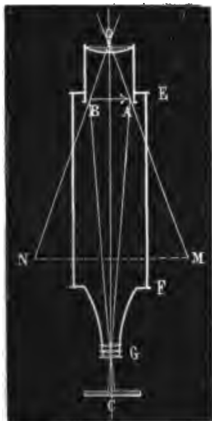


Fig. 606.

Dans ce cas, on achève de mettre au point en déplaçant légèrement l'objet.

Le grossissement total de l'appareil est le produit du grossissement de l'objectif par celui de l'oculaire.

Chaque microscope a plusieurs objectifs, et plusieurs oculaires que l'on peut substituer les uns aux autres afin de varier commodément le champ et le grossissement.

Les objectifs sont ou bien des lentilles achromatiques, ou bien des assemblages de deux ou trois lentilles de ce genre, dont les montures se vissent les unes sur les autres.

Nous avons déjà indiqué quels avantages il peut y avoir à employer deux lentilles convergentes au lieu d'une, lorsqu'on veut avoir, avec une distance focale déterminée, un minimum d'aberration de sphéricité. Il n'est pas inutile d'ajouter la remarque suivante : quelque soin qu'on prenne pour faire une lentille achromatique, il arrive souvent qu'elle laisse encore subsister une légère auréole autour des images. Or, supposons que pour une lentille cette auréole soit rougeâtre, et que pour une autre elle tire sur le bleu, on aura chance, en accouplant ces deux lentilles, d'obtenir un achromatisme plus parfait que celui de chacune d'elles prise isolément.

Quant aux oculaires, ce sont ordinairement des oculaires positifs à deux verres.

Pour mesurer le grossissement d'un microscope, on peut employer un procédé semblable à celui qui servait à Galilée pour mesurer le grossissement de sa lunette. On prend pour objet un micromètre finement divisé, et tandis qu'on le regarde d'un œil à travers l'instrument, on regarde de l'autre œil une règle placée contre le pied du microscope sur la table même qui le supporte, et à une distance égale à la distance de vision distincte.

L'image grossie du micromètre se projette sur la règle et la mesure se fait d'elle-même.

S'il s'agit de mesurer les dimensions d'un objet, on peut se borner à le placer sur un micromètre de verre divisé en centièmes de millimètre et voir quelle étendue il y occupe.

Enfin, on peut rendre la plaque sur laquelle on dépose l'objet mobile par un mouvement de vis micrométrique et faire arriver successivement les deux bords de l'objet sous un fil d'araignée tendu au foyer de l'oculaire, comme dans la lunette ordinaire.

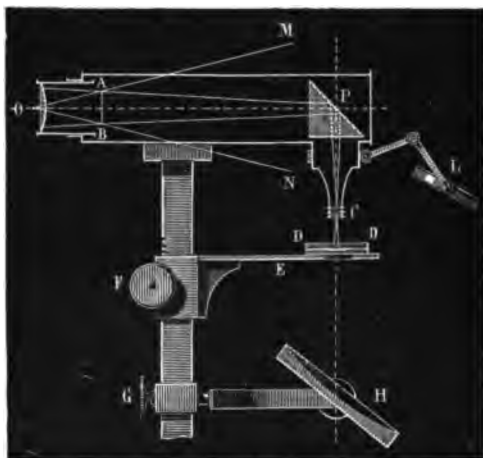


Fig. 607

Les objets à observer se placent d'ordinaire sur une plaque de verre ; s'ils sont translucides, on les éclaire par transparence en projetant la lumière sur leur partie inférieure à l'aide d'un miroir

concave H. — Un diaphragme à ouvertures variables permet de régler convenablement l'éclairement.

Lorsqu'il s'agit d'objets opaques, on les éclaire latéralement à l'aide d'un verre lenticulaire L.

Quelquefois le tube du microscope, au lieu d'être droit, comme nous l'avons supposé, est coudé à 90° dans sa partie moyenne.

Cette disposition permet à l'observateur de rester assis pendant son travail. Les faisceaux sont alors rompus dans leur route par un prisme à réflexion totale placé à la coudure du tube. — Les microscopes de M. Chevalier (fig. 607) sont souvent construits de cette manière : C, objectif; P, prisme à réflexion; O, oculaire; E, porte-objet; F pignon de la crémaillère qui meut le porte-objet; L, lentille éclairante; H, miroir éclairant.

§ 7. — TÉLESCOPES.

Dans les télescopes proprement dits, les images des objets éloignés sont formées par un miroir concave, qui réfléchit les rayons venus de ces objets et les amène à converger, ainsi qu'il a été expliqué pages 171 et suivantes. L'invention de ces appareils paraît postérieure d'une vingtaine d'années à celle des lunettes. Elle paraît due au père Zucchi. Newton en a construit lui-même avec beaucoup de soin, parce qu'il désespérait de pouvoir enlever aux contours des images formées par réfraction les franges irisées qui font disparaître la netteté de la vision.

Télescope de Newton. — Le concours des rayons se faisant en avant du miroir, c'est-à-dire entre la surface réfléchissante et l'objet qui envoie les rayons, il faut, pour rendre les observations possibles, avoir recours à une seconde réflexion, qui rejette les images dans une position telle qu'on puisse en approcher suffisamment sans intercepter les rayons directs. Dans le télescope de Newton, on reçoit les rayons convergents, un peu avant leur point de concours, sur un miroir plan incliné à 45° sur l'axe du tube, ou sur un prisme rectangle dont l'hypoténuse fait elle-même fonction de miroir. Les images se forment alors près de la paroi du tube, et on les observe à l'aide d'un oculaire dont l'axe est perpendiculaire à celui du télescope.

La figure 608 représente la marche des rayons. Les cônes des rayons qui divergent des points A et B de l'objet viendraient après la réflexion sur l'objectif concave converger en A' et B'; mais le petit miroir P les dévie de leur route, et l'image se forme réellement en A''B''; c'est là qu'on l'observe à l'aide de l'oculaire simple ou composé L.

Le miroir plan P, ou le prisme qu'on peut lui substituer, n'intercepte qu'une très-faible partie des rayons incidents et nuit peu à la clarté de l'image.

Ces télescopes portent toujours un chercheur, c'est-à-dire une petite lunette latérale parallèle à leur axe, et avec laquelle on peut les diriger.

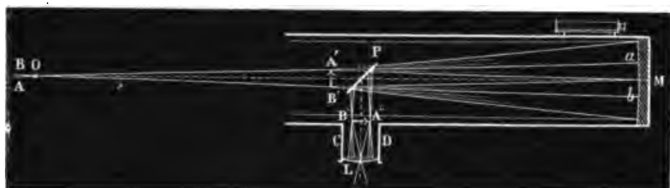


Fig. 608.

Le chercheur grossit peu, mais il a beaucoup de champ, et quand il est pointé sur un astre, il en est de même du télescope.

Télescope de Gregory. — Dans les télescopes de Gregory, (fig. 609), le miroir principal est percé en son centre, et les images sont renvoyées dans cette ouverture centrale par un réflecteur sphérique de petites dimensions dont l'axe principal coïncide avec l'axe de l'instrument. La distance qui sépare les

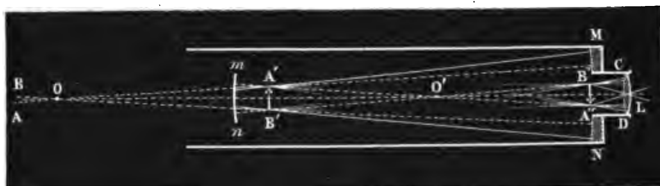


Fig. 609.

deux réflecteurs sphériques est un peu plus grande que la démi-somme de leurs rayons.

L'oculaire est vissé sur l'orifice CD. Il n'a pas de tirage; on met l'instrument au point, en faisant varier la position du petit réflecteur intermédiaire[1].

1. On a été obligé d'exagérer sur la figure les dimensions du miroir *m* et celles de l'oculaire L.

Télescopes en verre argenté. — Les objectifs des télescopes sont faits avec une sorte de bronze susceptible de prendre un beau poli. Mais cette matière est très-lourde, et dès lors la manœuvre des appareils un peu grands devient très-incommode, parce qu'il faut donner aux miroirs une épaisseur considérable pour qu'ils ne se déforment pas d'eux-mêmes.

Herschel avait essayé de faire un miroir objectif de $1^m,20$; mais il n'a pu se conserver, et la plupart des belles observations de cet illustre astronome ont été faites avec un télescope dont l'ouverture ne dépassait pas 60 centimètres. Les travaux de M. Foucault sur ce sujet ont montré comment on peut vaincre les graves difficultés qui avaient arrêté Herschel.

On savait depuis longtemps que certaines solutions organiques argentifères peuvent laisser déposer sur le verre une couche de métal suffisamment adhérente; et l'on savait, d'autre part, que si l'on immerge pendant quelques instants un miroir d'acier bien poli dans une solution d'or, la couche d'or qui se dépose sur l'acier en accroît beaucoup le pouvoir réflecteur, sans rien ôter aux images de la netteté et du mordant qu'elles ont lorsqu'elles sont produites par la réflexion de l'acier seul.

Télescope de M. Steinheil. — Vers 1856, M. Steinheil reconnut qu'en frottant pendant quelques instants avec une brosse de velours une couche mince d'argent déposé sur un verre par la méthode de M. Liébig, on lui donne un éclat métallique parfait, et il profita de cette remarque pour faire des miroirs de télescope argentés sur leur surface concave. Le premier télescope qu'il fit par cette méthode avait un objectif de 4 pouces.

Télescope de M. Foucault. — Quelque temps après, en 1857, M. Foucault utilisait de son côté l'argenture sur verre à la fabrication des miroirs de télescope, et bientôt il parvint à construire des objectifs d'une grande dimension donnant des images d'une pureté parfaite.

Ces objectifs ne présentent pas le poids si incommode des objectifs métalliques. La roideur du verre assure contre les déformations, et si la couche d'argent se ternit, on en remet une autre sans qu'il y ait le moindre risque d'altérer les courbures, tandis que les altérations dans des miroirs de métal entraînent souvent la nécessité très-dispendieuse d'un nouveau travail de la surface.

Les télescopes de M. Foucault sont disposés comme ceux de Newton, seulement l'oculaire est un véritable microscope composé.

Enfin, et ce point est d'une grande importance, M. Foucault

est parvenu à diminuer beaucoup la distance focale de ses télescopes, tout en leur laissant une grande ouverture, c'est-à-dire un grand pouvoir éclairant. Pour y arriver, il donne à ses objectifs une forme qui se rapproche de la forme paraboïdale et qu'il combine d'ailleurs de manière que le système formé par le miroir et le microscope donne des images d'une netteté absolue.

Tous les détails du travail de ces grands instruments sont développés au tome V des *Annales de l'Observatoire impérial;* nous ne pouvons les reproduire ici; nous présenterons seulement à cette occasion quelques conséquences immédiates de la théorie des aberrations, afin de montrer comment de faibles modifications dans la courbure peuvent ou annuler la différence des points de concours des rayons marginaux et centraux, ou même en faire changer le signe.

D'après la formule $x = \frac{rm}{r + 2m \cos \omega}$, établie page 182, un miroir dont le rayon serait 4 mètres et l'ouverture 0m,4 aurait, pour le cas des rayons venus de l'infini, une aberration longitudinale égale à 0m,00274, c'est-à-dire que les rayons centraux concourant à 2 mètres du miroir, les rayons marginaux convergeraient un peu plus près de celui-ci, la distance des points de concours serait 0,00274. Si l'on voulait que les rayons centraux concourussent au même point que ceux dont la réflexion se fait sur les bords du miroir, il faudrait donc diminuer le rayon de courbure de la partie centrale; le calcul prouve qu'il faudrait l'amener à n'être plus que 3,994933.

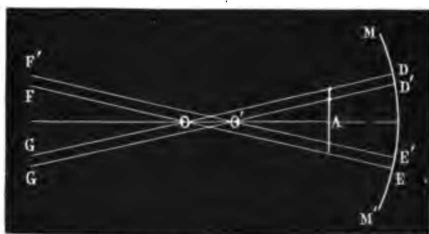


Fig. 610.

Or, si l'on conçoit deux calottes sphériques ayant pour base un même cercle de 0m,1 de rayon, et faisant partie l'une d'une sphère ayant son centre en O et un rayon égal à 4m, l'autre

d'une sphère ayant son centre en O' et un rayon de $3^m,994933$ (fig. 640), il est facile de voir que la longueur de la portion de la ligne OA, qui est comprise entre les deux surfaces, est seulement de $0^m,0000015$.

Ainsi donc, en creusant le centre d'une quantité excessivement petite et faisant le raccord avec la surface marginale, on rendrait nulles les distances des images extrêmes. Seulement, il faut remarquer que les deux images n'auraient pas absolument la même grandeur; car elles soutendraient le même angle lorsqu'on les verrait des centres O et O', et la distance OA est plus grande que O'A. En creusant encore un peu plus le centre, on pourrait forcer l'image la plus petite à se rapprocher encore du réflecteur concave. Enfin il est évident qu'on pourrait obtenir ces différents effets en ouvrant le miroir sur ses bords au lieu de le creuser en son centre.

CHAPITRE XI.

RAIES DU SPECTRE.

En étudiant un spectre solaire fait avec soin, Wollaston y remarqua une particularité dont il n'est point question dans les écrits de Newton : il vit en plusieurs régions de ce spectre des lignes de démarcation nettement accusées entre des couleurs voisines, l'une séparait l'orangé du jaune, une seconde le vert du bleu, deux autres enfin étaient situées dans la portion plus réfrangible. Ces lignes n'étaient autre chose que quelques-unes des raies noires que, bientôt après, Frauenhoffer découvrit en nombre presque indéfini dans toute l'étendue d'un spectre, qu'il analysait avec une lunette ordinaire.

Les raies découvertes par Frauenhoffer sont des lignes parfaitement noires qui sillonnent le spectre dans une direction perpendiculaire à sa grande longueur.

On les retrouve toutes les fois que l'on produit un spectre, en s'astreignant aux règles que nous avons extraites de l'*Optique* de Newton, et dans ce cas, si l'ensemble des couleurs occupe à peu près un mètre sur le tableau, il est quelques raies qui ont plus d'un millimètre de largeur, en sorte qu'on les distingue à une distance assez grande.

Le nombre des raies et surtout leur disposition varient avec la nature de la source lumineuse; et dans certains cas, on voit des bandes brillantes d'un éclat remarquable se substituer aux lignes noires du spectre solaire.

Frauenhoffer a établi le premier de ces deux résultats, en comparant aux raies du spectre solaire celles du spectre que lui fournissait la lumière des planètes ou celle des étoiles. Dans le spectre d'une planète, la disposition des raies est identique à celle qu'on observe dans le spectre solaire; elle est toute différente dans le cas des étoiles.

Pour répéter ces expériences, il faut, à l'aide d'une lentille cylindrique, dilater le point lumineux auquel se réduit, pour l'œil, l'étoile ou la planète sur laquelle portent les observations.

Quant à l'autre phénomène, celui de l'apparition des raies brillantes, on l'a découvert en étudiant les lumières artificielles. Il devient surtout extrêmement remarquable, lorsque les rayons sont émis par l'arc lumineux que l'on obtient entre les deux pôles d'une pile, lorsque l'on volatilise et brûle entre eux une substance métallique.

L'expérience se fait commodément avec la lampe électrique de M. Duboscq. On remplace le *crayon inférieur* par un petit creuset de charbon dont la cavité, ayant la forme d'un hémisphère creux de 3 ou 4 millimètres de profondeur, est néanmoins suffisante pour recevoir une quantité convenable du métal à éprouver. Dès que le contact est établi, la lumière produite suffit à donner un spectre d'un très-vif éclat, et dans lequel on voit apparaître des raies brillantes tout à fait caractéristiques.

Ces raies ont été étudiées et décrites par plusieurs physiciens. M. Foucault a remarqué, en particulier dans le spectre de l'argent, une raie verte d'un magnifique éclat, parfaitement fixe, parfaitement indécomposable au prisme, et qui, par conséquent, pourrait être prise au besoin comme source de lumière homogène.

M. Robiquet est revenu sur cette question, et, dans un récent mémoire, il a signalé plusieurs faits importants touchant la production des raies dans le spectre électrique; il insiste en particulier sur ce point que, si l'on interrompt le courant de manière à faire cesser la volatilisation et la combustion du métal, le spectre que donne la masse fondue et incandescente est absolument privé de raies, et il en conclut que l'existence d'une atmosphère de lourdes vapeurs autour du corps qui brûle est une condition essentielle ou au moins très-favorable à la production des raies. Cette opinion se trouve confirmée par le fait suivant:

Lorsque après avoir fait passer un rayon solaire à travers une

couche de vapeurs hypoazotiques, on l'analyse par un prisme, on voit, dans le spectre résultant, apparaître une multitude de bandes noires toutes différentes des raies de Frauenhoffer et dues bien évidemment à l'absorption que le gaz exerce sur certains rayons de lumière. — L'iode agit d'une manière analogue, quoique moins prononcée; et ce qu'il faut bien remarquer, c'est que ces raies ou bandes noires apparaissent même dans des spectres qui sont absolument dépourvus des raies de Frauenhoffer; tel en particulier celui que l'on obtient avec un fil de platine incandescent.

L'identité des raies que présentent les spectres formés par la lumière solaire directe ou réfléchie sur une planète quelconque, proviendrait alors de la modification que les rayons de l'astre auraient éprouvée en traversant l'atmosphère dont on le suppose entouré, et enfin s'il existe quelque légère différence entre le système des raies que l'on obtient avec les rayons solaires, suivant que l'astre est à l'horizon ou voisin du zénith, on en trouverait l'explication dans l'inégalité d'action absorbante qu'exerceraient des couches atmosphériques d'épaisseurs très-inégales elles-mêmes.

Dans le travail dont nous avons indiqué à la page précédente quelques résultats, M. Robiquet a reproduit photographiquement les spectres des différentes sources lumineuses, le spectre solaire, celui de l'argent, celui du cuivre... ou plutôt, il a reproduit les parties de ces spectres dans lesquelles réside surtout l'action photogénique, c'est-à-dire les portions de plus grande réfrangibilité. Nous devons à son obligeance de pouvoir les présenter ici, et nous ne pouvions penser qu'il ne nous serait pas donné de l'en remercier.

La figure 611 représente la disposition des principales raies du spectre solaire ordinaire. A est la première raie du rouge extrême, H appartient au violet.

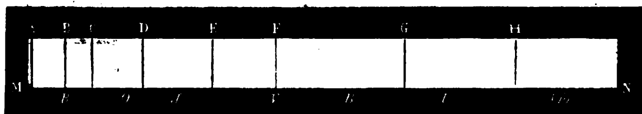


Fig. 611.

Les figures 612, 613, 614 sont les reproductions de photographies de différents spectres obtenus par M. Robiquet.

612 est un spectre solaire obtenu avec un prisme de flint, ou au moins c'est le prolongement de ce spectre; car il ne commence qu'un peu avant la raie H. C'est le spectre formé par les radiations qui possèdent à la fois la plus grande force chimique et la plus grande réfrangibilité.

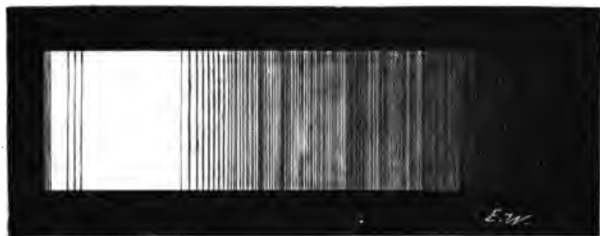


Fig. 612.

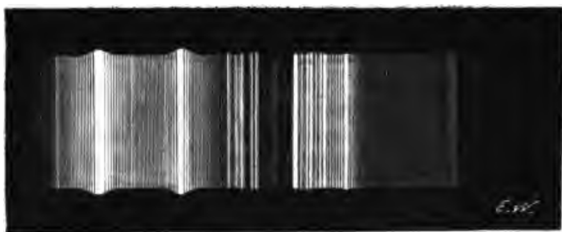


Fig. 613.

613 est de même la partie extrême du spectre de l'argent, et 614 celui de platine.

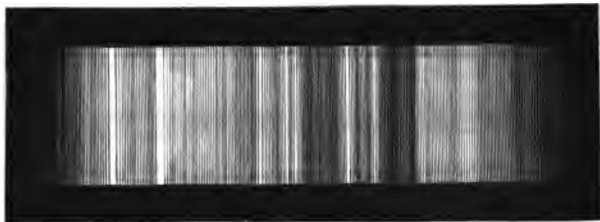


Fig. 614.

CHAPITRE XII.

DÉTERMINATION DES INDICES DE RÉFRACTION.

§ 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX. — INDICES DES SUBSTANCES SOLIDES ET LIQUIDES.

Principes généraux. — La déviation minimum Δ, qu'un rayon lumineux éprouve, en traversant un prisme d'angle A, est donnée par la relation

$$\Delta = 2I - A,$$

I étant l'angle d'incidence à l'entrée dans le prisme (voir p. 198).

De plus, lors du minimum, la relation générale $A = r + r'$ devient

$$A = 2R,$$

R étant l'angle de réfraction à l'entrée dans le prisme; par conséquent, en ces circonstances, on a

$$I = \frac{\Delta + A}{2}$$

et

$$R = \frac{A}{2};$$

enfin, la valeur n de l'indice de réfraction de la substance qui forme le prisme est liée aux quantités Δ et A par la relation

$$n = \frac{\sin I}{\sin R} = \frac{\sin \frac{\Delta + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

D'après cela, pour déterminer, approximativement au moins, l'indice de réfraction d'une substance, on pourrait opérer de la manière suivante :

On mesurerait l'angle réfringent d'un prisme de cette sub-

stance ; on introduirait dans une chambre noire un faisceau solaire très-délié et bien horizontal ; on placerait le prisme comme nous l'avons déjà indiqué page 197, c'est-à-dire de manière que son arête réfringente fût horizontale, perpendiculaire au faisceau solaire, et qu'elle passât à peu près par l'axe de ce dernier; puis, à une distance un peu grande, on recevrait sur un écran vertical, et la trace du faisceau direct, et le spectre. En mesurant d'une part la distance qui sépare l'arête réfringente du tableau, et d'autre part celle qui existe entre le centre de l'image blanche et le milieu de chaque couleur du spectre, on connaîtrait les tangentes des angles de déviation pour toutes les couleurs, et par conséquent on pourrait déterminer l'indice de réfraction du prisme pour les rayons de toutes couleurs. Newton décrit, dans son *Optique*, des expériences faites par des procédés analogues.

Avant lui, on avait employé à la détermination des indices les appareils que nous avons fait connaître page 189, et qui ont servi à établir la loi de la réfraction. Enfin il n'est pas non plus inutile d'indiquer la disposition à l'aide de laquelle Képler « mesurait expérimentalement les réfractions d'un corps solide transparent pour toutes les incidences possibles. » *Dioptr. Probl.* IV.

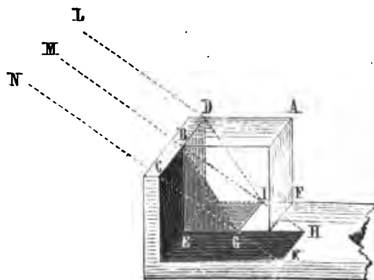


Fig. 615.

Que l'on prenne un parallélipipède rectangle bien transparent et à faces parfaitement planes, et qu'on le place ainsi qu'il est représenté sur la fig. 615 dans l'angle dièdre droit formé de la réunion de deux planches bien dressées, l'une horizontale indéfinie, l'autre verticale de même hauteur que le parallélipipède. Si l'on expose le tout à un faisceau de rayons solaires de direction MBH, l'ombre portée de la planche ne s'étendra

dans le parallélipipède que jusqu'en IG, tandis qu'au dehors elle arrivera jusqu'en HK. Les distances EH, EG sont aisément mesurables, et les quotients $\frac{EG}{BE}$, $\frac{EH}{BE}$ sont les tangentes d'angles de réfraction et d'incidence correspondants.

Indices des solides. — La méthode de Newton est celle qu'on emploie presque toujours maintenant. Elle exige deux déterminations : celle de la déviation minimum, et celle de l'angle réfringent du prisme.

Pour les effectuer, on emploie quelqu'un des appareils dont on fait usage pour la mesure des angles, et qui consiste toujours en une lunette mobile autour du centre d'un cercle gradué.

L'alidade à laquelle est fixée la lunette est munie de verniers dont les zéros doivent être sur un même diamètre du cercle gradué, en sorte que dans toutes les positions possibles leurs indications diffèrent de 180°.

Lorsque cette condition n'est pas tout à fait satisfaite, il faut en conclure que la ligne des zéros est un peu excentrique comme la ligne AB (fig. 616). Alors, si l'on meut l'alidade, pour obtenir la valeur de l'angle FOE dont elle a été déplacée, il faut prendre la demi-somme des arcs AA' et BB'. Cette demi-somme mesure en effet l'angle ACA' et par suite l'angle en O qui lui est égal.

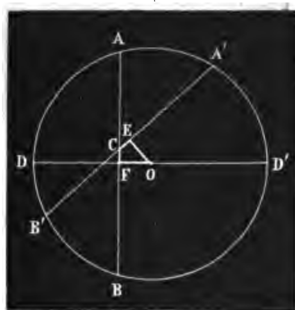


Fig. 616.

Une légère excentricité dans l'axe optique de la lunette ne présente pas non plus en général d'inconvénient grave. Reportons-nous à la figure 616, et supposons que AB et A'B' nous représentent maintenant les directions que prend l'axe lorsque la lunette vise successivement à deux points un peu éloignés.

L'angle ACA', dont l'appareil donne la mesure, ne diffère pas de celui sous lequel du point O l'on verra la distance des deux mêmes objets.

Mesure de l'angle réfringent. — S'il s'agit de mesurer l'angle réfringent, on dispose le prisme sur un support bien fixe, de telle sorte qu'une mire verticale éloignée puisse être vue par réflexion sur les deux faces de l'angle à mesurer. Lorsque les deux images de la mire sont verticales toutes deux, il en est de même de l'arête réfringente. Alors on mesure l'angle AOB compris entre les droites AO et OB menées d'un point O à l'objet et à son image réfléchie sur la face CB; on mesure de même l'angle A''''O'B' compris entre les lignes menées du point O' à la mire et à son image réfléchie sur la deuxième face (fig. 617).



Fig. 617.

La demi-somme de ces angles est l'angle cherché. En effet, à cause de l'éloignement de la mire, les lignes qui la joignent aux points O, B, C, B', O', sont parallèles entre elles. D'où l'on conclut :

$$A'BC = BCD$$

et

$$CB'A''' = B'CD.$$

D'autre part, par la loi de la réflexion

$$A'BC = OBE$$

et

$$CB'A''' = O'B'F;$$

donc enfin

$$ECF = \frac{AOB + B'O'A''''}{2}.$$

On arrive plus commodément à mesurer l'angle réfringent d'un prisme en employant le goniomètre de Charles. Cet appareil est formé d'un cercle gradué horizontal, autour du centre duquel se meut une alidade; le prisme se place sur cette alidade et au-dessus du centre, ainsi qu'on le voit sur la figure 618; une lunette fixe

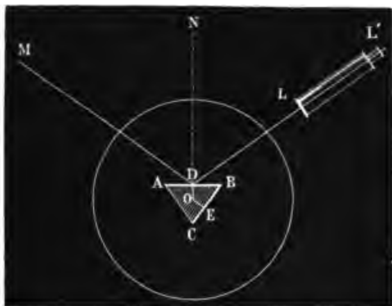


Fig. 618.

LL' pointant vers le centre, est supportée par une colonne qui fait corps avec le reste de l'instrument.

Pour opérer, on rend verticale l'arête de l'angle à mesurer, soit B, et l'on fait tourner le prisme de manière que l'image d'une mire verticale éloignée M, vue par réflexion d'abord dans la face AB, puis dans la face BC, vienne successivement coïncider avec le fil vertical de la lunette LL'. L'angle EOD dont on fait tourner l'alidade pour obtenir ces deux coïncidences successives est le supplément de celui que l'on veut connaître. Il est clair en effet que si les rayons venus de la mire sont à peu près parallèles entre eux, l'image réfléchie reviendra coïncider avec le fil vertical de la lunette, lorsque la seconde face réfléchissante aura pris une position parallèle à celle que la première possédait d'abord; et par conséquent, la normale menée du centre à cette seconde face se retrouvera précisément dans la direction suivant laquelle elle était d'abord dirigée.

M. Babinet a perfectionné le goniomètre de Charles en le dis-

posant de manière que l'observateur ait toujours à sa disposition une mire rejetée à une distance infinie.

Sur le prolongement de l'un des rayons qui soutiennent le cercle gradué (fig. 619) il fixe un tube MM' tout semblable à

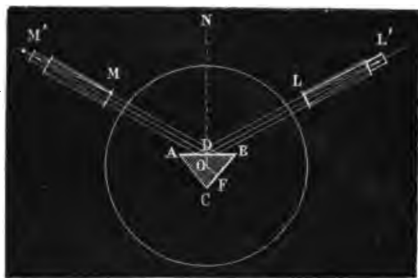


Fig. 619

celui de la lunette LL' et dont l'axe se trouve aussi dirigé vers le centre du cercle. A son extrémité extérieure, ce tube porte un diaphragme à fente rectiligne d'ouverture variable. La direction de la fente est perpendiculaire au plan du limbe.

A l'autre extrémité, le tube est fermé par une lentille, dont la longueur focale est égale à la distance comprise entre son centre optique et la fente du diaphragme.

Grâce à cette disposition, si l'on éclaire fortement la fente, toute la lumière qu'elle envoie à la lentille forme à l'émergence un faisceau de rayons parallèles entre eux et qui peut, en conséquence, remplacer très-avantageusement celui qu'à la page précédente on supposait venir d'une mire éloignée.

Enfin, on peut tendre au foyer de la lentille du *collimateur* un fil très-fin et qui présente un point de repère plus délié encore que la fente du diaphragme, si rétrécie qu'on la puisse supposer.

Mesure de la déviation. — Pour mesurer la déviation, on place l'arête réfringente du prisme verticalement; le cercle gradué est horizontal, et les rayons sur lesquels on opère partent d'un point situé dans le plan horizontal que décrit l'axe de la lunette.

Le prisme peut être placé sur un support indépendant du cercle graphométrique, ou bien il peut être porté par le cercle lui-même, comme on le verra à la page suivante. Le premier cas est représenté figure 620.

Dans cette figure, l'angle de déviation qu'il faut estimer est

S'AO; il est égal à la somme de l'angle AOS, que l'on mesure directement, et de l'angle ASO, lequel est ordinairement très-petit et a pour tangente la fraction $\frac{BO}{SB}$, dont les deux termes peuvent se mesurer directement avec une approximation toujours très-suffisante. Au reste, le plus souvent on prend la mire assez loin pour que la différence qui existe entre les angles S'AO et AOS soit tout à fait négligeable.

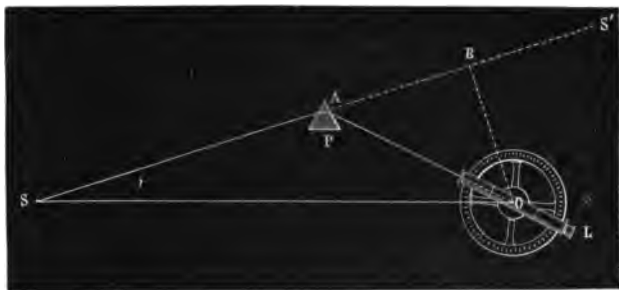


Fig. 620.

On peut prendre pour mire une fente étroite et fortement éclairée, ou bien une tige noire se détachant nettement sur le ciel à une grande distance. La première méthode permet d'apprécier avec sûreté les déviations des différentes couleurs.

En 1850, M. l'abbé Dutirou a déterminé les indices de réfraction d'un grand nombre de verres qui peuvent être employés à la fabrication des objectifs achromatiques. « A l'exemple de « Rudberg et de M. Baden Powel, il a suivi dans cette recherche « le principe de la méthode du goniomètre de Charles en s'ef- « forçant de la rendre en tous points rigoureuse. »

La lunette du cercle destinée à la mesure des angles était portée sur une alidade mobile autour du centre, comme on le voit fig. 621. Le prisme était supporté par le cercle gradué et son arête réfringente, toujours exactement verticale, passait par le centre même. La mire était une fente verticale très-étroite, pratiquée à 10 mètres environ du goniomètre dans le volet d'une chambre noire; un héliostat y projetait les rayons solaires dans la direction du prisme, et comme l'arête réfringente de ce dernier passait par le centre autour duquel la lunette pivotait, on pouvait, même quand le prisme était en place, viser directement à la fente. Seulement,

l'image focale n'était alors formée que par les rayons qui tombaient sur une des moitiés de l'objectif.

Le prisme était porté au centre du limbe gradué sur une petite tablette soutenue par trois vis, dont le jeu permettait de rendre bien verticale l'arête réfringente. Cette tablette pouvait en outre être poussée latéralement dans deux sens rectangulaires, de manière qu'il n'y avait aucune difficulté à amener l'arête du prisme en coïncidence avec le fil vertical de la lunette, et cela quelque position qu'on donnât à l'alidade.



Fig. 621.

Il faut seulement remarquer que, pour opérer cet ajustement, on était obligé de changer l'objectif de la lunette, parce que, vu la proximité du prisme, l'objectif ordinaire n'en formait point une image réelle en avant de l'oculaire.

Les raies étaient parfaitement visibles; et l'on s'assurait que, pour chacune d'elles, le minimum était obtenu dans les expériences successives, en constatant que cette raie, une fois en coïncidence avec le fil vertical de la lunette, ne le quittait plus, quoiqu'on imprimât au prisme une légère rotation dans un sens ou dans l'autre.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur la détermination des indices, nous avons toujours admis que, dans les mesures de déviation, le prisme était amené à la position qui répondait au minimum. Alors, comme nous l'avons montré plus haut, il suffit de connaître à la fois cette déviation et la valeur de l'angle réfrin-

gent pour en déduire l'indice cherché. On pourrait encore arriver à de bons résultats sans s'astreindre à placer le prisme dans la position du minimum; seulement alors il faudrait mesurer directement l'angle d'incidence i.

Les équations à résoudre seraient :

$$D = i + i' - A \qquad r + r' = A$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \qquad \frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin r}{\sin r'}.$$

Elles suffiraient à déterminer les inconnues i', r, r' et n.

Avec son appareil, M. Dutirou a aussi employé cette méthode; la mesure de i s'opérait sans difficulté.

Soit en effet (fig. 622) CAB le prisme, AN la normale à la face

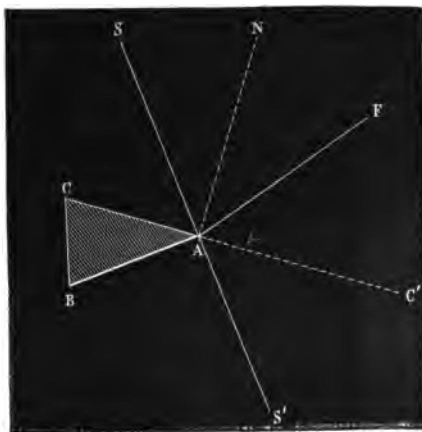


Fig. 622.

d'entrée, SA le rayon incident en A, et AF le rayon réfléchi correspondant. L'angle FAS', dont il faut déplacer la lunette pour l'amener de la position où elle vise sur la fente à celle où elle reçoit le rayon réfléchi est le supplément du double de l'angle d'incidence i; par conséquent celui-ci s'obtient par une simple lecture.

On peut encore, dans la mesure des indices de réfraction, employer avec beaucoup d'avantage le goniomètre de Charles, perfectionné par M. Babinet. Il faut seulement lui donner des

dimensions un peu plus fortes que les dimensions ordinaires. La marche des opérations est identique à celle que nous avons décrite précédemment. La fente du collimateur devient une mire rejetée à l'infini. On peut l'illuminer avec une lumière homogène, et si on l'éclaire avec la lumière blanche ordinaire, son spectre, vu dans la lunette, présente les raies avec une grande netteté (fig. 623).



Fig. 623.

Indices de réfraction des liquides. — Quand on veut déterminer l'indice de réfraction d'un liquide, il faut nécessairement enfermer ce dernier dans un prisme creux. Du reste, rien n'est changé à la marche des opérations. Les prismes dont on fait usage sont quelquefois formés d'un flacon coupé par deux plans parallèles à son axe. On ferme les ouvertures avec deux glaces à faces parallèles, que l'on maintient à l'aide d'une monture métallique, et l'on prend pour angle du prisme celui que font entre elles les faces extérieures des lames de glace. D'autre fois, pour faire le flacon qui doit contenir le liquide, on prend un prisme de verre dégrossi (fig. 624), on le perce d'un trou ayant environ 0,02 de diamètre, et dont l'axe soit parallèle à l'une des faces du prisme; on fore également la base supérieure de manière à se ménager une ouverture qui puisse servir ultérieurement à l'introduction du liquide. La fermeture latérale s'obtient toujours avec des glaces à faces parallèles.

La condition du parallélisme est fondamentale; car si elle n'est

pas remplie, la déviation du rayon lumineux est nécessairement altérée. Pour éviter cette cause d'erreur, on peut employer un procédé indiqué par MM. Biot et Arago, et qui consiste d'abord à prendre les deux morceaux de glace bout à bout dans une seule

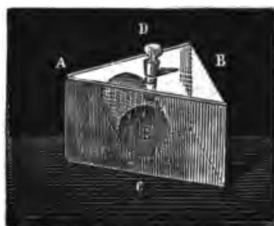


Fig. 624.

et même règle de cette subtance, et puis à les appliquer contre le prisme, en ayant soin de les fixer, l'un par rapport à l'autre, de telle sorte que, s'ils ont une forme prismatique, l'action déviante de l'un soit exactement compensée par celle de l'autre (fig. 625).



Fig. 625.

On y arrive en repliant, pour ainsi dire, la lame primitive autour du vase à recouvrir, ou plus rigoureusement, en plaçant à l'angle réfringent du prisme les deux bords *aa'*, *bb'*, qui se faisaient suite dans la lame primitive.

Puis, toutes ces précautions prises, on éprouve directement si le prisme creux plein d'air exerce quelque action sur la lumière, et si faible que soit l'influence, une fois qu'on l'a constatée, on la fait entrer avec son signe dans l'évaluation des déviations que l'on mesure ultérieurement dans la série des expériences de détermination.

Procédé du duc de Chaulnes. — Les procédés que nous venons de décrire supposent que l'on a à sa disposition des quantités de matière assez considérables pour qu'on en puisse

former un prisme de dimensions appréciables. Ils ne peuvent plus être appliqués quand il faut prendre l'indice de minces lames solides ou celui de liquides rares et dont on possède seulement quelques gouttes dans un état de pureté satisfaisante. — Le duc de Chaulnes a résolu la première de ces deux difficultés par une méthode toute spéciale et qui a conduit aux procédés maintenant employés pour déterminer les indices dans ces cas intéressants.

Nous avons démontré page 215 que, si l'on interpose une lame transparente à faces parallèles ayant une épaisseur e et un indice n sur le trajet d'un faisceau lumineux divergent d'un point P situé à une distance p de la face antérieure de la lame, ces rayons, à leur émergence, semblent diverger d'un point P'', dont la distance à la face postérieure de la lame est égale à $p + \frac{e}{n}$. La distance des points P et P'' est donc

$$e - \frac{e}{n} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ceci posé, imaginons qu'à l'aide d'un microscope on vise un trait fort délié tracé sur une lame de verre mise sur le porte-objet, en réglant la distance, pour que l'image ait son maximum de netteté. Si l'on interpose sur le trajet des rayons une lame réfringente à faces parallèles d'épaisseur connue e, la mire semblera rapprochée, l'image deviendra confuse, et, pour lui rendre sa netteté primitive, il faudra reculer la mire d'une quantité d égale à $e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.



Fig. 626.

Si le porte-objet est mû par une vis micrométrique, on mesurera d avec une grande exactitude, et l'on en déduira la valeur de n.

Procédé de M. Brewster. — M. Brewster a étendu au cas des liquides la méthode du duc de Chaulnes. — Voici de quelle manière il opère :

Concevons un microscope (fig. 626) disposé de telle sorte que la distance de l'objet au système objectif puisse se mesurer très-rigoureusement, et l'on sait qu'un mouvement de vis micrométrique permet de satisfaire à cette condition. Admettons, de plus,

que l'on puisse amener une lame de verre bien plane et bien transparente au contact de la face inférieure de l'objectif, de telle sorte que, tout autour du point de tangence, il existe entre le verre convexe et la lame plane un espace ayant la forme d'un ménisque concave.

Que l'on place maintenant sur le porte-objet un micromètre finement divisé AG, et qu'on l'approche ou l'éloigne à une distance p jusqu'à ce que son image soit vue bien nettement, c'est-à-dire vienne se former au foyer de l'oculaire, à une distance p' de l'objectif; entre les quantités p, p' et la distance focale a de l'objectif existera la relation

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{a}.$$

Si l'on met une goutte liquide entre les deux verres C et BH, on aura un système objectif différent du premier, et l'image sera rejetée à une distance plus grande que p'.

Pour la ramener à la position qu'elle occupait d'abord, il faudra reculer l'objet à une distance de l'objectif plus grande que p, soit p_1. Ces deux positions successives de l'objet devront être des foyers conjugués par rapport au ménisque; autrement les rayons qui pénètrent dans la lentille convexe C ne convergeraient pas à la distance p'. Si donc on représente par n l'indice du liquide et par r le rayon de courbure de la lentille C, on aura

$$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}=-\frac{n-1}{r}=-\frac{1}{a''}.$$

Ainsi n se trouve exprimé en fonction de r et des données de l'observation directe, savoir p et p_1.

Il est vrai que la recherche directe de la valeur numérique de r paraît à peu près impossible; mais heureusement elle n'est pas nécessaire.

On peut opérer, en effet, sur un liquide d'indice connu N et déterminer pour ce liquide la valeur $\frac{1}{A''}$ de l'expression $\frac{N-1}{r}$. Par suite on aura

$$\frac{A''}{a''}=\frac{n-1}{N-1}$$

d'où l'on déduit $\frac{n}{N}$.

Réfractomètre. — M. F. Bernard a imaginé et décrit, sous le nom de réfractomètre, un appareil à l'aide duquel on peut déter-

miner l'indice de réfraction d'une lame à faces parallèles en mesurant la quantité dont se trouve rejeté latéralement, dans un sens ou dans l'autre, un rayon lumineux qui la traverse obliquement (fig. 627).

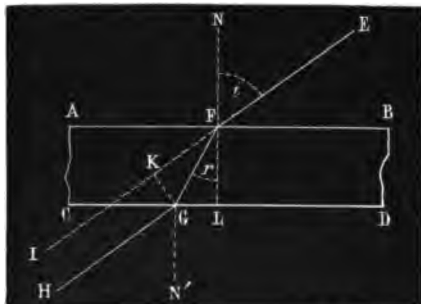


Fig. 627.

Soit ABCD la lame transparente, EFGH le rayon lumineux qui la traverse; soit représenté par i l'angle d'incidence NFE, et par r l'angle de réfraction GFL; soit enfin e l'épaisseur de la lame mesurée normalement à ses faces, et n son indice, el GK le rejet latéral du rayon; posons $GK = t$, on a :

$$= GK = FG \sin (i - r), \qquad FG = \frac{e}{\cos r},$$

$$t = GK = \frac{e \sin (i - r)}{\cos r} = e \sin i - e \cos i \; tang. r,$$

et par suite,

$$tang. r = \frac{e \sin i}{e \cos i} - \frac{t}{e \cos i},$$

$$= tang. i - \frac{t}{e \cos i}.$$

Si donc on peut commodément mesurer i et t, on en conclura *tang.* r et de là, r. Enfin i et r étant connus, le rapport de leurs sinus donnera l'indice cherché.

L'appareil de M. F. Bernard permet précisément de mesurer i et t: la figure 628 le représente sous la forme que lui a donnée M. J. Pichot dans une série de recherches récemment publiées sur la détermination des indices.

Sur une plate-forme solide sont supportés : en L une lunette à court foyer; en M, un micromètre très-fin servant de mire,

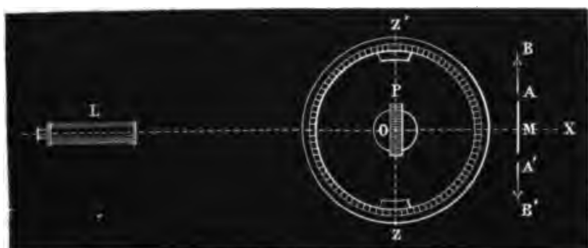


Fig. 623.

lequel peut être déplacé par un mouvement de vis micrométrique dans le sens de la flèche AB ou de la flèche A'B'; enfin, un cercle gradué dont le centre O est sur le prolongement de l'axe de la lunette L. Autour du centre O se meut une alidade portant deux verniers Z, Z', et sur laquelle on peut fixer soit une pince P portant une plaque à faces parallèles, soit une auge propre à recevoir des liquides ou un tube pouvant contenir des gaz.

On éclaire le micromètre à l'aide d'un rayon prismatique homogène ou d'une lampe monochromatique placée en X, et l'on prend soin de le recouvrir à sa partie antérieure d'un diaphragme à fente linéaire pour réduire beaucoup la largeur du faisceau qui tombe sur la lame. Enfin on conduit l'expérience de la manière suivante :

On enlève d'abord la lame P et l'on pousse le micromètre M dans un sens ou dans l'autre, jusqu'à ce que le trait central vienne faire son image au point de croisement des fils de la lunette. Puis on place la lame transparente ou l'auge qui doit contenir les liquides à étudier, et on les tourne jusqu'à ce que la mire revienne se placer à la croisée des fils. On fixe alors sur l'alidade le support qui soutient la lame ou l'auge. On lit la position des verniers, puis on tourne l'alidade d'un angle D. D représente alors l'angle d'incidence i de la formule établie à la page précédente. — La mire quitte la croisée des fils; on l'y ramène par le mouvement de la vis dont il a été parlé, et l'on mesure ainsi t; e est connu par des expériences antérieures. On a donc toutes les données nécessaires au calcul de n.

Il faudra seulement prendre soin de recommencer l'expé-

rience d'abord en inclinant la lame de gauche à droite, si on l'avait d'abord inclinée de droite à gauche, et enfin en la retournant bout par bout sur elle-même.

Lorsqu'on opère avec des liquides, la déviation de l'auge pleine est égale à la somme de celles que produisent la lame liquide seule d'une part, et les deux parois de l'auge d'autre part.

Cela se voit clairement à l'inspection de la figure 629, dans laquelle PP', QQ' sont deux lames de glace renfermant entre elles une couche d'eau. Si le rayon AB passait directement dans l'eau, il y suivrait une direction parallèle à CE, ainsi qu'on l'établit à la page suivante. Il serait donc rejeté latéralement

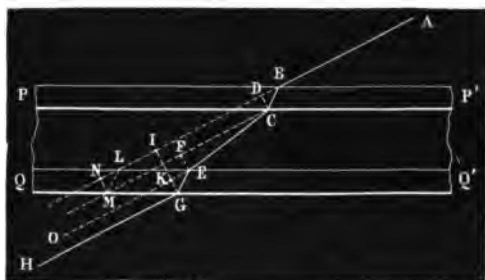


Fig. 629.

d'une quantité égale à EF. Ici son déplacement total est CD + EF + GK, c'est-à-dire la somme des déplacements partiels produits par les trois couches réfringentes qu'il traverse successivement.

Dans les expériences sur les liquides il faut donc commencer par estimer isolément l'action de la cuve seule.

Indice principal. — Lorsqu'on a déterminé le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction que forme un rayon lumineux en passant de l'air dans différents milieux solides ou liquides, on peut en déduire ce que l'on appelle l'indice principal de ces milieux, c'est-à-dire l'indice de la réfraction que la lumière éprouve en passant du vide dans leur intérieur, si l'on avait mesuré le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction au passage de l'air dans le vide.

Newton a établi en effet que si N et N' sont les rapports de ces sinus au passage d'un même milieu A dans deux autres B et C,

$\frac{N'}{N}$ sera ce qu'on appelle souvent l'indice de réfraction de C par rapport à B, ou plus exactement l'indice de la réfraction que la lumière éprouve en passant de C en B. Voici comment on peut démontrer cette proposition : L'expérience prouve que, si l'on a plusieurs lames à faces parallèles, de natures différentes et superposées comme on le voit fig. 630, un rayon lumineux qui

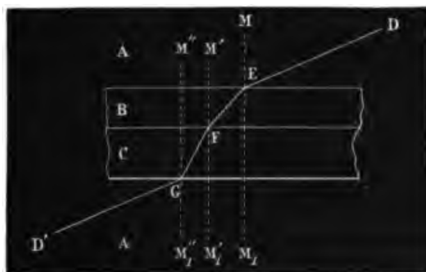


Fig. 630.

les traverse obliquement reste à l'émergence parallèle à sa direction primitive; en d'autres termes, on a ici $MED = D'GM''_1$, soit

$$\frac{\sin MED}{\sin FEM_1} = N \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin D'GM''_1}{\sin FGM''} = N';$$

on en déduit

$$\frac{N'}{N} = \frac{\sin FEM_1}{\sin FGM''};$$

or

$$\begin{array}{c} FEM_1 = M'FE \\ FGM'' = GFM'_1 \end{array};$$

donc

$$\frac{N'}{N} = \frac{\sin M'FE}{\sin GFM'_1},$$

ce qui est la proposition à démontrer.

§ 2. — INDICES DES GAZ.

Expériences de MM. Biot et Arago. — L'étude de la déviation que la lumière éprouve en passant de l'air dans le vide est du reste le point de départ des recherches que MM. Biot et Arago

ont faites sur les réfractions des gaz, et par suite aussi le point de départ de toutes les études qui ont été depuis entreprises sur le même sujet.

MM. Biot et Arago interposaient sur la marche d'un rayon lumineux venu d'une mire très-éloignée, un prisme creux de grandes dimensions (fig. 631). Ils y raréfiaient l'air graduellement, et, pour différentes pressions successives et bien connues, ils mesuraient l'inflexion qu'il faisait éprouver à la lumière incidente.



Fig. 631.

Le prisme avait été construit par Borda ; il était formé d'un gros tube de verre cylindrique coupé obliquement par deux plans inclinés l'un sur l'autre de 142° environ. Les bords de chaque section avaient été rodés avec soin, de manière que des glaces bien dressées et polies pussent s'appliquer exactement sur leurs pourtours et boucher les orifices qu'ils circonscrivaient. Enfin, la paroi latérale du prisme était percée de deux trous par lesquels il communiquait avec un baromètre d'une part et une machine pneumatique d'autre part.

Le prisme était disposé dans une des salles du palais du Luxembourg, et l'on prenait pour mire un des paratonnerres de l'Observatoire. Les angles se mesuraient avec un bon cercle répétiteur qui reposait sur un support parfaitement fixe. Et comme il était indispensable que l'appareil n'éprouvât aucun dérangement pendant les expériences, une lunette attachée au pied de l'instrument était pointée sur un repère très-éloigné, dont l'image, pendant toute la durée des opérations, devait toujours rester à la croisée des fils.

Le milieu renfermé dans le prisme était moins réfringent que

l'air, et par conséquent le rayon se relevait en le traversant, de telle sorte que l'équation qui déterminait la déviation en fonction de l'angle d'incidence était $D = A - (i + i')$, ainsi que nous l'avons expliqué antérieurement. Le procédé de détermination de l'indice est complétement indépendant de cette particularité.

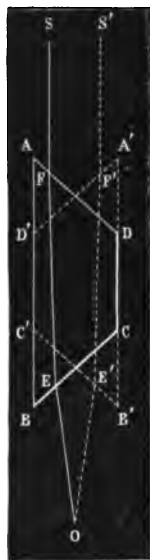


Fig. 632.

La grande difficulté de l'expérience provenait de l'extrême faiblesse des déviations à mesurer; aussi MM. Biot et Arago employaient-ils toujours le procédé de la répétition des angles; de plus, par suite d'une particularité de l'expérience provenant encore de la petitesse des effets produits, ils se trouvaient obligés de modifier un peu la marche ordinaire des déterminations.

La déviation était au minimum quand l'axe du prisme était tourné vers la mire, et dans cette position, les parois du tube arrêtaient les rayons directs. On ne pouvait donc pas, ainsi qu'on le fait d'ordinaire, viser successivement à la mire et à son image réfractée. Heureusement, si l'on ne pouvait mesurer directement l'angle cherché, il était facile d'en obtenir le double. Il suffisait, après avoir pointé la lunette sur la mire pour une première position du prisme, de tourner celui-ci de 180°. La déviation était égale à celle qui avait lieu dans le premier cas, mais elle était de sens inverse; et pour passer de l'une à l'autre des deux directions successives du rayon réfracté, la lunette devait décrire un angle égal au double de la déviation minimum (fig. 632).

Quant à la répétition des angles on l'obtenait de la manière suivante :

La lunette et le cercle qui en donnait la marche pouvaient tourner autour du même centre, soit ensemble, soit séparément. Le cercle étant fixe, et le prisme dans la première position, on visait à l'image réfractée, et on lisait la position de la lunette. On tournait le prisme de 180°, on amenait de nouveau *la croisée des fils* sur la mire déviée et on fixait la lunette sur son limbe. Alors on remettait le prisme à la position 1, et l'on tournait *le limbe* pour ramener le fil de la lunette sur la mire. Puis on fixait le limbe de nouveau, on tournait le prisme et, desserrant la pince de la lunette, on visait de nouveau à l'image.

A ce moment, la lunette était distante de sa première position sur le limbe d'un angle égal au quadruple de la déviation cherchée. En général si, en continuant ainsi, on déplace *n* f
la lunette, sa n^e position sera distante de la première d'un angle égal à $2n$ fois la déviation à mesurer.

Quant à l'influence des glaces qui fermaient le prisme, il fallait l'étudier avec soin et en tenir compte, ainsi que nous l'avons expliqué page 311.

En opérant ainsi, MM. Biot et Arago ont déterminé les indices de la réfraction que la lumière éprouve en passant de l'air extérieur dans l'air plus ou moins raréfié. Or, si l'on trace deux axes rectangulaires OX et OY, fig. 633, que sur OX on porte des lon-



Fig. 633.

gueurs égales représentant des centimètres de pressions, que par la division 76 on élève une ordonnée AB égale à 1, et qu'aux points de l'axe des abscisses qui représentent les pressions sous lesquelles MM. Biot et Arago ont opéré, on élève des lignes qui soient à AB comme les indices correspondants sont à l'unité, la courbe qui joindra ces ordonnées deviendra sensiblement parallèle à l'axe dans le voisinage de OY, et la distance qui sépare l'origine du point C, où elle coupera cet axe, représentera le rapport du sinus d'incidence et de réfraction au passage de l'air dans le vide.

Ce rapport étant connu, on peut, des nombres fournis par les expériences de MM. Biot et Arago, déduire les indices principaux n, n', n''... de l'air sous différentes pressions, et l'on trouve alors que les fonctions $n^2 - 1$, lesquelles ont reçu le nom de puissances réfractives, sont proportionnelles à ces pressions.

La même loi se vérifie pour des mélanges de gaz différents et pour des mélanges de gaz et de vapeurs.

Expériences de M. Dulong. — En s'appuyant sur les résultats que nous venons de faire connaître, M. Dulong a déterminé les

indices de réfraction d'un certain nombre de gaz que MM. Biot et Arago n'avaient pas étudiés. Le procédé de Dulong est d'une application facile, mais il suppose la connaissance de la loi des puissances réfractives, et de plus celle de l'indice absolu d'un gaz. Voici en quoi consiste ce procédé :

On fixe sur une colonne de maçonnerie un prisme à gaz semblable à celui de Borda (fig. 634), et que l'on peut mettre aisément en communication avec un manomètre à deux branches, à peu près plein de mercure. A travers ce prisme plein d'air, on vise une mire éloignée, et l'on assujettit la lunette dans une position invariable; puis on enlève l'air du prisme et on le remplace par un autre gaz dont l'action réfringente sera, par hypothèse, plus énergique que celle de l'air. La mire sera plus déviée que d'abord, mais en faisant écouler une convenable quantité de mercure, on la ramènera sous le fil de la lunette. A ce moment l'indice du gaz intérieur sous la pression p sera égal à l'indice

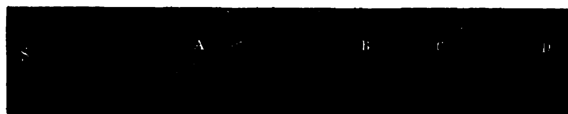


Fig. 634.

de l'air sous la pression extérieure; soit a ce dernier indice. Celui du gaz, sous la même pression, se déduira alors de l'équation :

$$\frac{x^2 - 1}{a^2 - 1} = \frac{0,76}{p}$$

Si le gaz était moins réfringent que l'air, ce serait ce second fluide que l'on dilaterait pour l'amener toujours à avoir même action que celui dont il faut trouver l'indice.

Les lois trouvées par MM. Biot et Arago dans leurs études sur l'action réfringente du gaz paraissent applicables aux liquides. Il résulte en effet d'expériences faites par M. Jamin que, pour l'eau liquide soumise à des pressions variables, la puissance réfractive est exactement proportionnelle à la densité.

D'autre part, M. Berthellot a montré que tous les nombres trouvés par M. H. Saint-Claire-Deville dans ses études sur les indices de réfraction des mélanges d'eau et d'alcool peuvent être déterminés à priori, si l'on admet que la puissance réfractive

d'un mélange liquide est égale à la somme de celle des éléments du mélange.

Ces extensions des lois de MM. Biot et Arago sont très-importantes; mais elles laissent encore indécise la question de l'influence que la température exerce sur les phénomènes lorsque les conditions d'expérience sont telles que la densité reste nécessairement invariable.

Le renseignement le plus positif que l'on ait sur la question est une observation de M. Arago, de laquelle résulte que la puissance réfractive de l'eau à zéro est plus grande qu'à quatre degrés, quoique la densité soit moindre, d'où semble résulter que la température a une influence propre et indépendante de celle de la densité du corps réfringent.

Un dernier fait enfin doit être signalé; toutes choses égales d'ailleurs, il résulte des expériences de MM. Arago et Petit, d'une part, et de celles de M. Jamin, d'autre part, que la puissance réfractive de la vapeur d'eau est inférieure à celle que l'on déduirait par le calcul de la puissance réfractive de l'eau liquide en la diminuant proportionnellement aux variations de la densité.

Pour compléter ce chapitre, nous donnons les valeurs des indices de réfraction de quelques substances. Dans le premier des tableaux qui les renferment, nous avons inscrit les valeurs des indices du crown, du flint et de l'eau pour les rayons voisins des principales raies du spectre.

Dans un autre tableau on trouve les indices moyens de différentes substances solides ou liquides.

Le troisième fait connaître les indices des gaz.

Il s'agit toujours des indices absolus, et par conséquent, le calcul de tous ces nombres a exigé la connaissance de la réfraction que la lumière éprouve en passant du vide dans l'air à la pression 0,76.

Nous avons supposé qu'on avait eu recours au tracé d'une courbe pour déduire le nombre qui mesure la grandeur de cette réfraction des valeurs N', N'', N''', assignées par l'expérience aux indices de la réfraction que la lumière éprouve en passant de l'air à 0,76 dans l'air aux pressions p', p'', p'''.

En réalité on a admis à priori la loi des puissances réfractives. Dans cette hypothèse, en désignant par n, n', n'', n''' les indices absolus de l'air sous les pressions 0,76, p', p'', p''', on devait avoir :

$$\frac{n'^2 - 1}{n''^2 - 1} = \frac{p'}{p''}; \qquad \frac{n'^2 - 1}{n'''^2 - 1} = \frac{p'}{p'''} \dots\dots$$

ou bien

$$\frac{\left(\frac{N'}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{N''}{n}\right)^2 - 1} = \frac{p'}{p''}; \qquad \frac{\left(\frac{N'}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{N'''}{n}\right)^2 - 1} = \frac{p'}{p'''} \ldots\ldots$$

Et en effet, toutes ces équations sont vérifiées par une même valeur de N, laquelle est l'indice absolu de l'air à la pression 0,76, tel qu'il est inscrit au tableau précédent.

Enfin, nous donnons aussi pour quelques corps la valeur du pouvoir dispersif, c'est-à-dire celle de la fonction $\frac{n_v - n_r}{n_j - 1}$, dans laquelle n_r, n_j n_v, représentent, pour la substance considérée, les indices des rayons rouges, jaunes et violets.

INDICES DE LA RÉFRACTION DES RAYONS HOMOGÈNES DANS LE VERRE ET DANS L'EAU.

Noms des substances.	Indices des rayons voisins des raies principales.						
	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
Eau..................	1.3309	1.3317	1.3336	1.3359	1.3378	1.3413	1.3449
Crown-glass..........	1.5258	1.5268	1.5296	1.5330	1.5361	1.5417	1.5466
Flint-glass............	1.6277	1.6297	1.6350	1.6420	1.6483	1.6603	1.6711

INDICES MOYENS DE QUELQUES CORPS SOLIDES OU LIQUIDES.

Noms des substances.	Indices.	Noms des substances.	Indices.
Diamant..................	2.480	Sel gemme................	1.55
Nitrate de plomb..........	1.758	Alcool....................	1.363
Sulfure de carbone.........	1.678	Éther.....................	1.358

INDICES DE DIFFÉRENTS GAZ A 0° ET 0m,76.

Noms des gaz.	Indices.	Noms des gaz.	Indices.
Air..................	1.000294	Acide carbonique......	1.000449
Hydrogène...........	1.000138	Cyanogène....	1.000834
Chlore...............	1.000772	Gaz oléfiant............	1.000678

POUVOIRS DISPERSIFS D'UN CERTAIN NOMBRE DE CORPS.

Noms des substances.	Pouvoirs dispersifs.	Noms des substances.	Pouvoirs dispersifs.
Sulfure de carbone.	0.115	Flint-glass........	0.052 à 0.048
Baume de Tolu....	0.103	Eau........... ..	0.035
Huile de girofle....	0.062	Crown...........	0.032

CHAPITRE XIII.

SYSTÈME DES ONDULATIONS. — INTERFÉRENCES.

§ 1er. — INTRODUCTION.

Idées de Descartes et de Huygens. — Descartes, aux premières pages de sa dioptrique, pose en principe que « l'on voit les couleurs et les lumières sans qu'il passe rien de *matériel* des objets à nos yeux... la lumière n'étant autre chose qu'un certain mouvement ou *action* fort prompte et fort vive qui passe vers nos yeux par l'entremise des corps transparents... » Huygens développa les idées de Descartes, mais en les modifiant profondément. Il admit que des différents points des corps lumineux partent des ondes qui se propagent avec une extrême vitesse à travers un fluide éthéré, répandu partout, d'une densité très-faible et formé de molécules éminemment élastiques. Les ondes lumineuses sont analogues aux ondes sonores; leur développement et leur propagation est un résultat de l'élasticité de l'éther, comme la propagation du mouvement dans une série de billes d'ivoire est un résultat de l'élasticité de celles-ci. Newton n'accepta point cette manière de voir. Pour lui, les rayons de lumière étaient des séries d'innombrables corpuscules lumineux lancés par le soleil, les étoiles, les corps incandescents, se mouvant en ligne droite dans le vide ou les milieux diaphanes homogènes, mais éprouvant en général, au passage d'un de ces milieux dans un autre, les phénomènes de la réflexion et de la réfraction : et pourtant Newton ne repoussait pas l'existence de l'éther, et même, à l'occasion du phénomène de la vision, il semble incliner à admettre que, de l'œil au cerveau, l'impression se communique par des vibrations analogues à celles que Huygens regardait comme constituant le rayon de lumière lui-même.

« La vision n'est-elle pas produite par les vibrations de ce milieu (l'éther), excitées dans le fond de l'œil par les rayons de

lumière et propagées par les fibriles solides, diaphanes et uniformes du nerf optique?... » (Opt. Liv. III. Quest. 23.)

« Et des rayons de différente espèce ne produisent-ils pas des vibrations de différentes grandeurs, lesquelles excitent selon leurs grandeurs des sensations de diverses couleurs, à peu près de la même manière que les vibrations de l'air causent suivant leurs grandeurs les sensations de différents sons? En particulier, les rayons les plus réfrangibles ne produisent-ils pas les plus courtes vibrations pour exciter la sensation d'un violet foncé, et les moins réfrangibles les vibrations les plus étendues pour produire la sensation d'un rouge foncé? » (Opt. L. III. Quest. 13.)

Les idées de Descartes et de Huygens, quoique admises par Euler, avaient été, d'après l'autorité de Newton, presque généralement abandonnées. Les belles expériences de Young les rappelèrent à l'attention des physiciens, et les grands travaux de Fresnel les ont fait définitivement admettre.

§ 2. — PRINCIPE DES INTERFÉRENCES.

Observations de Grimaldi. — Un des phénomènes qui conduisent le plus directement à la théorie des ondulations est celui des interférences lumineuses. Il consiste en ce que : « *de la lumière tombant en un point d'un corps déjà éclairé d'autre part peut en certaines conditions produire de l'obscurité en ce point.* »

La découverte de cet important phénomène est due à Grimaldi. Nous avons conservé les termes dans lesquels il la fait connaître (*Physico Mathesis*, liv. I, prop. XXII).

Voici comment Grimaldi démontrait le principe des interférences.

Il introduisait dans une chambre noire les rayons solaires à travers deux trous très-fins et très-rapprochés, et il recevait les deux faisceaux transmis à travers ces trous sur un écran blanc perpendiculaire à leur direction commune; à une grande distance, les faisceaux empiétaient légèrement l'un sur l'autre. Le milieu de la partie commune était bien lumineux, les bords, à droite et à gauche, formaient deux franges obscures dont chacune se détachait nettement de la tache lumineuse sur laquelle elle se trouvait.

D'autres phénomènes également observés par Grimaldi fournissent une nouvelle vérification du principe des interférences.

Lorsqu'un trait de lumière solaire est introduit dans une chambre obscure à travers une ouverture fort étroite, les ombres des

corps exposés à cette lumière présentent des particularités remarquables. Supposons, par exemple, que le corps plongé dans le faisceau lumineux soit une plaque opaque CC′ (fig. 635) indéfinie dans un sens, et que l'on reçoive son ombre sur un écran blanc DD′ perpendiculaire à la droite SC. — Alors la séparation d'ombre et de lumière n'aura pas lieu brusquement au point D; de D vers D′ on observera une pénombre rapidement décroissante, ce qui prouve que quelques rayons auront pénétré dans



Fig. 635.



Fig. 636.

l'espace où l'on pourrait croire qu'il doit exister de l'ombre pure; de plus, à gauche de D, on apercevra deux ou trois franges alternativement brillantes et obscures, et qui sont un peu irisées quand on opère avec de la lumière blanche. Si le corps introduit dans le rayon de lumière est une tige de 2 ou 3 millimètres de diamètre C (fig. 636), l'ombre DE sera extérieurement bordée de chaque côté de trois franges distinctes, et à l'intérieur on trouvera encore sur les deux bords la pénombre décroissante dont nous avons déjà parlé.

Enfin, si la tige devient très-fine, son ombre présentera à l'intérieur une série de franges vives et très-différentes de celles qui la bordent à l'extérieur.

Ces franges apparaissent dans le lieu où viennent se superposer les deux pénombres intérieures, ou, si l'on aime mieux, les rayons

qui de droite et de gauche semblent s'infléchir vers le centre de l'ombre; Young pensa qu'elles étaient dues à l'action réciproque de ces deux rayons. Il supprima l'un d'eux par un écran opaque, et aussitôt les franges intérieures disparurent, et l'ombre ne présenta plus de portions aussi foncées que les franges noires primitivement existantes.

Enfin Young répéta la première expérience de Grimaldi, et en donnant une valeur convenable à la distance de l'écran aux deux trous, il vit entre les deux taches lumineuses apparaître une *série de franges* analogues à celles qui se développent dans l'ombre d'un corps étroit. — Ces franges disparaissaient toujours lorsqu'on bouchait l'un des deux trous, et par suite il était encore évident qu'ici, comme dans l'expérience citée à la page précédente, le concours de deux rayons lumineux produisait de l'obscurité.

Cette assertion serait paradoxale dans le système de l'émission; elle n'a au contraire rien que de très-naturel, si les phénomènes lumineux sont le résultat de mouvements vibratoires excités et transmis dans un milieu élastique. Alors, en effet, on conçoit que l'obscurité des franges noires puisse résulter de la destruction d'un mouvement lumineux par un autre, absolument comme dans les phénomènes étudiés page 49 les nœuds de vibration proviennent de l'action réciproque de deux ondes sonores en retard, l'une par rapport à l'autre, d'un nombre impair de demi-oscillations.

En un mot, la théorie des interférences sonores s'applique complétement à l'explication des phénomènes observés par Young, et elle assigne la position que doivent occuper, à toute distance des centres lumineux, les franges des différents ordres, ou du moins elle montre comment ces positions se trouvent liées à la longueur d'onde des rayons interférents. Il faut toutefois faire une remarque; nous ne pouvons ici assigner à priori la relation qui existe entre la direction de la vibration et celle de la propagation du rayon lumineux; mais, quelle que soit cette relation, si, dans un milieu homogène indéfini, on conçoit un centre d'ébranlements lumineux A (fig. 637) et différents points C, B, D, très-voisins les uns des autres et à même distance d de A, les vibrations qui s'y trouveront transmises au même instant seront semblables de tous points, pourvu que d soit suffisamment grand. Si on les décompose parallèlement à trois directions rectangulaires déterminées, leurs composantes homologues seront identiques entre elles. Et si l'on considère un autre point D', très-voisin de D et à une distance de A fort peu différente de d, et égale à d + DD', on devra admettre qu'à l'instant t les mouvements

élémentaires en ce point seront identiques à ceux qui existaient en D, B, ou C, à une époque antérieure à t, d'un temps θ égal au temps qu'il faut au mouvement vibratoire pour parcourir l'accroissement de distance DD'; en un mot, ils ne différeront que par leurs phases de ceux que nous considérions d'abord.



Fig. 637.



Fig. 638.

Ceci posé, concevons un plan quelconque passant par les points lumineux A et B (fig. 638), et dans ce plan une droite CD, menée par le milieu de AB, perpendiculairement à cette ligne.

Concevons de plus qu'en A et B existent des mouvements vibratoires, ayant à chaque instant même période, même sens et même intensité.

Quelle que soit la manière dont les ondes lumineuses se propagent, les mouvements qui, partis de A et B, arriveront au même instant à un point quelconque D de la ligne CD, y seront complétement d'accord entre eux, et de plus, ils seront sensiblement parallèles, pourvu toutefois que l'angle ADB soit très-petit. Cet accord absolu tient à l'identité des conditions dans lesquelles s'est faite la propagation du mouvement de A en D et de B en D.

Soit maintenant un point N, pris à droite ou à gauche du point D, sur la droite EE' menée par D parallèlement à AB. Les mouvements qui, partis des points A et B, arrivent au même instant au point N, auront en ce point des différences de phases

égales au quotient que l'on obtient en divisant la différence des chemins NA et NB par la longueur d'ondulation de la lumière que l'on emploie dans l'expérience. Quand ce quotient sera un nombre entier, les mouvements seront concordants, il y aura frange lumineuse; quand il sera égal à un nombre entier accru de 1/2, il y aura opposition de vitesse et frange obscure.

Si donc on désigne par λ la longueur d'ondulation lumineuse, les quotients $\frac{NA - NB}{\lambda}$ seront égaux à

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \cdots$$

pour les franges obscures du rang

$$1 \quad 2 \quad 3,$$

et à

$$0 \quad 1 \quad 2$$

pour la frange lumineuse centrale et pour les autres franges brillantes de rang

$$1 \quad 2,$$

et cela quelle que soit la distance des lignes AB et EE'. Les franges se propagent donc dans l'espace sous forme d'hyperboles ayant leurs foyers en A et B.

De plus, on voit que, si l'on a un moyen sûr de mesurer la différence NA — NB, on pourra en déduire la valeur de λ.

Enfin, si ces valeurs de λ, déduites de l'observation des différentes franges, sont concordantes entre elles, il ressortira de cette identité une vérification complète de la théorie.

Mesures des franges; expériences de Fresnel. — Fresnel a donné pour mesurer les différences NA — NB une méthode que nous allons exposer.

Soient toujours (fig. 638) A et B les deux points lumineux, CD une perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, D le point où elle rencontre l'écran sur lequel on observe les franges. Cet écran est supposé parallèle à AB. Il est coupé, suivant EE', par le plan ABD. Soit N un point quelconque de la ligne EE'. Posons $AB = 2a$, $CD = d$, $DN = f$. En considérant les deux triangles dans lesquels ANB est partagé par la perpendiculaire NN' abaissée du point N sur AB, on trouve que la distance NA est égale à

$$\sqrt[2]{d^2 + (a + f)^2}$$

et la distance NB à

$$\sqrt[2]{d^2 + (a - f)^2}.$$

La différence Δ de ces deux distances est :

$$d\left\{\sqrt[2]{1 + \left(\frac{a+f}{d}\right)^2} - \sqrt[2]{1 + \left(\frac{a-f}{d}\right)^2}\right\}$$

si l'on développe les radicaux en remarquant que les fractions $\frac{a+f}{d}$ et $\frac{a-f}{d}$ sont très-petites, on trouve simplement :

$$\Delta = d \times \frac{4af}{2d^2} = \frac{2af}{d}.$$

La valeur numérique du facteur $\frac{2a}{d}$ peut s'obtenir de plusieurs manières. On peut mesurer $2a$ au microscope et d avec une règle divisée ordinaire. On peut encore, en un des points de CD, placer perpendiculairement au plan ABD une tige opaque Z (fig. 639),



Fig 639.

qui projettera deux ombres, X et X', sur un écran ee' parallèle a EE', et suffisamment éloigné. On aura alors $\frac{2a}{XX'} = \frac{ZC}{ZC'}$; et

comme XX', ZC et ZC' peuvent se mesurer directement, on en conclura $2a$.

Reste à mesurer la distance f.

La théorie précédente indique que le faisceau des franges dont l'étude nous occupe doit être composé de deux parties complétement symétriques l'une de l'autre par rapport à la frange brillante, formée par lé concours des rayons qui ont parcouru des chemins égaux depuis les centres de mouvement A et B.

L'expérience confirme la théorie, et souvent la frange centrale est aisément reconnaissable par son éclat et la fermeté du ton des franges obscures qui la limitent. Si donc N est le milieu d'une frange obscure ou brillante, il sera toujours facile de distinguer le milieu de sa symétrique N_1, et l'on obtiendra la valeur de f en prenant la moitié de NN_1.

Au reste, il n'est pas indispensable de faire concourir à la détermination de la longueur d'onde l'observation de deux franges symétriques l'une de l'autre par rapport à la frange centrale. Soient, par exemple, considérées d'un même côté de la partie centrale du phénomène, la frange brillante de rang p et celle de rang $p + q$; et soient f et f' leurs distances au milieu de la frange centrale, on aura

$$p\lambda = \frac{2af}{d} \text{ et } (p+q)\lambda = \frac{2af'}{d}.$$

d'où :

$$q\lambda = \frac{2a}{d}(f' - f)$$

Et comme les valeurs numériques de q et de $(f' - f)$ peuvent évidemment être obtenues sans que l'on ait besoin de distinguer la frange centrale, on voit que la détermination de λ est indépendante de l'observation de celle-ci.

Fresnel a donné un procédé très-exact pour mesurer la petite longueur NN_1.

« Voulant observer les franges, j'imaginai, dit-il, de les recevoir sur une plaque de verre dépoli et de les regarder par derrière avec une loupe. Or, en promenant mon œil armé de la loupe dans le prolongement des franges, au delà du verre dépoli, je remarquai que je les voyais encore, et même beaucoup plus nettement, et qu'elles étaient du reste absolument semblables à celles qui se peignaient sur la glace... »

D'après cela, pour mesurer la largeur des franges il suffit d'employer une petite loupe portant à son foyer un fil très-fin, et qui soit mise en mouvement par une vis micrométrique (dans

une direction parallèle à EE'). Pour mesurer la distance de deux franges, on amène successivement le fil sur le milieu de la première et sur le milieu de la seconde, et l'on compte le nombre de tours que la vis a faits en passant de la première position à la seconde, etc.

Les franges primitivement obtenues par Young sont très-fines et peu lumineuses; on les obtient plus nettes et plus brillantes en substituant aux deux trous qui donnent passage aux rayons interférents deux fentes longitudinales parallèles entre elles et distantes de 1 à 2 millimètres. A 3 ou 4 mètres les franges sont larges, pures, et bien brillantes encore. Il suffit pour éclairer les fentes d'introduire dans la chambre noire un rayon solaire par une ouverture très-étroite et parallèle à ces fentes. Le parallélisme est de rigueur; mais on l'obtient aisément, grâce aux mouvements de rappel dont se trouvent ordinairement munies les pièces à l'aide desquelles on opère. Le détail de ces pièces sera donné à l'occasion des expériences de diffraction, chap. XV.

Miroirs de Fresnel. — Pour produire des franges d'un plus bel éclat, Fresnel employait encore le procédé suivant.



Fig. 640.

Les rayons solaires pénétraient toujours dans la chambre noire par une ouverture rectiligne très-étroite et verticale A (fig. 640);

mais au lieu de venir éclairer deux fentes voisines, ils tombaient sur un système de deux miroirs en métal ou en verre noir BD, DC, inclinés l'un sur l'autre d'un angle très-voisin de 180°.

L'arête de l'angle dièdre qu'ils formaient entre eux était parallèle à la fente A, et leurs bords se touchaient tout le long de cette arête sans qu'il y eût saillie de l'un sur l'autre.

En ces circonstances, les images A′ et A″ de la fente A, vues respectivement dans les deux miroirs, pouvaient être regardées comme deux sources identiques envoyant des rayons concordants en tout point Z′ de la perpendiculaire élevée sur le milieu de A′A″. En effet, chacun de ces rayons avait, à partir de la source, parcouru le même chemin pour arriver en Z′; et, de plus, tous deux s'étaient réfléchis dans des circonstances parfaitement identiques. Mais en tout point pris en dehors de la perpendiculaire ZZ′, la différence de marche des rayons n'était plus nulle, et par suite les conditions de développement des franges étaient satisfaites.

Il n'est pas inutile de remarquer que la perpendiculaire ZZ′ passe au point D. Cela tient à ce que les distances A″D et A′D sont égales entre elles comme l'étant isolément à la ligne DA.

Lorsqu'on fait varier l'angle des deux miroirs, on change par cela même la distance des images A′ et A″. Si l'on ouvre l'angle, A′ et A″ se rapprochent, et les franges s'élargissent; dans le cas contraire, elles deviennent de plus en plus fines et serrées.

A l'origine, Fresnel fixait simplement ses miroirs l'un contre l'autre avec de la cire molle. Mais il est plus commode pour régler leurs positions relatives de les enchâsser dans une monture spéciale. La monture est toute métallique. L'un des miroirs peut être poussé ou tiré parallèlement à lui-même à l'aide d'une vis dont le pas est très-fin et très-régulier. Le second est soumis à l'action de quatre autres vis. Les trois plus petites, disposées en triangle, font jusqu'à un certain point l'effet de vis calantes. Elles servent à assurer le parallélisme ou la coïncidence des arêtes des miroirs. La dernière permet de faire varier l'angle dièdre compris entre leurs surfaces.

Longueur d'ondulations des divers rayons. — D'après les mesures de Fresnel, les rayons rouges voisins de l'extrémité du spectre solaire auraient pour longueur d'onde moyenne $0^{m},000638$. On peut, d'après le même physicien, adopter les nombres suivants comme représentant les longueurs d'ondes des autres rayons simples. Il les a déduits des observations de Newton sur les anneaux colorés, ainsi que nous le verrons au chapitre suivant.

TABLEAU DES LONGUEURS D'ONDE DES DIFFÉRENTS RAYONS SIMPLES.

LIMITES DES COULEURS PRINCIPALES.	VALEURS EXTRÊMES DE λ.	COULEURS PRINCIPALES.	VALEURS MOYENNES DE λ.
	mm.		mm.
Violet extrême.......	0.000406	Violet..............	0.000423
Violet indigo.........	0.000439	Indigo.............	0.000449
Indigo bleu..........	0.000459	Bleu......	0.000475
Bleu vert............	0.000492	Vert................	0.000512
Vert jaune..........	0.000532	Jaune.........	0.000551
Jaune orangé..... ...	0.000571	Orangé......... ...	0.000583
Orangé rouge........	0.000596	Rouge........... ...	0.000620
Rouge extrême..	0.000645		

Il n'est pas inutile, à l'occasion de ce tableau, de chercher à se faire idée de la durée d'une vibration lumineuse.

La longueur d'onde moyenne est $0^{mm},0005$. Il y en a donc 2000 par millimètre ou 2 millions par mètre, et mille fois 2 millions par kilomètre.

Or la lumière parcourt à la seconde 80000 lieues ou 320000 kilomètres. Ainsi, dans la trois cent vingt millième partie d'une seconde elle exécute mille fois deux millions de vibrations ; ou bien encore elle exécute deux cents millions de vibrations dans un temps inférieur à la trois millionième partie d'une seconde.

Franges irisées dans la lumière blanche. — Lorsqu'on opère avec une lumière homogène, les franges sont nombreuses et très-nettement tranchées, tandis que dans la lumière blanche elles s'irisent rapidement à mesure qu'elles s'écartent de la bande centrale, et disparaissent bientôt dans une teinte blanchâtre uniforme.

Ces différences sont une conséquence nécessaire de celles qui existent entre les longueurs d'onde des différents rayons. En effet, d'après ce qui a été établi page 335, si l'on désigne par f la distance du milieu de la bande centrale à la frange noire de rang p, on a

$$\frac{(2n-1)\lambda}{2} = \frac{2nf}{d}$$

d'où

$$\lambda = \frac{4af}{(2p-1)d} \qquad \text{ou bien} \qquad f = \lambda\frac{(2p-1)d}{4a}$$

f varie donc avec λ, et à peu de distance de la frange centrale il doit y avoir superposition des bandes de toute nature.

Expériences de projection. Biprisme. — On peut rendre très-sensible la différence de largeur des franges de diverses couleurs par l'expérience suivante.

On s'arrange de manière à former un beau système de franges verticales; puis on fait tomber sur un prisme, dont l'arête soit verticale elle-même, l'ensemble des rayons lumineux qui contiennent les franges, et l'on forme un spectre avec ce faisceau complexe; enfin, à l'aide d'une lentille de convergence, on rassemble les rayons dispersés, de manière à reformer les franges au foyer de la lentille.

Les choses ainsi disposées, et le spectre tout entier se trouvant bien étalé sur la face antérieure de la lentille (voir fig. 641 en



Fig. 641.

r, o... b, i, vio), on arrête, à l'aide d'un carton convenablement percé ADCB (fig. 641), la partie supérieure des couleurs jaune, verte, bleue, violette, et la partie inférieure des couleurs rouge, orangé, jaune, verte. On obtient alors au foyer de la lentille un système double de franges : la partie supérieure est rouge, l'inférieure bleue, et les différences de largeur des franges se perçoivent alors d'une manière tout à fait frappante.

Lorsqu'on opère avec les rayons solaires, les franges données

par les miroirs de Fresnel sont assez vives pour qu'on puisse les rendre visibles à la fois de tous les points d'un amphithéâtre; il suffit de les projeter sur un tableau blanc à l'aide d'une lentille cylindrique placée à peu de distance du système des miroirs. Il n'est pas difficile de donner alors aux franges projetées jusqu'à 1 mètre de longueur, sans que leur éclat cesse d'être convenable.

Lorsqu'on opère avec la lumière électrique, pour arriver à coup sûr à une projection convenable, il faut produire les franges à l'aide d'un autre appareil décrit par M. Pouillet au tome II de son traité de *Physique,* et connu sous le nom de biprisme.

Ce biprisme n'est autre chose qu'un prisme de verre ABC (fig. 642), dont l'angle réfringent B est si considérable qu'à

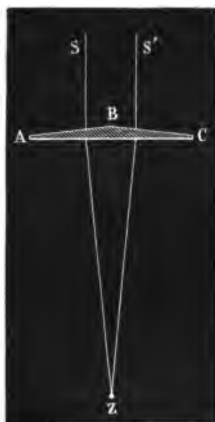


Fig. 642.

première vue la pièce dans laquelle il est taillé semble avoir ses deux faces parallèles. On fait tomber sur ce verre un faisceau lumineux venant d'une fente étroite, parallèle à l'arête réfringente, et l'on s'arrange de manière que ce faisceau SS' soit perpendiculaire à la base AC du prisme, et coupé par l'arête réfringente B en deux portions à peu près égales. Ces faisceaux, infléchis en sens inverses par les réfractions qu'ils éprouvent, se rencontrent derrière le prisme, en Z, par exemple, et de leurs actions mutuelles résultent des franges qui sont en général très-brillantes, et se projettent avec une grande facilité.

Appareil de M. Billet. Demi-lentilles. — On peut encore

obtenir d'excellents résultats avec un appareil que M. Billet a fait connaître, et qu'il décrit en son *Traité d'Optique* (t. I, p. 67) sous le nom d'appareil *des demi-lentilles*.

On coupe en deux parties égales une lentille sphérique LL' (fig. 643), et l'on en écarte les deux moitiés de quelques mil-

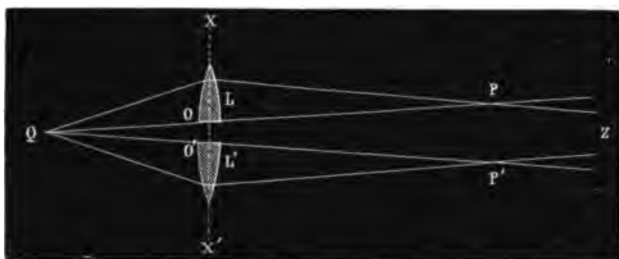


Fig. 643.

limètres, en s'arrangeant de manière qu'elles ne s'inclinent pas l'une sur l'autre. Sur ces deux demi-lentilles on reçoit la lumière venue d'un point éloigné Q, et l'on obtient alors deux images distinctes P et P' de ce point lumineux unique.

Les rayons qui divergent de l'image réelle P et ceux qui viennent de P' se rencontrent quelque part en Z, et là apparaissent les franges d'interférence.

Lorsqu'aux demi-lentilles sphériques on substitue un système de demi-lentilles cylindriques, les images lumineuses P et P' sont des lignes brillantes qui se prêtent parfaitement à l'expérience; les franges ont un très-bel éclat; il faut seulement que la section faite dans la lentille cylindrique soit parallèle à son axe, et qu'il en soit de même de la fente lumineuse.

Lorsqu'on emploie l'appareil de M. Billet, il est très-facile de mesurer au micromètre la distance des points P, P', puisque ce sont des images réelles; et il est de plus très-facile de mesurer la distance de la ligne PP' au plan sur lequel on étudie les franges.

§ 3. DÉPLACEMENT DES FRANGES.

Expérience d'Arago. — Lorsque, dans les expériences que nous venons de décrire et de discuter, on interpose sur le trajet d'un des rayons interférents une lame très-mince de mica ou de verre

soufflé, l'ensemble des franges se trouve déplacé et rejeté du côté de la lame. Cette observation très-importante est due à Arago. Elle indique que la lumière se propage moins vite dans la lame réfringente que dans l'air, et l'on en peut déduire un procédé pour mesurer la longueur de l'ondulation lumineuse dans le milieu dont est formé la lame qui a produit le déplacement.

En effet, dans le système des franges déplacées, la frange centrale brillante résulte toujours de la superposition des deux rayons, suivant lesquels des nombres égaux de vibrations ont été exécutés depuis l'époque où les mouvements ont quitté les centres lumineux A et B jusqu'à celle où ils se rencontrent en N (fig. 644).



Fig. 644.

Si donc nous désignons par e l'épaisseur de la lame de mica, par λ et λ' les longueurs d'ondulation d'une même lumière dans l'air et dans le mica, nous aurons

$$\frac{BN - e}{\lambda} + \frac{e}{\lambda'} = \frac{AN - e}{\lambda} + \frac{e}{\lambda}$$

ou simplement

$$\frac{AN - BN}{\lambda} = \frac{e}{\lambda'} - \frac{e}{\lambda}$$

et l'on voit déjà que, puisque le déplacement a lieu du côté de la lame, λ' est moindre que λ. Autrement, en effet, AN — BN serait négatif.

Maintenant, si la frange centrale est venue prendre la place

qu'occupait primitivement la frange brillante de rang p, on aura, d'après ce que l'on a vu plus haut,

$$\frac{AN - BN}{\lambda} = p$$

par suite

$$e\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = p \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{e}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - 1\right) = p$$

On connaîtra donc λ' ou encore $\frac{\lambda}{\lambda'}$ dès que e, λ et p seront connus; et comme dans l'équation $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{p\lambda}{e} + 1$, $\frac{\lambda}{e}$ est très-petit, on voit que les moindres variations de $\frac{\lambda}{\lambda'}$ répondront à des variations considérables de p. Ainsi, l'expérience d'Arago conduit à un procédé précieux pour mesurer les moindres variations de l'indice de réfraction des corps, car le quotient $\frac{\lambda}{\lambda'}$ représente précisément la valeur de cet indice pris par rapport à l'air. Nous donnerons bientôt une raison théorique de cette assertion. Qu'il nous suffise maintenant de dire qu'elle se vérifie dans tous les cas où, en opérant sur des corps d'indice connu, on détermine $\frac{\lambda}{\lambda'}$ par la méthode précédente.

Application de la méthode d'Arago à la mesure des indices. — Arago et Fresnel ont cherché à appliquer le procédé dont nous venons d'indiquer le principe à la recherche des légères différences qui existent dans l'action réfringente de l'air sec et de l'air saturé de vapeur à 30°. Les couches d'air sur lesquelles ils opéraient avaient une épaisseur de $1^m,10$. Elles étaient renfermées dans des tubes de cuivre fermés par des parois de glace. Ces tubes représentaient les couches d'air et de mica, de même épaisseur e que nous considérions à la page précédente. Il est fort important dans la construction d'un appareil de ce genre de donner même épaisseur totale à l'ensemble des lames de verre que doit traverser chacun des rayons interférents. Un dixième de millimètre de verre en plus ou en moins sur la marche d'un des rayons répondrait, d'après la formule $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{p\lambda}{e} + 1$, à un déplacement de 100 franges environ.

D'autres expériences ont été faites par Arago et M. Laugier

pour apprécier l'influence que la présence du brouillard dans l'air exerce sur la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans ce fluide.

Appareil d'Arago. — L'appareil auquel Arago a donné la préférence pour ces expériences a été construit par MM. Soleil et Duboscq.

La figure 645 en représente le plan général.

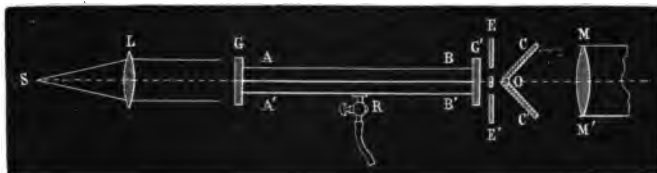


Fig. 645.

En S est une source de lumière, une lampe, par exemple, placée au foyer d'une lentille L. Le faisceau émergant vient illuminer deux fentes parallèles très-fines et percées à environ $0^{m},0015$ l'une de l'autre dans un écran opaque EE'. Abstraction faite des parties ABA'B' et CC' de l'appareil, les rayons qui traversent ces fentes sont dans les conditions propres à l'interférence; on pourrait recevoir et observer les franges qui résultent de leur action mutuelle à l'aide d'un oculaire placé à un distance convenable de EE'.

Les pièces ABA'B', CC', servent au déplacement des franges, à la régularisation et à la mesure de ce déplacement.

AB et AB' sont deux tubes de cuivre longs de 1 mètre environ, séparés l'un de l'autre par une cloison mince, mais sans aucune fissure. Chacun d'eux peut être mis isolément en communication avec un gazomètre, une machine pneumatique, en un mot, avec les appareils ordinairement employés dans les manipulations des gaz; ils sont, à leurs deux extrémités, fermés par des glaces à faces parallèles et d'épaisseur bien égales. Les rayons qui doivent interférer traversent, l'un le tube de droite, l'autre celui de gauche, et la moindre différence apportée à l'état des fluides intérieurs se traduit par un déplacement de la frange centrale. Pour comparer un gaz à l'air extérieur, il suffit de conserver un des tubes AB ou A'B', mais alors il faut prolonger les glaces qui ferment l'autre, afin que les deux rayons traversent toujours la même épaisseur de verre.

CC′ est le *compensateur interférentiel*. Il est formé de deux lames de glace à faces parallèles, et qui tournent à la façon des feuillets d'un livre autour d'un axe parallèle aux fentes lumineuses, et situé dans le prolongement de la cloison qui sépare les tubes. Le mouvement angulaire de ces lames peut être mesuré sur un cercle gradué dont le centre est sur l'axe O.

Compensateur d'interférences. — Le compensateur a un double usage : il sert à rendre les franges visibles lorsque, par les conditions mêmes de leur production, elles sont rejetées en dehors du champ lumineux où leur observation est possible, et de plus il peut, à l'aide d'une graduation convenable, servir à la mesure de leur déplacement.

On obtient ces différents résultats en inclinant plus ou moins chacune des lames de l'appareil sur le faisceau qui la traverse, et l'efficacité du procédé tient à ce que de faibles variations dans la direction suivant laquelle une lame est traversée par un rayon lumineux amènent des différences très-sensibles dans les retards dus à son interposition.

Soit, en effet (fig. 646), i l'angle d'incidence NAL, r l'angle de

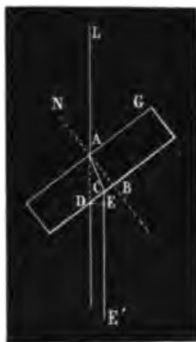


Fig. 646.

réfraction CAB, e l'épaisseur de la lame, D le point où le rayon incident prolongé rencontrerait la deuxième face de la lame, CE′, la direction du rayon émergent, et DE perpendiculaire sur CE.

En parcourant dans l'air la route AD, le rayon exécuterait un nombre de vibrations égal à $\frac{AD}{\lambda}$; en parcourant la ligne brisée ACE, il exécute, dans le verre, un nombre de vibrations égal à

$\frac{AC}{\lambda'}$, et puis dans l'air un autre nombre de vibrations égal à $\frac{CE}{\lambda}$. La différence δ est donc

$$\frac{AC}{\lambda'} + \frac{CE}{\lambda} - \frac{AD}{\lambda} = \delta$$

Or on a

$$AD = \frac{e}{\cos i}; \quad CE = (DB - CB)\sin i; \quad DB = e\,tg\,i; \quad CB = e\,tg\,r;$$

$$AC = \frac{e}{\cos r}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de δ, et remarquant que $\frac{\lambda}{\lambda'}$ est égal à l'indice de réfraction n du verre, on trouve finalement :

$$\delta = \frac{e}{\lambda}(n \cos r - \cos i).$$

La dérivée de l'expression de δ, prise par rapport à i, est :

$$\frac{e}{\lambda}\left(\sin i - n\frac{dr}{di}\sin r\right) = \frac{e}{\lambda}\sin i\left(1 - \frac{dr}{di}\right);$$

$\frac{dr}{di}$ est plus petit que 1 ; la dérivée est donc positive, et δ croît avec i.

Ainsi, en inclinant graduellement une des lames sur la direction des rayons qui la traversent, on produit le même effet que si l'on en faisait croître graduellement l'épaisseur. Par exemple, si l'on donne aux lames du compensateur une épaisseur de $0^m,002$, et qu'on laisse l'une d'elles perpendiculaire à l'un des rayons interférents, tandis que l'on incline l'autre de 0°, 10°, 20°, on produit par le fait de cette inclinaison des retards égaux à 0, 5, 80. On peut donc toujours par ce moyen ramener la frange centrale en une position déterminée du champ de la vision. Malheureusement, en inclinant ainsi la lame, on rejette latéralement le rayon émergent, et ce déplacement amène une complication dans l'usage du compensateur d'Arago.

Recherches de M. Jamin. — Dans une série de recherches dont les résultats ont été imprimés aux *Annales de physique et de chimie* (série III, t. 49 et 52), M. Jamin a employé la méthode interférentielle à la solution des questions suivantes.

1° Mesure des indices de réfraction des gaz;

2° Mesure de l'indice de réfraction de l'eau à différentes pressions;

3° Mesure de l'indice de réfraction de la vapeur d'eau.

Pour pouvoir traiter rigoureusement ces questions délicates, il fallait, d'une part, écarter les rayons interférents beaucoup plus qu'ils ne le sont dans l'appareil d'Arago, et, d'autre part, rendre l'emploi du compensateur indépendant des rejets latéraux que la réfraction fait éprouver aux rayons transmis. Pour arriver à ce double but, M. Jamin a successivement employé deux procédés différents.

Dans le premier de ces procédés, on forme les franges de la manière suivante.

Les rayons lumineux divergents d'une fente verticale très-étroite P vont tomber sur un miroir sphérique MM' de 2 mètres de foyer, et légèrement incliné sur l'axe du faisceau incident. Après la réflexion, ils se réunissent en une ligne verticale P' (fig. 647), image conjuguée de P; en B, dans la partie centrale

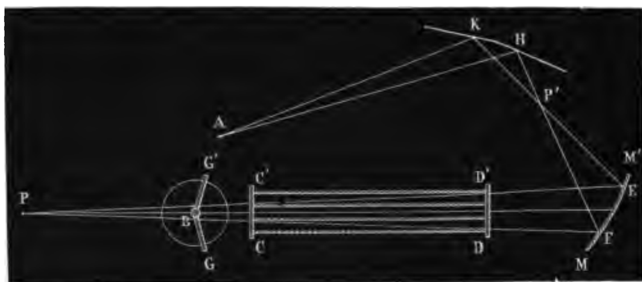


Fig. 647.

du faisceau on met une tige verticale un peu épaisse qui le coupe en deux parties assez éloignées l'une de l'autre, et qui traversent, avant d'arriver au miroir, deux tubes CD et C'D', distants d'environ 1 ou 2 centimètres. Ces deux faisceaux distincts se croisent en P', et chacun d'eux va tomber sur l'un des deux miroirs d'un appareil de Fresnel placé en KH. Les franges s'observent à la loupe en une position A voisine de l'ouverture antérieure des tubes. Le compensateur se place en B. Il diffère de celui d'Arago en ce qu'à l'une des lames qui le composent se trouve substitué un couple de deux autres glaces mobiles à charnière l'une sur l'autre (voir fig. 648). Ces glaces peuvent, à l'aide d'un mouvement très-lent, être rapprochées jusqu'au contact ou écartées éga-

lement et ensemble de cette position première. Leurs épaisseurs sont égales entre elles et à la moitié de l'épaisseur e de la lame unique qu'elles remplacent.

Le système des deux glaces mobiles produit un retard double de celui qui est dû à chacune d'elles, et la simple inspection de la figure montre que le rejet latéral du rayon transmis a disparu.

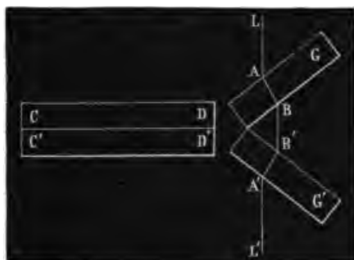


Fig. 648.

Lorsque la frange centrale sort du champ de la vision, on ne peut mesurer son déplacement qu'en tenant compte de la marche qu'il faut donner au compensateur pour la ramener à sa position première. Or, de l'expression de δ trouvée page 347 il résulte que la différence entre le retard produit par le système des lames obliques sous l'incidence i et celui qui est dû à la lame normale est liée à la longueur d'onde λ, au nombre de vibrations N, qui représente le déplacement de la frange centrale, et enfin à l'épaisseur e de la lame double CC'DD', par la relation

$$(a) \qquad en\,(\cos r - 1) - e\,(\cos i - 1) = N\lambda.$$

Et par suite, comme on a toujours $\sin i = n \sin r$, la seule mesure de l'angle i, mesure que donne l'instrument, conduit a la connaissance de N.

Cette formule donne la solution complète du problème dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Supposons en effet que l'on veuille connaître l'indice de réfraction d'un gaz par rapport à l'air. On remplit les deux tubes d'air, et si la frange centrale n'est pas sur le fil du micromètre avec lequel on observe, on l'y amène en inclinant les lames d'un angle $(90 - i)$ sur les rayons incidents. On vide l'un des tubes, on le remplit de gaz, et l'on ramène la frange centrale à sa place en

changeant l'inclinaison $(90 - i)$ en $(90 - i')$. Soient N et N' les déplacements qui, d'après la formule, répondent à i et i', et posons $N' - N = N_1$; soit λ la longueur d'ondulation dans l'air, et L la longueur du tube, $\frac{L}{\lambda} + N_1$ sera le nombre de vibrations de longueur inconnue λ' que la lumière exécute dans ce tube lorsqu'il est plein du gaz que l'on étudie, et l'on aura

$$\left(\frac{L}{\lambda} + N_1\right)\lambda' = L$$

ou

$$\frac{L}{\lambda'} - \frac{L}{\lambda} = N_1$$

ou enfin

$$\frac{L}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - 1\right) = N_1$$

comme nous l'avons déjà établi page 344.

On peut vérifier directement la formule (a), ou encore graduer directement le compensateur de la manière suivante.

Les lames étant à leur zéro, donnons aux densités de l'air dans les deux tubes des valeurs sensiblement égales et telles que la frange centrale soit au milieu du champ de la vision et sous le fil du micromètre. Cela posé, raréfions légèrement l'air du tube qui est en face du système des deux glaces mobiles à charnière et de manière que la frange centrale marche de l'autre côté sans sortir du champ de la vision. Soit N le nombre des franges dont elle s'est déplacée. On la ramène à sa position première en ouvrant le compensateur d'un angle $2i$, puis on la déplace de nouveau, de N' franges, par une nouvelle raréfaction que l'on compense à son tour par un accroissement $2i'$ dans l'ouverture, et ainsi de suite.

Les nombres	N	$N + N'$	$N + N' + N''$
et	i	$i + i'$	$i + i' + i''$

satisfont toujours à l'équation (a), pourvu qu'on y mette à la place de λ la valeur qui répond exactement à la lumière employée.

Nous reviendrons plus loin sur la description du second procédé employé par M. Jamin ; ici nous citerons quelques-uns des résultats qu'il a obtenus.

Dans son premier travail il assigne les valeurs suivantes aux

indices de réfraction des différents gaz pris à zéro et sous la pression $0^m,76$.

Air..................................	1.000294
Oxygène..............................	1.000275
Hydrogène............................	1.000143
Acide carbonique.....................	1.000450
Protoxyde d'azote....................	1.000507

Dans un autre travail, il détermine les variations de réfringence que l'eau éprouve sous des pressions variables, et il trouve que la puissance réfractive de l'eau liquide est proportionnelle à sa densité.

Enfin, dans ses recherches sur la puissance réfractive de la vapeur, M. Jamin détermine l'indice de réfraction de l'air à différents états hygrométriques, soient n, n'..., ces indices; K, K'..., ceux de l'air sec sous les pressions auxquelles il est soumis dans le mélange, et k, k'..., ceux de la vapeur; les puissances réfractives du mélange gazeux soumis à l'expérience sont, d'après la loi de Biot et Arago, égales aux sommes

$$(K^2 - 1) + (k^2 - 1); \quad (K'^2 - 1) + (k'^2 - 1),$$

en d'autres termes, on a

$$(K^2 - 1) + (k^2 - 1) = n^2 - 1; \quad (K'^2 - 1) + (k'^2 - 1) = n'^2 - 1.$$

Or, la pression et par suite la puissance réfractive de l'air sec dans chaque mélange est connue; celle de la vapeur l'est donc également.

Il résulte des nombres fournis par l'expérience que, dans les mêmes conditions de pression et de température, le rapport de la puissance réfractive de l'air sec à celle de la vapeur est $\frac{589}{521}$.

Il résulte également de ces mêmes déterminations que la différence qui existe entre les indices de réfraction de l'air sec et de l'air saturé dans les limites ordinaires de température est trop faible pour pouvoir être mesurée directement.

Nouveau Compensateur d'interférence. — Le principe sur lequel repose la construction des compensateurs que nous venons de décrire est que l'action d'une lame varie avec l'angle sous lequel elle rencontre le rayon dont elle doit modifier la marche. M. Billet vient de réaliser un appareil toujours destiné aux mêmes usages, mais dans lequel les lames restent normales aux rayons

incidents. Seulement l'épaisseur de l'une d'elles peut croître par degrés insensibles entre deux limites différentes de $0^{m},001$.

L'idée première de l'appareil est encore due à Arago. Voici en quoi elle consiste : on taille un prisme de verre rectangle sous un angle extrêmement aigu, de telle sorte, par exemple (voir fig. 649), que, la distance EB étant de 30 centimètres, la différence AB — DE soit seulement de $0^{m},001$, puis on coupe l'extrémité la plus mince DED'E' sur une longueur de 2 centimètres environ, et on l'ap-

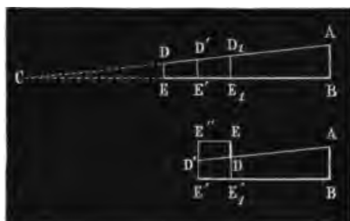


Fig. 649.

plique en la retournant sur la portion principale AD'E'B. On forme ainsi un système $E''EE'E'_1$ à faces parallèles, et dont l'épaisseur est égale à E''D' + D'E'. Si l'on vient à faire avancer le petit prisme, cette épaisseur changera à raison de $\frac{1}{300}$ de millimètre par millimètre de déplacement.

Dans l'appareil de M. Billet, le petit prisme est juxtaposé à une lame de glace à faces parallèles ABCFD' (fig. 650), dont l'épaisseur est égale à l'épaisseur moyenne du système compensateur.

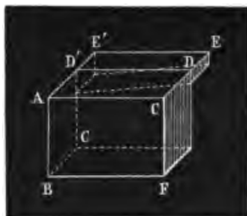


Fig. 650.

Ces deux pièces sont maintenues dans une monture fixe, de manière que leurs faces supérieures soient dans le même plan ; un mouvement très-lent fait mouvoir le grand prisme contre l'autre dans l'espace qui reste vide au-dessous de lui.

Un centième de millimètre vaut environ 20 ondulations dans l'air et 30 dans le verre. La différence est de 10; par suite, puisqu'un millimètre de marche dans l'appareil équivaut à un changement de $\frac{1}{300}$ de millimètre dans la lame compensatrice, il résultera d'un pareil mouvement un déplacement de 3 rangs environ dans la frange centrale.

Projection du déplacement des franges. — Nous avons insisté longuement sur ces phénomènes de déplacement des franges, parce qu'ils ont une extrême importance dans la théorie des ondulations.

On peut les rendre très-aisément visibles dans un cours en produisant les franges à l'aide d'un biprisme et les projetant avec une lentille cylindrique. La figure 651 représente une disposi-

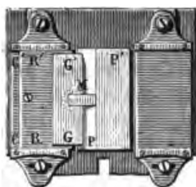


Fig. 651.

tion d'appareil assez commode, PP' biprisme, monté dans une pièce en cuivre; RR', lame de cuivre glissant dans la coulisse CC'; GG', lame de mica collée à la lame de cuivre RR' et glissant exactement contre la surface du prisme; M, lame de mica très-mince portée par GG' et servant au déplacement.

On peut aussi, à l'aide du biprisme et d'une petite auge à double compartiment, projeter le déplacement dû aux variations

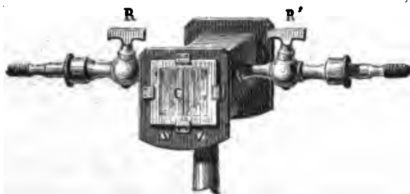


Fig. 652.

de la densité de l'air contenu dans l'un des tubes. L'auge peut n'avoir que $0^m,05$ de long et $0^m,03$ de haut (voir fig. 652); on

l'introduit dans le faisceau lumineux qui contient les franges, en faisant en sorte qu'elle en laisse passer la partie supérieure, et alors, si l'air est à même pression dans les deux tubes, cette portion supérieure correspond bien à celle qui résulte de l'interférence des rayons transmis à travers les auges; mais si l'on vient à faire varier légèrement l'état de l'une de ces petites colonnes gazeuses, les franges correspondantes sont vivement déplacées, tandis que les autres restent fixes.

Toutes ces expériences peuvent se faire en projection à la lumière électrique.

§ 4. — FRANGES DE MM. FISEAU ET FOUCAUT.

Dans toutes les expériences que nous avons précédemment décrites, le nombre des franges que l'on peut compter est toujours peu considérable, même lorsqu'on opère avec de la lumière épurée par la transmission à travers un bon verre rouge. En d'autres termes, dans ces expériences, on ne voit interférer que des rayons dont les retards relatifs ne sont que de quelques vibrations. MM. Foucaut et Fiseau ont trouvé une manière simple de manifester l'action interférentielle de deux rayons en retard l'un sur l'autre de plusieurs centaines de vibrations.

« On forme, avec les deux miroirs de Fresnel, des franges d'interférence d'une certaine largeur, et on les reçoit sur un

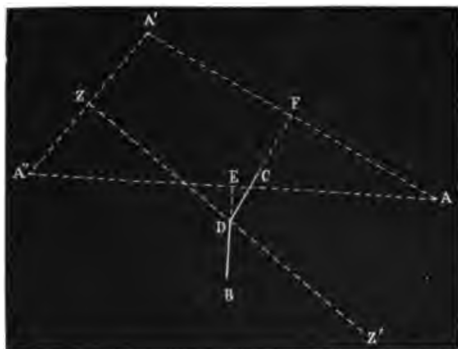


Fig. 653.

écran percé d'une fente très-fine que l'on fait correspondre au milieu même de la frange centrale. On reçoit la lumière qui tra-

verse la fente dans un système réfringent destiné à dilater cette lumière en un spectre très-pur que l'observateur regarde au moyen d'une loupe. La frange centrale pour laquelle la différence de marche des rayons est nulle fournissant alors la lumière, le spectre sera le spectre ordinaire avec ses lignes fixes. Maintenant si, tout restant en cet état, on fait avancer l'un des miroirs parallèlement à lui-même, on déplacera la frange centrale, qui sera remplacée par une autre d'un ordre d'autant plus élevé que le mouvement du miroir aura été plus grand : l'observateur verra alors le spectre se recouvrir de bandes obscures et brillantes qu'il pourra resserrer de plus en plus, en continuant le mouvement du miroir. »

Soient DB et DC (fig. 653) les 2 miroirs, et Z' le milieu de la frange centrale lorsque les arêtes des surfaces réfléchissantes sont confondues. Soient alors A, A', A'', les positions de la source et de ses 2 images, on a $Z'A' = Z'A''$. Si l'on vient à faire avancer DB parallèlement à lui-même, Z'A'' devient moindre que Z'A'; supposons que la différence soit rendue égale à $\frac{1}{2}$ millimètre, ce qui peut se faire sans difficulté. Les quotients de $0^{mm},5$ par les longueurs d'ondes du rouge et du violet extrêmes de Newton sont respectivement 775 et 1107. — Par conséquent, si des rayons en retard l'un sur l'autre d'un millier de vibrations peuvent encore interférer, on peut affirmer qu'au point Z' seront actuellement superposées la frange rouge extrême de rang 775 et la frange violette extrême de rang 1107. La longueur d'onde variant d'une façon continue entre les valeurs qui répondent aux rayons extrêmes du spectre, on est sûr que le quotient $\frac{0^{mm}5}{\lambda}$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 775 et 1107, par suite, au point P, il y aura maintenant superposition de 332 franges brillantes de toutes couleurs, et d'autant de franges noires. — Enfin le prisme sur lequel on recevra toutes ces franges les séparera les unes des autres et les distribuera dans toute l'étendue du spectre qu'il forme. Tels sont en effet les phénomènes que l'on observe, et par conséquent il est démontré que les mouvements des molécules lumineuses persistent sans perturbation pendant un ou plusieurs milliers de vibrations.

CHAPITRE XIV.

ANNEAUX COLORÉS.

§ 1er. — OBSERVATIONS DE NEWTON.

Coloration des lames minces non cristallisées dans la lumière naturelle. — Les corps transparents lorsqu'ils sont réduits en lames très-minces, comme les bulles de savon, les pellicules de verre soufflé, etc., se colorent souvent des teintes les plus vives. Ces effets curieux ont dû être remarqués de tout temps, mais personne avant Newton n'avait cherché comment les teintes varient soit avec l'épaisseur des lames dans lesquelles elles se développent, soit avec l'obliquité de la lumière incidente.

Anneaux colorés vus par réflexion. — Pour régulariser le phénomène et en rendre l'observation plus fructueuse, Newton fut conduit à le produire de la manière suivante : Il appliqua sur un verre plan des objectifs de très-longue distance focale. En ces circonstances, lorsque l'application est aussi parfaite que possible, si l'on regarde par réflexion le système des deux verres superposés, on voit le point de contact sensiblement noir, autour de lui un anneau blanc, puis un anneau plus sombre et fauve, puis encore un anneau blanchâtre à la suite duquel se succèdent une série d'anneaux irisés, qui se fondent bientôt dans un gris uniforme. Dans une lumière homogène, le rouge prismatique, par exemple, le phénomène est beaucoup plus net; la tache centrale est toujours noire, et autour d'elle se développent de nombreux anneaux alternativement brillants et sombres; ils sont d'autant moins larges que la couleur dans laquelle ils se développent est plus réfrangible, et les irisations que l'on obtient dans la lumière ordinaire ne sont que des effets secondaires provenant de la superposition des franges des diverses teintes élémentaires.

Les anneaux sont plus étroits dans l'eau que dans l'air. Il suffit pour s'en convaincre de mouiller un peu les bords des verres : alors en effet « l'eau se glisse insensiblement entre eux; dans l'espace où elle arrive, les anneaux se resserrent et semblent se détacher

des portions qui se produisent encore là où le liquide n'est point parvenu... » (New. Opt. L. 3.)

Dans tous les cas, les anneaux s'élargissent lorsqu'on les observe sous des obliquités de plus en plus grandes.

Anneaux vus par transmission. — Enfin, par transmission on peut encore observer des phénomènes analogues; seulement les anneaux sont beaucoup plus pâles, et de plus ils se présentent sous un aspect pour ainsi dire inverse de celui qu'ils offrent lorsqu'on les voit par réflexion, c'est-à-dire que, lorsqu'on passe d'un système à l'autre, on voit les parties sombres se changer en parties brillantes, et réciproquement.

Mesures des épaisseurs. — Ces faits généraux posés, il faut, pour compléter l'étude du phénomène, déterminer dans chaque cas l'épaisseur de la lame mince qui répond à un anneau d'un ordre déterminé. Or cette détermination ne présente pas de difficulté, si l'on connaît le rayon de courbure de la lentille employée et le diamètre de l'anneau qu'on observe.

Soit en effet (fig. 654) OA $= r$ le rayon de la lentille et d le

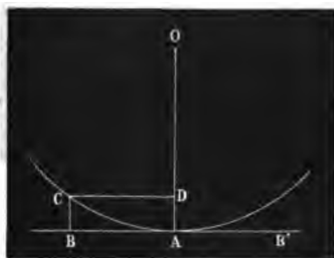


Fig. 654.

rayon BA ou CD de l'anneau; on a, d'après les principes de géométrie,

$$d^2 = \text{AD}\,(2r - \text{AD})$$

d'où l'on déduit

$$\text{AD} = \frac{d^2}{2r - \text{AD}}$$

ou simplement

$$\text{AD} = \frac{d^2}{2r}$$

vu l'extrême petitesse de AD.

Newton mesurait le diamètre d avec un compas, sur la partie supérieure de la lentille, et il prenait soin, comme il le fait remarquer, de placer l'œil dans le plan vertical passant par le centre des anneaux et perpendiculairement au diamètre mesuré. La réfraction que subissaient les rayons émanés de l'anneau lorsqu'ils traversaient la lentille pour arriver à l'œil rendait nécessaire une correction que nous allons indiquer en supposant normale l'incidence des rayons.

Soit (fig. 655) O la position de l'œil sur la verticale passant



Fig. 655.

par le centre O' des anneaux, et soit OA le rayon qui arrive à l'œil en partant de l'extrémité gauche du diamètre AA' d'un anneau vu sur le verre supérieur; ce rayon vient d'un point B situé à une distance BE de la normale AN. Soit e l'épaisseur du verre, laquelle peut être regardée comme constante dans la région où les anneaux se développent. On a $BE = e \tang r$, ou sans erreur sensible

$$BE = e \sin r = \frac{e \sin i}{n}$$

Or, on peut aussi poser

$$\sin i = \frac{AO'}{OO'} = \frac{d}{h}$$

Donc

$$BE = e \frac{d}{nh}$$

Le double de BE, c'est-à-dire $\frac{2ed}{hn}$, représente donc la correction qui doit être apportée au diamètre d, vu directement sur le verre supérieur. Ainsi, d_1 étant le diamètre réel correspondant à d, on a

$$d_1 = d\left(1 + \frac{2e}{nh}\right)$$

Les termes de la série des diamètres d sont donc respectivement proportionnels à ceux de la série des diamètres réels d_1.

Lois des phénomènes. Cas de la réflexion. — A l'aide de mesures faites comme on vient de l'indiquer, Newton a reconnu que les carrés des diamètres des anneaux sombres croissent comme les nombres pairs 0, 2, 4..., et que les carrés des diamètres des anneaux brillants sont entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7.

Or, les épaisseurs de la lame d'air aux points où se développent les divers anneaux sont proportionnelles aux carrés des diamètres de ceux-ci. Donc les épaisseurs successives de la lame mince qui répondent aux divers anneaux sombres sont entre elles comme les nombres pairs, tandis que les épaisseurs relatives aux anneaux brillants sont entre elles comme les nombres impairs.

Ce premier fait établi, Newton fait connaître les épaisseurs des lames d'air qui donnent le premier anneau brillant dans les différentes couleurs prismastiques. Ces épaisseurs sont égales au quart des longueurs d'onde des couleurs correspondantes.

Il établit ensuite que les épaisseurs d'air et d'eau auxquelles se développent les anneaux de même ordre dans l'air et dans l'eau sont entre elles comme les nombres 4 et 3, *dont le rapport est celui des sinus des angles qu'un même rayon passant de l'air dans l'eau fait avec la normale en ces deux milieux;* et puis, quoique sous forme dubitative, il généralise cette loi et l'étend à tous les milieux plus ou moins denses que l'eau.

Enfin il cherche comment l'épaisseur de la lame mince qui répond à un anneau d'ordre déterminé varie avec l'angle que les rayons font avec la normale dans la lame mince, et il résume ses recherches de la manière suivante.

Soit e l'épaisseur de la lame mince qui répond à un anneau d'ordre déterminé vu sous l'incidence normale, e' l'épaisseur qui répond à ce même anneau, lorsque dans la lame mince les rayons forment avec cette même normale un angle égal à i; soit n l'indice de réfraction du verre; soit enfin u un angle défini par la

relation

$$\sin u = \frac{105 + \frac{1}{n}}{106} \sin i$$

on aura

$$\frac{e}{e'} = \frac{1}{\sec u}$$

En valeur numérique, $\sec u$ ne diffère pas sensiblement de $\sec i$ tant que r ne dépasse pas 60°. Pour des valeurs de i supérieures à cette limite, $\sec u$ est moindre que $\sec i$, et la différence devient considérable au-dessus de 80°.

Nous verrons plus loin comment cette dernière loi doit être modifiée.

§ 2. THÉORIE DE YOUNG.

Anneaux réfléchis. — Th. Young a montré que tous les phénomènes précédents s'expliquent dans la théorie des ondulations par la combinaison des mouvements réfléchis aux deux surfaces de la lame mince.

Soit d'abord le cas de l'incidence normale, et soit (fig. 656)

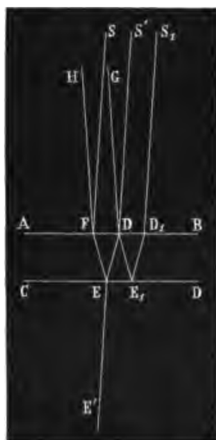


Fig. 656.

ABCD une lame mince dont on pourra considérer les faces comme

parallèles entre elles dans l'étendue très-petite où l'anneau se développe. S'D un rayon incident presque normal. Ce rayon, en passant du verre supérieur dans la lame mince, s'incline, ainsi qu'on le voit sur la figure; il se réfléchit en E sur la surface du verre inférieur, rentre en F dans la lentille supérieure, et s'y propage, suivant FH.

Dans cette même direction FH se propage la portion réfléchie en F du rayon SF qui vient tomber en ce point parallèlement à S'D. Or, quand S'D est presque normal à la surface de la lame mince, les rayons S'D et SF arrivent sur AB dans la même phase de vibration et, par suite, entre les portions de ces rayons qui, après réflexion en E pour l'une et en F pour l'autre, se propagent suivant FH, il n'y a d'autres différences de marche que celles que le premier a éprouvées dans son passage à travers la lame mince.

Ces différences tiennent à deux causes distinctes : l'une consiste en ce que le rayon S'DEF a parcouru dans la lame mince une route égale en longueur à $2e$, e étant l'épaisseur de la lame, et par cela même il a exécuté $\frac{2e}{\lambda}$ vibrations de plus que l'autre; quant à la seconde cause de retard, elle vient de ce que la réflexion au point E se fait au passage de l'air dans le verre, tandis qu'en F elle a lieu au passage du verre dans l'air.

Pour concevoir quelle différence dans le phénomène de la réflexion provient de ces différences de circonstances, on peut se reporter à ce qui a été établi dans la théorie des tuyaux sonores. On y a vu que, quand une onde se mouvant dans l'air se réfléchit contre un fond solide, il y a inversion de sens dans le mouvement des molécules, perte d'une demi-onde ou d'une demi-vibration, tandis que cet effet ne se produit pas dans les tuyaux de flûte, pour les ondes qui reviennent de l'extrémité ouverte de ces tuyaux.

Young a admis qu'un fait analogue doit se produire dans les phénomènes des anneaux colorés. En E la réflexion se fait contre un milieu plus dense que l'air; il y a perte d'une demi-vibration, tandis qu'en F rien de semblable n'a lieu.

D'après cela, la différence de marche des deux rayons qui se propagent suivant FH est $2e + \frac{1}{2}\lambda$, ou en nombre de variations $\frac{2e}{\lambda} + \frac{1}{2}$.

Il en résulte qu'il y aura anneau sombre en tous les points de la lame mince, pour lesquels l'expression précédente sera égale

au produit de $\frac{1}{2}$ par un nombre impair, $2p+1$, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{2e}{\lambda}+\frac{1}{2}=(2p+1)\frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2e}{\lambda}=p$$

ou enfin

$$e=\frac{2p\lambda}{4},$$

p étant un nombre entier quelconque.

Ainsi, il y aura anneau sombre partout où l'épaisseur sera un nombre pair 0, 2, 4, 6... de quarts de longueur d'onde.

Il y aura anneau brillant partout où sera satisfaite l'équation

$$\frac{2e}{\lambda}+\frac{1}{2}=2p\times\frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e}{\lambda}=\frac{2p-1}{4},$$

ou encore

$$e=\frac{\lambda}{4}(2p-1),$$

c'est-à-dire qu'aux points où se développent les anneaux brillants, les épaisseurs croîtront comme les nombres impairs

1, 3, 5, 7...

Enfin les épaisseurs qui répondent au premier anneau brillant et à l'anneau sombre qui le suit sont entre elles comme 1 et 2. Elles sont égales, l'une à $\frac{\lambda}{4}$, l'autre à $\frac{\lambda}{2}$.

Elles sont donc moindres dans le violet que dans le rouge, moindres dans l'eau que dans l'air; et, en général, dans deux milieux différents elles sont inversement proportionnelles aux indices de réfraction de ces milieux.

Anneaux transmis. — Sur ces points il y a donc accord absolu entre les idées de Young et les expériences de Newton. La même théorie rend compte parfaitement du développement des anneaux transmis, des lois suivant lesquelles ils se succèdent, et enfin de leur peu de vivacité. Au point E (fig. 656) il sort de la lame non-seulement la portion transmise du rayon incident S'D, mais aussi une autre portion de lumière provenant d'un rayon S_1D_1 parallèle à S'D, très-voisin de lui, et qui a subi deux

réflexions successives dans la lame mince, l'une en E_1 l'autre en D. Le retard de ce rayon sur S'DEE' est égal à $2e + 2 \times \frac{\lambda}{2}$, puisque chacune des deux réflexions en E_1 et en D produit cette même perte de $\frac{1}{2}\lambda$ que nous avons déjà signalée, et que le retard de $2 \times \frac{1}{2}\lambda$ est comme s'il n'existait pas. Ainsi donc, au même point de la lame mince, les retards qui ont lieu entre les rayons qui forment les anneaux réfléchis surpassent d'une demi-longueur d'onde ceux qui existent entre les rayons dont l'action réciproque donne naissance aux anneaux transmis. Les phénomènes d'interférence qui en résultent sont inverses les uns des autres.

On voit enfin que les anneaux transmis doivent être moins vifs que les autres. En effet, les rayons qui produisent les anneaux réfléchis sont à peu près de même intensité, chacun d'eux ayant subi une réflexion. Il en est tout autrement des rayons qui interfèrent après la transmission : l'un d'eux a subi deux réflexions à la surface du verre, et l'autre aucune. Les anneaux doivent donc être noyés dans une grande quantité de lumière étrangère.

Il est encore un fait extrêmement curieux, et que la théorie précédente avait fait prévoir à Young.

Anneaux à centre blanc. — Les anneaux réfléchis sont à centre noir, parce que les deux systèmes de rayons interférents ont éprouvé, les uns une réflexion au passage d'un milieu plus réfringent dans un autre qui l'est moins, les autres au passage d'un milieu moins réfringent dans un autre qui l'est plus. Si l'indice de réfraction de la lame mince était intermédiaire entre ceux des deux milieux qui la délimitent, les deux réflexions seraient similaires, elles produiraient des retards égaux, et dès lors les anneaux lumineux devraient prendre la place des anneaux sombres : par réflexion, le centre serait blanc.

Tel est en effet le phénomène que l'on observe lorsqu'on développe les anneaux dans une mince couche d'huile de sassafras contenue entre une lentille de crown et un plan de flint.

On varie souvent l'expérience de la manière suivante.

On forme le plan inférieur de deux lames juxtaposées, l'une en crown, l'autre en flint lourd. La lentille supérieure est en crown, et l'on prend pour liquide intérieur de l'huile de girofle, dont l'indice est intermédiaire entre celui des deux verres. On obtient

alors deux demi-systèmes d'anneaux colorés : les uns à centre noir et les autres à centre blanc, ainsi qu'on le voit sur la figure 657.

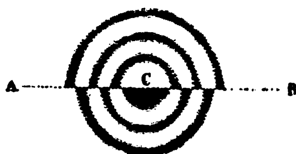


Fig. 657.

Incidences obliques. — Sur un seul point, la théorie adoptée par Young et Fresnel était en désaccord avec les résultats de Newton. La loi suivant laquelle croissent les diamètres des anneaux, lorsqu'on fait augmenter l'incidence des rayons, est, d'après Newton, assez compliquée. La théorie des ondes, au contraire, lui assigne une forme très-simple. Elle indique en effet que ces diamètres doivent être proportionnels aux racines carrées des sécantes des angles que, dans la lame mince, le rayon fait avec la normale. En effet :

Soit (fig. 658) e l'épaisseur de la lame et VEA un rayon qui pénètre

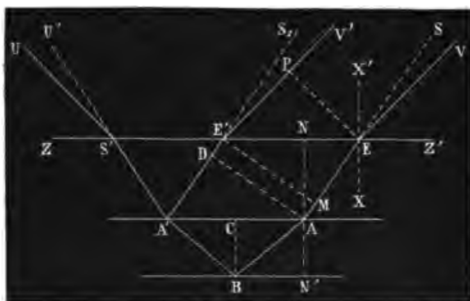


Fig. 658.

dans la lame mince en faisant un angle BAN' = i avec la normale au point d'incidence. Soit r l'angle NAE que, dans le verre, le rayon incident faisait avec la normale, de telle sorte que l'on ait $\sin i = n \sin r$, n étant l'indice de réfraction du verre par rapport à l'air. Le rayon AB se réfléchit en B sur le verre inférieur,

et rentre en A′ dans le verre supérieur; la ligne BA′ étant symétrique de BA par rapport à la normale BC, on a

$$AB = \frac{e}{\cos i},$$

donc

$$AB + A'B = \frac{2e}{\cos i}.$$

Il ne faudrait pas toutefois en conclure que l'expression, en nombre de vibrations, du retard existant entre les deux rayons qui interfèrent suivant A′S′ soit $\frac{2e}{\lambda \cos i} + \frac{1}{2}$.

Ici, en effet, les rayons incidents n'étant plus normaux ou à fort peu près, on ne peut plus regarder comme négligeable la différence des phases que possèdent en A et en A′ les rayons incidents EA et E′A′. AA′ est égal à 2CA ou bien à $2e\,tg\,i$. Et tandis que le rayon incident en A parcourt dans la lame mince le chemin ABA′, celui qui doit interférer avec lui, suivant A′S′, parcourt dans le verre la droite A′D, laquelle est égale à AA′$\sin r$ ou à $2e\,tg\,i \sin r$; et le nombre de vibrations qui, dans le verre, répond à cette distance est $\frac{2e\,tg\,i \sin r}{\lambda'}$.

Or, si le milieu supérieur à la lame mince était indéfiniment prolongé, les rayons AES et A′E′S_1, qui, par hypothèse, émanent d'un même point lumineux très-éloigné, auraient même phase de vibration aux points A et D de la droite AD, menée par le point A perpendiculairement à la direction commune. Donc, enfin, la différence de marche des deux rayons réfléchis, suivant A′S′U′, serait, en nombre de vibrations,

$$\frac{2e}{\lambda \cos i} + \frac{1}{2} - \frac{2e\,tg\,i \sin r}{\lambda'},$$

ou encore

$$\frac{2e}{\cos i}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{n \sin^2 r}{\lambda'}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2e}{\lambda \cos i}(1 - n^2 \sin^2 r) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2e}{\lambda \cos i}(\cos^2 i) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2e \cos i}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

Il est vrai que la lame de verre supérieure n'est pas indéfinie;

mais il n'en résulte aucune modification dans l'expression du retard.

En effet, si le verre supérieur se termine au niveau ZZ', V'E'VE est le faisceau lumineux qui répond dans l'air au faisceau EAE'A' dont nous avons suivi la marche dans le verre. Abaissons du point E' la perpendiculaire E'M sur SA, et de E la perpendiculaire EP sur E'V', on a

$$\frac{E'P}{EM} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Par conséquent, si le mouvement vibratoire dans l'air était concordant tout le long de la ligne EP, il le sera dans le verre tout le long de la ligne EM ; et c'est le point qui nous intéressait dans la proposition précédente.

Maintenant, quelle que soit l'incidence, un anneau de même ordre répond toujours à une même différence de marche; donc, d'après l'expression du retard réciproque des rayons interférents, sous les incidences i_1 et i_2, les épaisseurs e_1 et e_2 qui correspondent à un même anneau sont liées entre elles par la relation

$$e_1 \cos i_1 = e_2 \cos i_2 \quad . \quad \text{ou} \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{\sec i_1}{\sec i_2};$$

et cela quelque grand que soit i_1. Tant que l'angle i ne dépasse pas 60°, cette loi très-simple coïncide, comme nous l'avons déjà fait remarquer, avec la règle suivant laquelle croissent, d'après Newton, les diamètres des anneaux vus sous des incidences de plus en plus grandes. — Au delà de 60° l'accord n'existe plus. Nous avons cherché, M. de La Provostaye et moi, à quoi pouvait tenir cette discordance. Le paragraphe suivant contient le résultat de nos expériences.

Avant d'en commencer l'exposition, nous ajouterons une remarque relative à la manière dont nous avons groupé les rayons interférents dans la théorie que nous venons d'exposer. Nous faisons interférer le rayon qui sort de la lame en A' (fig. 659), et qui provient du rayon incident UE, avec la portion réfléchie au même point A' du rayon incident U'P'A', parallèle à UEA. Souvent on considère l'interférence du rayon émergent en A' avec la portion du rayon UEA, qui s'est réfléchie à l'incidence en A. La raison qui nous a portés à opérer comme nous l'avons fait c'est que la distance E'M n'étant pas nulle, il faut que l'œil intervienne pour faire interférer les rayons E'V et PV'. Notre calcul donne les franges dans l'espace. Au reste, d'une manière comme de l'autre, on arrive à la même expression du retard des rayons interférents.

Dans notre première méthode le retard des deux rayons était :

$AB + BA' + \frac{1}{2}\lambda - IP'$.

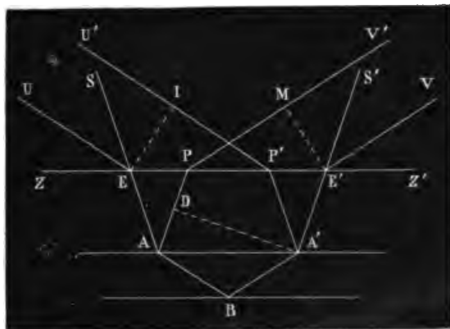


Fig. 659.

Dans l'autre méthode on le trouve égal à $AB + BA' + \frac{1}{2}\lambda - PM$.

Les deux valeurs sont donc identiques, car la symétrie même de la figure montre évidemment l'égalité des lignes MP et P'I.

§ 3. — ÉTUDE DE LA LOI SUIVANT LAQUELLE CROISSENT AVEC L'INCIDENCE LES DIAMÈTRES DES ANNEAUX COLORÉS.

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains. — Pour arriver à résoudre la difficulté que nous avons signalée à la fin du paragraphe précédent, il fallait trouver un procédé qui permît et d'apprécier sûrement l'inclinaison sous laquelle les rayons traversaient la lame mince, et de mesurer rigoureusement les diamètres des anneaux sous toutes les incidences possibles. — Voici comment nous avons opéré :

Les anneaux étaient formés entre une lame de verre plan P (fig. 660) et une lentille L plan convexe. Ce système était ajusté sur une plaque de cuivre bien dressée CC', que la vis V d'une machine à diviser pouvait faire mouvoir horizontalement. A quelque distance on avait disposé sur un support fixe S un théodolite dont le cercle vertical AB était perpendiculaire à la direction de la vis. La lunette L'L'' étant inclinée de manière que le fil horizontal de son réticule passât par le centre des anneaux, il suffisait de faire tourner la vis de la machine pour que ceux-ci vinssent successi-

vement toucher le second fil au point où ils étaient coupés par le premier, et il est bien évident qu'il suffisait de noter exactement la position de la tête de la vis chaque fois qu'un de ces contacts avait lieu pour avoir, par de simples soustractions, les diamètres

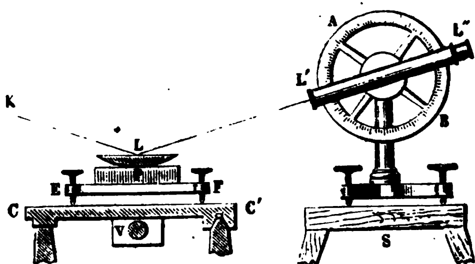


Fig. 660.

intérieurs ou extérieurs correspondants à l'inclinaison connue de la lunette. D'après les lois de la réfraction, il n'y avait aucune correction à faire aux diamètres ainsi observés. Nous nous en sommes du reste assurés directement. (V. Ann., série 3, XXVII.)

Quant à l'inclinaison des rayons dans la lame mince, il suffisait pour la mesurer de faire en sorte qu'elle fût rigoureusement égale à l'angle compris entre la verticale et l'axe de la lunette du théodolite, et c'est à quoi l'on arrivait en rendant bien horizontales les surfaces des verres entre lesquels se produisaient les anneaux.

Enfin, nous nous sommes presque toujours servis de la lumière très-homogène que fournit une lampe à double courant ordinaire, alimentée par de l'alcool salé. On supprimait la cheminée de verre, et au lieu de faire tomber directement les rayons sur les lentilles, on trouvait ordinairement préférable de les transmettre à travers une feuille de papier huilé. On obtenait ainsi une lumière douce, uniforme, et si pure que l'on voyait toujours les anneaux couvrir la lentille tout entière ; avec nos appareils il était facile d'en compter 150 : on en aurait eu davantage si les verres eussent été plus grands.

En opérant ainsi, nous avons pu mesurer les diamètres des anneaux sous toutes les inclinaisons comprises entre 7° et 86°. Nos mesures se sont souvent étendues jusqu'au 30e anneau.

Dans tous les cas, nous avons trouvé : premièrement, que toujours les carrés des diamètres croissent comme les nombres 0, 2, 4, 6.. ou 1, 3, 5, 7..., ainsi que Newton l'avait établi ;

Deuxièmement, que les épaisseurs auxquelles se développe un anneau de même ordre sous toutes les inclinaisons possibles sont, comme la théorie des ondes l'indique, exactement proportionnelles aux sécantes de ces inclinaisons. A l'appui de ces assertions nous citerons deux séries de résultats obtenus avec une lentille de $13^{m},29$ de rayon.

Les incidences étaient, dans le premier cas, 7° 55′; dans l'autre, 85° 21′. — En régard des résultats donnés par l'expérience nous avons inscrit ceux que donne, premièrement, la loi de la sécante; deuxièmement, la formule de Newton.

TABLEAU 1.

INCLINAISON 7° 55′.

ORDRE DE L'ANNEAU.	DIAMÈTRE observé.	calculé par la loi de la sécante.	calculé par la formule de Newton.
3e anneau.............	7.98	7.854	Mêmes résultats que ceux de la colonne précédente.
4e —	9.715	9.619	
5e —	11.11	11.11	
6e —	12.51	12.42	
7e —	13.69	13.60	
8e —	14.75	14.69	
9e —	15.79	15.71	
10e —	16.69	16.66	

TABLEAU 2.

INCLINAISON 85° 21′.

ORDRE DE L'ANNEAU.	DIAMÈTRE observé.	calculé par la loi de la sécante.	calculé par la formule de Newton.
2e anneau...........	19.82	19.41	16.37
3e —	27.415	27.45	23.16
4e —	33.79	33.625	28.36
5e —	38.74	38.82	32.75
6e —	43.53	43.40	36.61
7e —	47.53	47.55	40.11

Expériences de projection. — La projection des anneaux colorés se fait sans difficulté, et elle constitue une des plus belles expériences de cours. — On peut très-bien opérer à la lampe électrique.

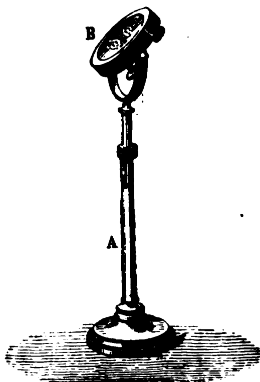


Fig. 661.

Dans ces projections, le système de verres entre lesquels les anneaux se développent doit être vertical; il est alors maintenu à l'aide d'un anneau de cuivre et de vis de pression dans une monture métallique (voir fig. 661). Lorsqu'il s'agit de former les anneaux à centre blanc, la lentille supérieure est le plus souvent remplacée par un prisme lenticulaire (voir fig. 662).



Fig. 662.

Pour fixer les idées sur la manière d'opérer, supposons qu'il s'agisse de projeter les anneaux sous une incidence oblique; on pourra adopter la disposition suivante :

On reçoit le faisceau lumineux SS′ (fig. 663) venu de la lampe ou du soleil sur une lentille éclairante L.



Fig. 663.

On place le système qui produit les anneaux un peu après le point C autour duquel s'entre-croisent les rayons, et avec une lentille de convergence on forme l'image de AB sur l'écran EE′ où l'on doit observer le phénomène. Les anneaux seront très agrandis si la distance de EE′ à la lentille L′ est beaucoup plus grande que LO.

Lorsqu'on veut former les anneaux dans la lumière prismatique, on introduit le faisceau éclairant par une large fente rectiligne, et l'on met le système des verres à l'endroit où la lentille L forme l'image nette et un peu agrandie de cette fente. — Le prisme doit se mettre au point de croisement des rayons. — En le faisant tourner doucement, on produit les anneaux successivement dans toutes les couleurs homogènes.

Ils se projettent toujours sur l'écran EE′, mais « visiblement plus grands dans le rouge que dans le bleu ou le violet, et il y a du plaisir à les voir se dilater ou se contracter par degrés, suivant que la nature de la couleur vient à changer. » (Newton, *Opt.*, liv. II, obs. XIII.)

§ 4. — ANNEAUX DES PLAQUES ÉPAISSES.

Anneaux de Newton. — Newton a découvert et étudié avec soin une autre espèce d'anneaux colorés dont le développement s'explique en partant des principes que nous venons d'exposer dans ce chapitre et dans celui qui le précède.

Un rayon solaire assez étroit était transmis dans une chambre noire. Newton le fit passer à travers une ouverture d'environ 1 centimètre percée dans un carton blanc; puis il le reçut sur un miroir concave de verre étamé ayant 2 mètres de rayon, en prenant soin que l'ouverture fût à peu près au centre de ce miroir, de sorte que le faisceau régulièrement réfléchi revenait tomber sur elle.

En ces circonstances, il vit l'ouverture entourée d'une série d'anneaux; ils étaient alternativement brillants et sombres dans la lumière homogène, irisés dans la lumière blanche. Les carrés des diamètres des anneaux brillants croissaient comme les nombres pairs; ceux des anneaux obscurs suivaient la série des nombres impairs : ils étaient en raison inverse de l'épaisseur du miroir et proportionnels aux carrés du rayon de la sphère dont le miroir faisait partie.

Le phénomène prend beaucoup d'éclat quand on ternit avec le souffle la face antérieure vitrée du miroir; il disparaît sensiblement lorsqu'on enlève l'étamage, et cette double observation prouve que les rayons, à l'action réciproque desquels il est dû, ont été diffusés à la première surface et régulièrement réfléchis sur la seconde. Nous allons indiquer comment ils se groupent et se combinent pour former les anneaux successifs : nous supposerons le miroir plan au lieu d'être sphérique : cette restriction n'empêche pas le développement du phénomène.

Explication des anneaux des plaques épaisses. — Soit LA un des rayons qui viennent tomber sur la glace GG' (fig. 664) : on peut supposer l'incidence normale pour se mettre dans le cas spécifié par Newton. Au point A le rayon suit en grande partie sa route en ligne droite, suivant AE; toutefois une portion pénètre dans la glace en se diffusant. Soit AB un des rayons élémentaires qui en dérive ainsi par diffusion. AB se réfléchit régulièrement en B et émerge en C, suivant CF; il n'est aucune autre portion de la lumière propagée originairement, suivant LA, qui suive cette direction CF, après réflexion sur GG'. — La

partie du rayon LAE, qui se réfléchit régulièrement en E, revient en A, et là donne aussi quelque peu de lumière émergente à la diffusion. Un de ces nouveaux rayons diffusés, et un seul, rencontre en F le rayon CF, qui comme lui a été réfléchi, diffusé, et

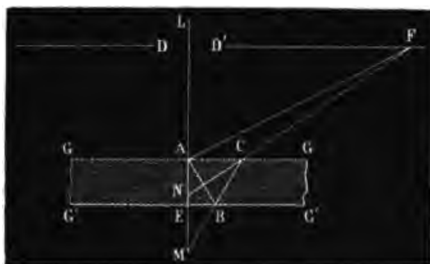


Fig. 664.

a traversé deux fois le miroir. D'après la similitude complète de ces conditions, la différence de marche qui existe en F entre ces deux rayons dépend de la direction de AB, et par suite, avec cette direction changera l'ordre de l'interférence qui aura lieu en F.

Le calcul des différences de marche des deux rayons interférents se développe de la manière suivante :

A partir du point A l'un des rayons, le deuxième, parcourt deux fois l'épaisseur e du miroir, et en outre la ligne AF, l'autre deux fois AB, et en outre la ligne CF. Ainsi la différence de longueur du chemin parcouru est

$$2e + AF - 2AB - CF;$$

transformée en nombre de vibrations, cette différence devient

$$\frac{2e}{\lambda'} + \frac{AF - CF}{\lambda} - \frac{2AB}{\lambda'},$$

λ' et λ étant les longueurs d'ondulation dans le verre et dans l'air. Ces quantités sont liées entre elles par la relation

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = n,$$

n étant l'indice de réfraction du verre par rapport à l'air.

Si le point F appartient à l'anneau brillant de rang p, on aura donc

$$(1) \qquad \frac{2e}{\lambda'} + \frac{AF - CF}{\lambda} - \frac{2AB}{\lambda'} = p.$$

Or, si nous désignons par i l'angle que le rayon CF fait avec la normale à la lame en C, et par r l'angle de réfraction correspondant, lequel est égal à EAB, on a

$$AB = \frac{e}{\cos r}, \qquad AC = 2e \operatorname{tang} r,$$

et enfin la différence $AF - CF = 2e \operatorname{tg} r \sin i$, car $AF - CF$ ne diffère pas de la projection de AC sur AF, AC étant toujours extrêmement petit par rapport à la distance de la surface GG′ à l'écran DD′.

D'après cela, si F appartient à l'anneau brillant de rang p, on aura

$$\frac{2e}{\lambda'} - \frac{2e}{\lambda' \cos r} + \frac{2e \operatorname{tg} r \sin i}{\lambda} = p,$$

ou

$$2en - \frac{2en}{\cos r}(1 - \sin^2 r) = p\lambda,$$

ou

$$2en(1 - \cos r) = p\lambda.$$

On en déduit successivement, en élevant au carré et réduisant :

$$1 - \frac{p\lambda}{2en} = \cos r, \qquad \frac{2p\lambda}{2en} - \frac{p^2\lambda^2}{4e^2n^2} = \frac{\sin^2 i}{n^2},$$

$$\sin^2 i = \frac{p\lambda}{e}\left(n - \frac{p\lambda}{4e}\right).$$

$\frac{p\lambda}{4e}$ est tout à fait négligeable par rapport à n, et si l'on représente le diamètre de l'anneau par y et la distance du verre à l'écran par d, on peut poser sans erreur sensible

$$\sin^2 i = \frac{y^2}{d^2},$$

donc enfin

$$y^2 = d^2 \frac{pn\lambda}{e},$$

ou enfin

$$y = d\sqrt{\frac{2pn}{e} \cdot \frac{\lambda}{2}}.$$

Cette équation fait connaître les lois des anneaux des plaques épaisses. Les diamètres de ces anneaux sont en raison inverse de la racine carrée de l'épaisseur e de la lame, proportionnels à la distance d, proportionnels à la racine carrée de l'indice de cette lame et à celle de la longueur d'onde de la lumière employée. Enfin leurs carrés varient comme les nombres pairs pour les anneaux brillants, et comme les nombres impairs dans le cas des anneaux obscurs.

Des anneaux du même genre ont été successivement observés et étudiés par le duc de Chaulnes, par M. Pouillet, par M. Babinet. — Nous renvoyons sur ces points aux mémoires originaux, et nous terminerons en décrivant d'autres franges d'interférence et en particulier celles que M. Jamin a souvent employées dans les recherches dont nous avons indiqué les résultats (page 350).

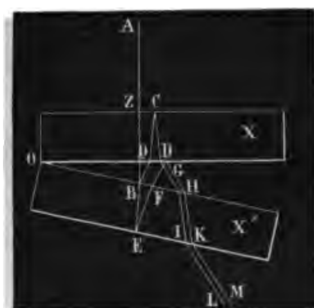


Fig. 665.

Franges de M. Brewster. — Lorsque deux lames de glaces à faces parallèles (fig. 665) sont légèrement inclinées l'une sur l'autre de manière à comprendre entre elles une couche d'air ayant la forme d'un coin très-aigu, si l'on fait tomber sur l'une un faisceau de rayons à peu près normaux, il suffit de placer l'œil derrière la seconde, à une certaine distance, et en dehors du faisceau incident, pour voir apparaître un système de franges parallèles à l'arête de contact des lames. Le fait a été observé par M. Brewster. Voici comment on l'explique.

Soit AZ un des rayons incidents, B le point où il vient, sans s'être encore dévié, rencontrer la deuxième glace X'; une portion de ce rayon pénètre dans la deuxième glace, se réfléchit en

E, émerge en F, se réfléchit en G sur la surface inférieure de X, rentre dans X' au point H, et émerge en K suivant KM ; une autre portion du rayon incident AB se réfléchit en B, rentre dans la lame supérieure, se réfléchit en C, passe au point D, et après avoir traversé X', vient émerger suivant IL en un point I voisin de K. Ces deux rayons, à l'émergence, ont à peu près même intensité ; ils ont entre eux une différence de marche qui dépend de l'angle des plaques et de leur épaisseur ; enfin si AZ s'incline sur la première lame, la différence de marche de IL et KM change avec l'angle AZC. IL et KM, étant parallèles et très-voisins, interfèrent dans l'œil, et de là les franges. Il serait tout aussi facile de les expliquer en suivant les interférences dans l'espace, comme à la page 365.

Franges de M. Jamin. — Supposons maintenant que les glaces X et X', au lieu de se toucher en O, soient à une certaine

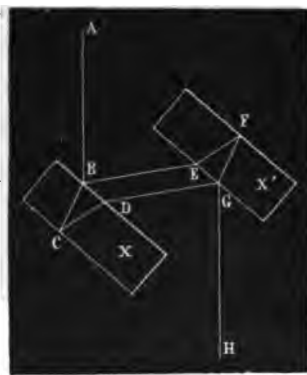


Fig. 666.

distance l'une de l'autre ; supposons qu'elles soient de même épaisseur, qu'elles soient parallèles entre elles, et faisons tomber sur X (fig. 666) un faisceau de rayons parallèles entre eux. Enfin, soit pris le plan d'incidence pour celui de la figure. Le rayon incident AB se partage au point B en deux autres rayons qui suivent l'un la route BEFG, l'autre la route BCDG. Ces deux routes sont parfaitement égales ; les deux rayons qui se réunissent en G pour se propager ensemble suivant GH ont même intensité, et à partir du moment où ils se sont séparés en B

jusqu'à celui où ils se rejoignent, ils ont éprouvé les mêmes retards et accompli les mêmes nombres de vibrations.

La distance qui sépare les portions BE et DG de ces rayons varie avec l'épaisseur des plaques, avec l'angle d'incidence du rayon AB, et la seule inspection de la figure montre qu'elle peut être considérable. On peut dès lors très-aisément placer entre X et X′ un compensateur d'interférence dont les glaces, toutes deux perpendiculaires au plan de la figure, reçoivent exclusivement l'une le rayon BE, l'autre le rayon DG. Si ces glaces sont inégalement inclinées sur les deux rayons, elles établiront entre eux des différences de marche qui pourront amener la destruction réciproque complète des deux mouvements antérieurement propagés suivant GH. Si le rayon AB est un rayon de lumière blanche, l'interférence dont nous parlons n'aura pas lieu à la fois pour tous les rayons élémentaires de longueurs d'ondes différentes qui se propagent ensemble suivant AB. Alors, dans la direction de GH, on recevra une teinte colorée et qui paraîtra s'étendre uniformément dans toute la portion illuminée de la glace X′.

Si, au lieu d'un seul faisceau incident AB, on en conçoit plusieurs, tous parallèles au plan de la figure, mais inégalement inclinés sur la face d'incidence BD, les différences de marche qui se développeront entre les deux parties de chacun de ces faisceaux varieront de l'un à l'autre. En regardant dans la direction HG, on verra donc des franges. Ces franges pourront être déplacées par le mouvement du compensateur, et comme les rayons qui concourent à former chacune d'elles sont très-séparés dans le trajet qu'ils accomplissent entre les deux glaces X, X′, on pourra, sur le trajet de l'un d'eux, placer tout système retardateur dont on voudra étudier l'influence. On conçoit tout l'avantage que M. Jamin a pu tirer de l'emploi de ces franges dans la série de recherches dont les résultats ont été indiqués pages 350 et 351.

CHAPITRE XV.

DIFFRACTION.

§ 1. PRINCIPE DE HUYGHENS. COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES.

« Lorsque de la lumière rayonne d'un point A, chaque particule de la matière dans laquelle une onde s'étend donne son mouvement à toutes les autres qui la touchent; de sorte qu'il faut qu'autour de chaque particule il se fasse une onde dont cette particule soit le centre. Ainsi, si DCF (fig. 667) est une onde

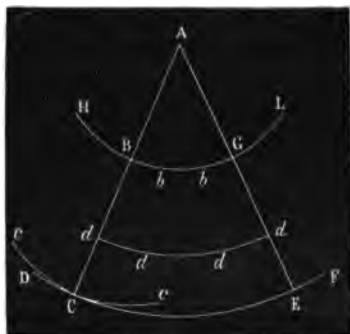


Fig. 667.

émanée du point lumineux A qui est son centre, la particule B, une de celles qui sont comprises dans la sphère DCF, aura fait son onde partielle *c*C*c*, qui touchera l'onde DCF en C, au même moment que l'onde principale, émanée du point A, est parvenue en DCF; de même pour les autres particules comprises dans la sphère, telles que *d.*, *d,... b, b,...* » (Huyg., *Traité de la lumière*).

Ce principe est l'expression même du fait de la propagation

du mouvement vibratoire. On peut le présenter sous une autre forme.

Soit, dans un milieu homogène, une source lumineuse A (fig. 668) et un point P situé à une distance de A qui soit très-

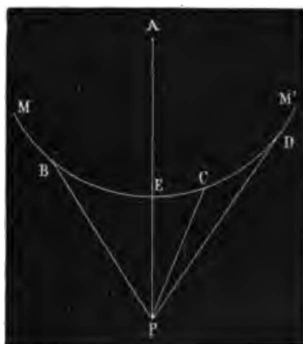


Fig. 668.

grande par rapport à la longueur de l'ondulation; soit de plus une surface sphérique MEM' dont le rayon AE soit moindre que PA et tel que AE et EP soient aussi très-grands par rapport à λ.

A une époque quelconque T, le point P reçoit, suivant toutes les droites PB, PE,..., des mouvements qui lui viennent des centres d'ébranlements secondaires B, E,... et son mouvement réel est la résultante de tous ces mouvements partiels.

On peut regarder comme évident que les mouvements dont il s'agit sont tous des vibrations de même durée que celles de la source; mais il est clair aussi que ces vibrations ont entre elles toutes les différences de phase possibles.

En effet, soit v la vitesse de propagation de la lumière, les vibrations transmises suivant deux directions différentes PC et PD ont employé des temps $\frac{PC}{v}$ et $\frac{PD}{v}$ pour venir de la surface sphérique MM'E au point P où elles doivent se combiner. Elles existaient donc, en C et en D, aux époques respectives $T - \frac{CP}{v}$ et $T - \frac{PD}{v}$. Or, à cause de l'homogénéité du milieu, on doit admettre qu'au même instant toutes les vibrations qui existent en

même temps sur la surface MEM' ont même phase; donc celles qui y existent à des époques distantes de $\frac{PD - CP}{v}$ ont une différence de phase égale à $2\pi \frac{PD - PC}{\lambda}$.

Ainsi les différentes vibrations qui, à l'époque T, viennent se combiner en P ont entre elles toutes les différences de phase possibles entre o et $2\pi \frac{PM - PE}{\lambda}$.

Dans le cas où un obstacle gênerait dans quelques directions la propagation de la lumière venue de A, le principe précédent s'appliquerait encore à l'estimation de l'éclairement du point P. Par exemple, supposons qu'en ZZ' (fig. 669) soit placé un écran opaque présentant seulement une ouverture CD; le mouvement en P sera la résultante de ceux que la portion d'onde MD' pourra lui envoyer à travers CD, et ainsi de suite.

Ou encore, si, dans la lumière qui diverge de A (fig. 670), on place une tige opaque ZZ' pour connaître ce qui arrivera de lumière en un point P situé sur le prolongement d'une droite menée de A à un point quelconque de ZZ', il faudra calculer la résultante des mouvements qui peuvent être envoyés en ce poin par le reste de l'onde MM'...

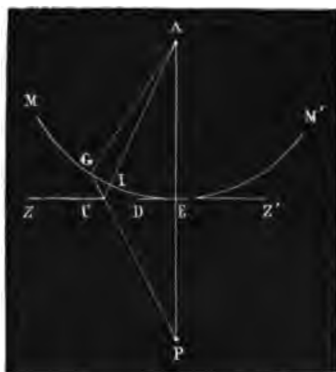


Fig. 669.

Nous ajouterons une remarque qui nous sera utile (aux pages suivantes) dans le calcul d'un phénomène de diffraction.

Tant que les angles CPA, CAP (fig. 669) sont très-petits, il en est de même de l'angle GCI; par suite la différence des lignes CG et CI est négligeable par rapport à CG, et à plus forte raison par rapport à la hauteur totale de la zone GE. Dans ce cas la différence de marche qui existe entre les rayons qui arrivent en P

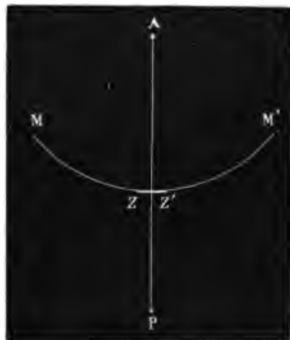


Fig. 670.

en suivant les routes ACP et AEP est égale à AC + CP — AP. Or, l'extrême petitesse des angles CPA, CAP est une condition physique toujours satisfaite dans les phénomènes que nous étudions ici.

Ces simples indications montrent que le principe de Huyghens peut conduire à l'explication des effets de diffraction cités au commencement du chapitre XIII; mais elles montrent aussi que, pour pouvoir aborder cette question, il faut s'appuyer sur les règles de la combinaison des mouvements vibratoires.

Composition des mouvements vibratoires. — Le problème de la composition des mouvements vibratoires a été traité par Fresnel dans son mémoire sur la diffraction, et nous avons déjà fait connaître les principaux résultats auxquels il était arrivé sur ce point.

C'est, en effet, en les appliquant au calcul de la combinaison des mouvements sonores que nous avons, en acoustique (t. II, p. 61), traité la question de la vibration de l'air dans les tuyaux.

Nous nous contentons de rappeler ce qui a été démontré alors.

Soit une série de mouvements vibratoires, parallèles entre eux

et dont les vitesses soient respectivement définies par les équations

$$v = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{\lambda}\right);$$

$$v' = a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right);$$

$$v'' = a'' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi''}{\lambda}\right)\ldots$$

Leur résultante sera un mouvement vibratoire de même période τ, et la vitesse V de ce mouvement sera donnée par la relation

$$V = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\lambda} - \frac{\Phi}{\lambda}\right),$$

dans laquelle A et Φ auront respectivement les valeurs assignées par les équations suivantes :

$$A^2 = \left[\Sigma\left(a \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right)\right]^2 + \left[\Sigma\left(a \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right)\right]^2;$$

$$tg\, 2\pi \frac{\Phi}{\lambda} = \frac{\Sigma\left(a \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right)}{\Sigma\left(a \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right)}.$$

Pour un quelconque des mouvements élémentaires, le premier par exemple, le produit $\frac{\varphi}{\lambda} \cdot \tau$ désigne le temps qui sépare le commencement de sa vibration du commencement de la vibration d'un mouvement de même période et dont l'équation serait

$$v_1' = a'_2 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

L'angle $2\pi \frac{\varphi}{\lambda}$ est la phase de vibration de ce mouvement, et a^2 son intensité.

Si l'on combine en particulier les deux mouvements élémentaires

$$v = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \qquad v' = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{4}\right),$$

dont les phases diffèrent de 90°, l'intensité A_1^2 de la résultante sera égale à $a_1^2 + a_2^2$, et la phase à $2\pi \frac{a_2}{a_1}$, d'où il résulte que,

si l'on veut décomposer un mouvement vibratoire donné par la relation

$$v = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{\lambda}\right)$$

en deux autres ayant pour phases *o* et $\frac{\pi}{2}$, les intensités respectives a_1^2 et a_2^2 de ces composantes seront données par les relations

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$tg\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{a_2}{a_1}.$$

On en déduit

$$a^2 = a_1^2\left(1 + tg^2\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\right)$$

$$a^2 = a_1^2\, \frac{\left(\cos^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} + \sin^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\right)}{\cos^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}},$$

ou

$$a^2 = \frac{a_1^2}{\cos^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}}, \qquad \text{et enfin} \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^2 = a^2\cos^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}, \\ a_2^2 = a^2\sin^2 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}. \end{array}\right.$$

En sorte que les équations de ces mouvements seront :

$$v_1 = a\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\sin 2\pi\frac{t}{\tau},$$

$$v_2 = a\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{4}\right),$$

ou enfin

$$v_1 = a\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\sin 2\pi\frac{t}{\tau}$$

et

$$v_2 = a\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{\tau}$$

§ 2. EXPLICATION DES PHÉNOMÈNES DE DIFFRACTION.

Méthode analytique. — Pour montrer comment ces considérations générales peuvent conduire à la solution des problèmes de diffraction, nous choisirons un exemple dans lequel les calculs s'achèvent sans difficulté.

Lorsqu'on fait tomber un cône de lumière homogène émané

d'un point L (fig. 671) sur un écran percé d'un trou rond BC et que l'on reçoit les rayons transmis sur un écran blanc EE', on voit que le centre *o* de la tache lumineuse est tantôt brillant et tantôt obscur, suivant la valeur du rayon de l'ouverture.



Fig. 671.

Si la lumière émise par la source L est tantôt rouge, tantôt jaune, tantôt bleue, les diamètres pour lesquels la tache centrale aura son éclat maximum varieront avec la couleur de la lumière incidente. Aussi, lorsqu'on opère avec de la lumière blanche, on voit en cette tache centrale se développer des teintes dont les nuances dépendent des dimensions du trou.

Pour se rendre compte de tous ces phénomènes, il faut chercher comment varie, avec le diamètre de l'ouverture BC, l'intensité de la résultante des mouvements envoyés en O par tous les points de l'ouverture. Nous supposerons qu'en tous ces points les vibrations s'effectuent suivant des directions parallèles entre elles.

Soit $2R$ le diamètre BC (fig. 672), et concevons le cercle d'ouverture divisé en couronnes annulaires de même largeur infiniment petites ds. Soit s le rayon d'une de ces couronnes, sa surface sera $2\pi s\,ds$, et l'on pourra admettre que le nombre des vibrations qu'elle envoie en O est proportionnel à sa surface; ces vibrations ont toutes même phase; par conséquent, d'après les formules de la page 382, le coefficient de vibration du mouvement dû à cette couronne sera proportionnel à $2\pi s\,ds$.

Au point de vue de la phase, ce mouvement ne concordera pas avec celui qui arrive au même instant en O suivant la



Fig. 672.

direction LZO. Le retard sera SO — ZO + LS — ZL, et la différence de phase sera $2\pi\frac{\text{SO} - \text{ZO} + \text{LS} - \text{ZL}}{\lambda}$, moins un certain nombre de circonférences entières qui pourra être nul, mais dont on n'a jamais à tenir compte.

Posons

$$\text{LZ} = d; \qquad \text{ZO} = d';$$

on a

$$\overline{\text{OS}}^2 = s^2 + d'^2; \qquad \text{OS} - d' = \frac{s^2}{\text{OS} + d'},$$

ou, en ne négligeant au dénominateur que des quantités très-petites par rapport à s,

$$\text{OS} - d' = \frac{s^2}{2d'}; \text{ de même } \text{LS} - \text{LZ} = \frac{s^2}{2d}.$$

et la différence de phase est

$$2\pi\left(\frac{s^2}{2d\lambda} + \frac{s^2}{2d'\lambda}\right) = \pi\frac{d + d'}{dd'\lambda}s^2.$$

Ainsi donc, si nous prenons l'origine du temps au commencement d'une des vibrations transmises directement suivant LO, l'équation du mouvement envoyé en O par l'anneau $2\pi s\,ds$ sera

$$V = k2\pi s\,ds\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{s^2}{2d\lambda} - \frac{s^2}{2d'\lambda}\right),$$

k étant un nombre indépendant de l'angle SOL.

D'après cela, l'intensité I^2 des mouvements en O sera donnée par l'équation

$$I^2 = \left\{\Sigma\left[k2\pi s\,ds\cos 2\pi\left(\frac{s^2}{2d\lambda} + \frac{s^2}{2d'\lambda}\right)\right]\right\}^2 + \left\{\Sigma\left[k2\pi s\,ds\sin 2\pi\left(\frac{s^2}{2d\lambda} + \frac{s^2}{2d'\lambda}\right)\right]\right\}^2;$$

$$I^2 = \left[\Sigma\left(k2\pi s\,ds\cos\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}s^2\right)\right]^2 + \left[\Sigma\left(k2\pi s\,ds\sin\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}s^2\right)\right]^2.$$

Ici la valeur de I^2 peut se calculer complétement; en effet, la quantité $k2\pi s\,ds\cos\pi\dfrac{d'+d}{dd'\lambda}s^2$ est la différentielle exacte de la fonction

$$k\frac{dd'\lambda}{d+d'}\sin\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}s^2,$$

et la somme des valeurs que prend cette différentielle entre deux limites données r et r' de s n'est que la différence des valeurs que possède la fonction à ces deux limites.

De même, et pour ces limites r et r', la quantité soumise au signe Σ dans le second terme de I^2 est la différence des valeurs que prend, entre les limites données, la fonction

$$-k\frac{dd'\lambda}{d+d'}\cos\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}s^2,$$

dont la différentielle est précisément la quantité soumise au signe Σ.

Supposons que l'ouverture soit telle que la différence de marche $\dfrac{d+d'}{2dd'}s^2$ soit égale à $2n\dfrac{\lambda}{2}$; alors les valeurs limites de s^2 sont données par les équations

$$s^2 = 0; \qquad \frac{d+d'}{2dd'}s^2 = \frac{2n\lambda}{2};$$

$$s^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{2ndd'\lambda}{d+d'}.$$

Pour ces deux valeurs de s^2, l'expression

$$k\frac{dd'\lambda}{d+d'}\sin\pi\frac{d+d'}{dd'\lambda}s^2$$

devient identiquement nulle, et les deux valeurs de

$$k\frac{dd'\lambda}{d+d'}\cos\pi\frac{d+d'}{dd'\lambda}s^2$$

sont égales : leur différence est donc nulle; ainsi pour ces valeurs du rayon de l'ouverture il n'y a pas de lumière en O.

Si, au contraire, on avait

$$\frac{d+d'}{2dd'}s^2 = \frac{(2n+1)\lambda}{2},$$

on aurait

$$I^2 = \left(2k\frac{dd'\lambda}{d+d'}\right)^2 = 4k^2\frac{d^2d'^2\lambda^2}{(d+d')^2}.$$

Cette valeur est la plus grande de toutes celles que I puisse recevoir au point O. En effet, dès que l'une des valeurs limites de s est r et l'autre 0, on a

$$I^2 = k^2\frac{d^2d'^2\lambda^2}{(d+d')^2}\left[\sin^2\left(\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}r^2\right) + \cos^2\left(\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}r^2\right) - 2\cos\left(\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}r^2\right) + 1\right];$$

$$I^2 = k^2\frac{d^2d'^2\lambda^2}{(d+d')^2}\left[2 - 2\cos\left(\pi\frac{d'+d}{dd'\lambda}r^2\right)\right],$$

expression dont la valeur maximum est précisément

$$4k^2\frac{d^2d'^2\lambda^2}{(d+d')^2}.$$

Dans le cas où l'on a

$$\frac{d+d'}{dd'\lambda}s^2 = 2n+1$$

pour obtenir la différence

$$2\pi\frac{\Phi}{\lambda} = \psi,$$

qui existe entre la phase du mouvement résultant et la phase de

celui qui se propage suivant LO, il faut, d'après ce qu'on a vu aux pages précédentes, résoudre l'équation

$$tg\,\psi = \frac{-\cos(2n+1)\pi + 1}{0}$$

On en tire

$$tg\,\psi = \infty \qquad \text{et} \qquad \psi = 90$$

Ainsi

$$\frac{2\pi\Phi}{\lambda} = 90 \qquad \text{et} \qquad \frac{\Phi}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Remarque. — d et s restant constants, l'expression générale de I^2 varie avec d', et le facteur du second membre qui est compris entre [ ] passe par toutes les valeurs comprises entre 0 et 4; il en résulte que si l'on fait varier la position de l'écran EE' (fig. 671), on doit, par cela même, faire passer l'éclairement du point O par une série de maxima et de minima successifs, pour de faibles accroissements de d'; et c'est ce que l'expérience confirme.

MÉTHODE SYNTHÉTIQUE.

Principes généraux. — Après avoir fait connaître la méthode générale que Fresnel a donnée pour résoudre les problèmes de la diffraction et l'avoir appliquée à un cas particulier, nous allons montrer comment les mêmes principes peuvent servir à expliquer tous les phénomènes observés par Grimaldi. Seulement, nous ne chercherons pas à assigner numériquement la position des franges ou les intensités relatives de l'éclat qu'elles possèdent.

Pour arriver à ce but, nous nous appuierons sur une proposition de géométrie qu'il nous faut établir dès l'abord. Soit un arc de cercle S'ZS (fig. 673) décrit du centre A, B un point extérieur, AZB le diamètre passant par le point B, et concevons l'arc total divisé en arcs consécutifs très-petits MM', M'M'', etc., assujettis à cette condition que la différence des distances de leurs extrémités au point B soit une quantité constante δ très-petite par rapport aux distances AZ et ZB.

Il est facile de voir que deux consécutifs quelconques de ces arcs élémentaires MM', M'M'', ont des longueurs très-sensiblement

égales dès que l'angle ZBM n'est plus extrêmement petit. L'égalité des longueurs MM' et M'M'' cesserait d'avoir lieu dans le



Fig. 673.

voisinage du point Z. Si en particulier M coïncidait avec Z, MM' serait notablement supérieur à M'M'', et M'M'' le serait encore à l'arc suivant....

En effet, soit P un point quelconque de ZS; posons

$$BP = \ , \qquad AB = a, \qquad AP = b,$$

et

$$BAP = C,$$

on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Si le côté c s'accroît d'une très-petite quantité δ, l'angle C recevra un accroissement correspondant ω, et les deux accroissements seront liés par la relation

$$c^2 + 2c\delta + \delta^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C \cos \omega - \sin \ \sin \omega)$$

ou bien, en remplaçant c^2 par sa valeur,

$$2c\delta + \delta^2 = 2ab\cos C - 2ab(\cos C \cos \omega - \sin C \sin \omega)$$

remplaçons *cos* ω et *sin* ω par leurs valeurs en négligeant les termes en ω^3, il vient

$$2c\delta = 2ab.\omega \sin C + 2ab\frac{\omega^2}{2}\cos C - \delta^2.$$

Lorsque C n'est pas du même ordre de petitesse que ω, on peut réduire cette équation à la forme très-simple

$$\omega = \frac{c}{ab \sin C}\delta,$$

car en opérant ainsi on ne néglige qu'un reste tout à fait insensible par rapport aux termes conservés.

Ainsi simplifiée, l'équation montre que ω croît proportionnellement à δ, c'est-à-dire que les arcs élémentaires définis comme nous l'avons fait occupent toutes des longueurs égales sur la circonférence ZS.

Seulement cette conséquence ne s'applique plus à ceux qui sont très-voisins du point Z. Alors, en effet, le terme $2ab\omega \sin C$ est du même ordre de grandeur que ω^2; alors, comme δ^2 est toujours négligeable devant δ, l'équation devient, abstraction faite des termes de l'ordre de ω^4,

$$2c\delta = 2ab\omega C + 2ab\frac{\omega^2}{2}.$$

Pour C = 0, on a simplement

$$2c\delta = \frac{2ab\omega^2}{2};$$

$$\delta = \frac{ab}{2c}\omega^2.$$

Si l'accroissement δ devient δ', ω deviendra ω', et l'on aura

$$\delta' = \frac{ab}{2c}\omega'^2,$$

d'où

$$\frac{\delta'}{\delta} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2.$$

Dans le cas particulier où $\delta' = 2\delta$, on a $\omega' = \omega\sqrt{2}$. Il s'en faut donc de beaucoup que ω' soit alors double de ω, comme cela arrive dès que l'angle C a une valeur appréciable.

Dans ce qui va suivre, pour appliquer ce théorème à l'explication des phénomènes de diffraction, nous nous placerons d'abord

dans un cas qui paraîtra purement hypothétique; mais nous établirons (page 396) que notre hypothèse, si dénuée de réalité qu'elle puisse paraître, n'est au fond que l'expression vraie des conditions dans lesquelles on opère.

Soit dans le plan du tableau une portion de circonférence S′ZS décrite du centre A, et B un point extérieur suffisamment éloigné (fig. 673). Supposons que le milieu éthéré soit homogène dans toute la portion de l'espace que nous considérons; supposons que sur toute l'étendue de la circonférence S′ZS les molécules lumineuses accomplissent des vibrations parfaitement identiques, c'est-à-dire de même intensité, de même phase et de directions parallèles entre elles; enfin, supposons que les conditions de propagation des ondes lumineuses soient telles que chacun de ces mouvements élémentaires considéré isolément, celui, par exemple, de la molécule M, se trouve transmis en B au bout d'un temps égal à $\frac{BM}{v}$, v étant la vitesse de propagation, et cela sans autre changement qu'une réduction dans le coefficient de vibration, laquelle serait proportionnelle à la distance BM. Convenons d'appeler *zone* une portion quelconque d'un des arcs ZS ou S′Z, et *hauteur* de cette zone la différence des distances de ses extrémités au point B.

Ceci posé, pour voir ce que peut être, à une époque donnée T, la résultante générale de tous les mouvements qui arrivent en B dans toutes les directions comprises entre les tangentes menées de B à la circonférence AZ, nous raisonnerons de la manière suivante :

Divisons chacun des arcs ZS et ZS′ en arcs élémentaires MM′, M′M″..., définis par cette condition que la différence des distances du point B aux deux extremités de chacun soit égale à $\frac{1}{2}\lambda$, c'est-à-dire, en d'autres termes, divisons chacun des arcs ZS et ZS′ en zones *élémentaires* de hauteur $\frac{1}{2}\lambda$. Si, d'un même côté du point Z, on considère deux zones élémentaires consécutives MM′, M′M″, prises à une distance appréciable de Z, elles enverront en B des mouvements qui auront à très-peu près même intensité, puisque les longueurs de ces zones sont très-sensiblement égales, et qu'il en est de même de leurs distances au point B. Ces mouvements s'accompliront suivant des droites parallèles, mais ils seront en retard l'un par rapport à l'autre d'une demi-oscillation. Ils se détruiront donc à très-peu près complétement.

Il n'en sera plus de même des zones élémentaires voisines du

point Z, car elles sont inégales entre elles; elles n'agiront que par leur différence, puisque les mouvements envoyés au même instant en B par deux consécutives quelconques d'entre elles sont de directions opposées. De cette opposition de direction et du décroissement de longueur que les zones élémentaires éprouvent à mesure que leur origine s'éloigne du point Z, il résulte que l'intensité de l'éclairement produit en B par une zone ZK présentera un maximum toutes les fois que la hauteur de cette zone vaudra un nombre impair de demi-longueurs d'ondes, un minimum quand cette hauteur sera égale au produit de $\frac{\lambda}{2}$ par un nombre pair.

Enfin, s'il s'agissait d'une portion d'onde telle que N'S', c'est-à-dire d'une zone indéfinie, mais dont l'origine N' fût plus ou moins distante du point Z, on verrait aisément, d'après ce qui précède, que l'action de cette zone en B, encore appréciable si N' était voisin de Z, cesserait bientôt de l'être dès que l'arc ZN' serait un peu considérable (fig. 673).

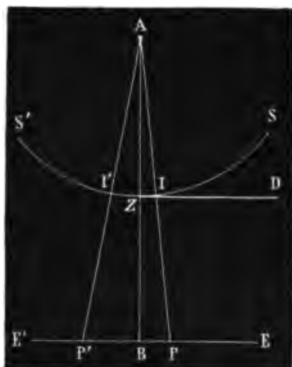


Fig. 674.

Dans les expériences de diffraction, les écrans interceptent des portions plus ou moins considérables de l'arc éclairant total S'ZS (fig. 674), et l'action des parties restantes s'estime d'après les considérations que nous venons d'exposer. Nous examinerons trois cas particuliers.

1er *cas*. **Franges données par le bord d'un écran.** — Supposons qu'à l'aide d'un écran indéfini dans le sens ZB on intercepte

la moitié ZS de l'arc éclairant S'ZS. Le point B sera éclairé par l'autre moitié de cet arc, savoir, par ZS'. Un point P situé dans la portion BE de l'écran blanc EE' recevra la lumière de la zone indéfinie ZS' dont l'origine n'est plus sur la droite AP qui joint le centre A au point P. L'action de cette zone décroîtra rapidement à mesure que le point P s'écartera de B; mais elle ne sera nulle qu'à une certaine distance. Enfin, en un point P' situé à gauche de B, il arrivera d'abord toute la lumière de l'arc éclairant I'S', et cette lumière est égale à celle que S'Z envoie en B, puis toute la lumière que I'Z peut envoyer en ce même point P'. Des considérations très-simples et que nous développerons (page 399) montrent que ces deux résultantes ont entre elles une différence de phase notablement inférieure à $\frac{\pi}{2}$, et d'ailleurs, l'action de la zone I'Z varie avec sa hauteur P'Z — P'I'. Elle est minimum ou maximum suivant que cette hauteur vaut un nombre pair ou un nombre impair de demi-longueurs d'onde.

Par conséquent, à gauche du point B, l'écran doit présenter des franges alternativement plus sombres et plus brillantes résultant de la combinaison d'une quantité de lumière constante avec une autre qui est tantôt plus grande qu'elle et tantôt presque nulle.

Il ne faudrait pas croire, toutefois, que ces indications suffisent pour établir que les maxima auront lieu précisément aux points P' de l'écran définis par la condition que P'Z — P'I' soit égal à $\frac{(2n+1)\lambda}{2}$. En effet, la différence de phase qui existe entre les deux résultantes partielles qu'il faut composer pour avoir le mouvement total varie avec la hauteur de la zone I'Z. Si la hauteur de la zone I'Z vaut $\frac{1}{2}\lambda$, la différence qui existe entre la phase de sa résultante et celle du mouvement transmis suivant AP' est un peu inférieure à $\frac{\pi}{2}$. Si la hauteur vaut $\frac{3}{2}\lambda$, les mouvements efficaces en P' sont : 1° ceux de la 3e zone élémentaire, lesquels fournissent une résultante partielle dont le retard sur le mouvement transmis suivant AP' répond à une différence de phase aussi peu inférieure à $\frac{\pi}{2}$; 2° ceux qui proviennent de l'excès de la première zone sur la deuxième; pour ces rayons, le retard est notablement moindre. Au contraire, il ne peut y avoir de variation dans la différence nécessairement inférieure

à $\frac{\pi}{2}$ qui existe entre la phase de la résultante de l'arc éclairant I'S' et celle du mouvement transmis suivant AP'.

Ainsi donc, on voit que les deux résultantes générales, celle de I'S' et celle de I'Z, qu'il faut combiner pour avoir la représentation numérique du développement des franges données par le bord d'un écran, ont, par rapport au mouvement transmis suivant AP', des retards tous deux inférieurs à $\frac{1}{4}\lambda$. Leur retard réciproque est donc à plus forte raison inférieur à cette limite, mais il existe, et il varie avec IZ'; cette remarque suffit pour faire voir que les considérations précédentes peuvent donner une explication générale de la production des franges, sans pouvoir préciser numériquement la position de leur partie centrale.

2e *cas.* **Franges dans l'ombre d'un corps étroit.** — Si l'écran opaque se réduit à des proportions extrêmement petites, de telle sorte que, par rapport au point de concours B (fig. 675), les zones RD et RD' n'aient plus qu'une hauteur de quelques demi-ondulations, on peut voir d'abord que toujours une tache ou frange lumineuse existera au point B où l'écran EE' est rencontré par la perpendicule AZ, et qu'ensuite, à droite et à gauche de B et dans la partie *dd'* de l'écran comprise entre les prolongements des droites AD' et AD, devront apparaître des franges fines et semblables aux franges d'interférence ordinaire.

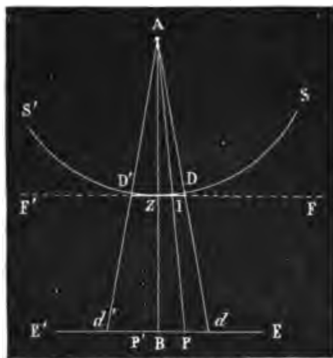


Fig. 675.

En effet, on voit d'abord que le point B est éclairé par les deux arcs indéfinis DS et D'S' parfaitement symétriques l'un de l'autre par rapport à AB. Les résultantes de ces deux arcs sont donc

égales entre elles : elles ont même phase, leur accord est absolu. Mais si l'on s'écarte à droite ou à gauche de B, on trouvera des points tels que P et P' symétriques l'un de l'autre par rapport à B, et tels que pour chacun la différence des phases des résultantes que DS ou D'S' leur envoient soit $\frac{1}{2}\pi$; en ces points il y aura obscurité, et ainsi de suite.

Nous ne nous occuperons pas de ce qui arrive en dehors de l'espace *dd'*.

3e *cas*. **Franges données par une ouverture étroite.** — Il peut arriver enfin que l'écran interceptant tout le reste de l'arc éclairant S'ZS laisse libre seulement la partie D'ZD que, dans le cas précédent, nous supposions seule interceptée.

Alors le point B sera toujours éclairé par deux zones ZD, ZD', parfaitement égales et qui lui enverront des mouvements concordants. Mais ces mouvements auront des intensités très-différentes, suivant que les hauteurs des zones vaudront un nombre pair ou impair d'ondulations; dans le premier cas, les deux composantes, isolément très-faibles, ne donneront qu'une résultante faible elle-même; l'inverse aura lieu dans le second cas. Ainsi, au point B, l'intensité de l'éclairement passera par des maxima et des minima alternatifs lorsqu'on fera changer la distance des écrans FF' et EE'.

Dans tout l'espace *dd'* il y aura des franges.

En effet, soit P un point quelconque pris dans ces limites; l'éclairement en P est la résultante de ceux que produiraient isolément en ces points les zones ID et ID'; les hauteurs de ces zones, et par suite les intensités et les différences de phase des résultantes partielles qu'elles envoient en P, varieront avec la position de ce point. Il y aura donc tout le long de *dd'* des variations périodiques de lumière. Le phénomène sera symétrique de part et d'autre de BD; seulement il se simplifiera à mesure que EE' s'écartera de DD', et les franges intérieures disparaîtront quand EE' sera assez reculé pour que les différences $dD' - Dd$ et $d'D - d'D'$ soient moindres que $\frac{1}{2}\lambda$.

Remarque. — Soit, dans un milieu homogène, O (fig. 676) le centre d'une sphère dont le rayon est très-grand par rapport à la longueur d'ondulation lumineuse λ; soit de plus une petite portion de la surface de cette sphère ayant la forme d'une zone à une base, et supposons que le diamètre de cette base soit aussi très-grand par rapport à λ.

Si le centre O devient source de vibrations lumineuses, les

mouvements transmis au même instant physique à tous les points de la calotte dont ABA'D est la base donneront, suivant trois directions déterminées et rectangulaires, des composantes respectivement identiques entre elles.

Ceci posé, concevons une série de grands cercles ayant leur intersection commune parallèle à une ligne BD menée arbitrairement dans le plan ABD et comprenant entre eux des angles égaux et infiniment petits. Ils diviseront la calotte sphérique en une série de tranches de même largeur à bords parallèles. Toutes ces tranches seront coupées en leur milieu par le plan diamétral mené perpendiculairement à l'intersection commune de tous ceux que nous venons de considérer ; soit AA' la trace de ce nouveau plan sur la surface de la calotte sphérique.

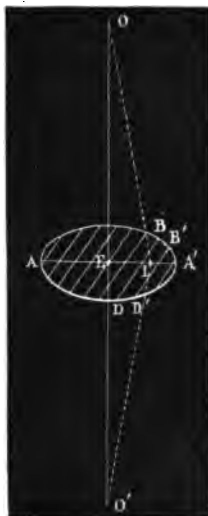


Fig. 676.

Les mouvements que la tranche élémentaire BDB'D' envoie en un point O' de la ligne OEO' pourront évidemment être remplacés par un mouvement unique de même période et transmis suivant IO'; seulement, il pourra exister une certaine différence entre la phase de ce mouvement résultant et celle de la vibration directement transmise suivant IO'; mais cette différence sera la même

pour les tranches voisines de E, qui, toutes, enverront en O' des mouvements de même intensité, et dès lors on voit que la résultante générale de tous ces mouvements sera celle d'une série de vibrations égales, parallèles, existant avec la même phase en tous les points contigus de l'arc AA' ou d'un autre arc très-voisin de lui et décrit comme lui du centre O et dans le plan AOA'.

Il est facile d'en conclure que l'hypothèse de la page 394 peut être considérée comme l'expression d'une réalité physique, au moins dans les circonstances où on l'applique.

De tout ce qui a été dit aux paragraphes précédents il résulte que, pour traiter complétement une question de diffraction, on est généralement conduit à calculer l'expression de la résultante de tous les mouvements élémentaires envoyés en un point déterminé d'un écran par une ou plusieurs portions définies de l'*onde de Huyghens*. La grandeur de la résultante change avec les coordonnées du point de concours, et de ses variations résultent les alternatives des franges brillantes et des franges obscures. Dans le mémoire où il a expliqué l'ensemble des phénomènes de diffraction, Fresnel n'est le plus souvent arrivé à la détermination des maxima et des minima dont nous parlons qu'à l'aide de calculs numériques très-laborieux; mais depuis, la solution de ces questions a reçu d'importantes simplifications dans les recherches de Cauchy, de M. Knochenhauer et de M. Quet.

Recherches de M. Quet. — Les travaux de M. Quet ont été insérés aux *Ann. de Phys. et de Chim.*, série 3, t. 46 et 49. On y trouve et le développement des méthodes analytiques aux-

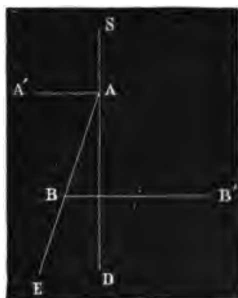


Fig. 677.

quelles sont dues les simplifications que nous venons d'indiquer et l'explication de plusieurs phénomènes de diffraction qui n'é-

taient pas connus jusqu'ici. Nous citerons spécialement l'un d'eux.

« On l'obtient en plaçant devant une source lumineuse S deux écrans AA', BB', dirigés en sens opposés, ayant leurs bords rectilignes parallèles et tels que le bord du second écran pénètre dans l'ombre du premier. Les franges apparaissent au delà du second écran et hors de son ombre B'BE. Elles sont nettes, et dans la lumière homogène elles forment un vif contraste sur les parties voisines qui sont très-sombres. Elles disparaissent complétement lorsque le second écran BB' fait une demi-révolution autour du bord B supposé fixe... »

Description des appareils. — Dans l'étude expérimentale des phénomènes de diffraction on emploie, pour mesurer les distances des franges, la loupe de Fresnel, dont nous avons déjà indiqué l'usage page 336. La figure 678 représente la disposition

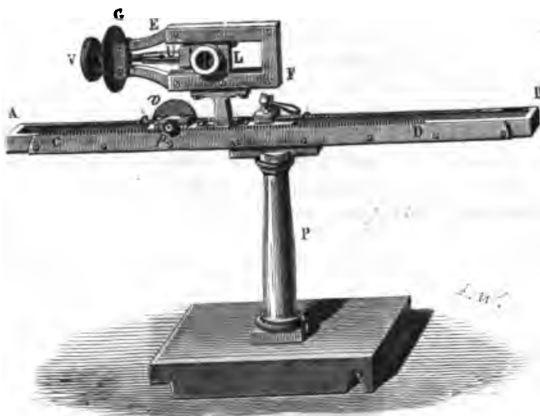


Fig. 678.

générale de l'appareil. La loupe L est portée dans une monture en cuivre EF au milieu de laquelle elle peut se mouvoir sous l'action d'une vis micrométrique V, et la monture elle-même peut être transportée rapidement d'un bout à l'autre de la règle AB' à l'aide du pignon p et de la crémaillère CD.

La direction de la règle, et par conséquent celle des deux mouvements de la loupe, représente celle de l'écran sur lequel on recevrait les franges, dans les expériences de projection ordinaire.

Les pièces qui servent à la production des franges sont des fiches de cuivre percées de fentes étroites, de trous très-fins, etc., ou encore des cadres de petites dimensions au milieu desquels sont fixés un cheveu, une aiguille, en un mot, une tige de diamètre convenable. Ces lames de cuivre, ces cadres s'enchâssent dans des anneaux HC (fig. 679) qui peuvent recevoir de l'action des vis V' et V un mouvement de translation et un mouvement de rotation que l'on combine de manière à donner aux différentes pièces une orientation convenable, de manière par exemple à rendre bien parallèles entre eux la fente qui sert à transmettre les rayons lumineux, les bords des écrans opaques, etc., etc.

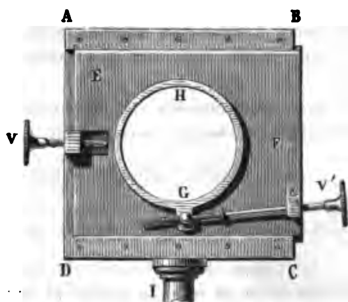


Fig. 679.

Les pieds qui portent toutes ces pièces glissent dans une coulisse établie sur une table bien solide.

Dans le second et le troisième des cas de diffraction examinés (pages 394 et suiv.) le phénomène est symétrique par rapport à un plan qui est parallèle aux grands côtés de la fente lumineuse, à ceux de la fente ou de la mince tige qui sert à produire les phénomènes, et qui de plus coupe ces fentes ou ces tiges en deux parties égales; il est par suite facile, ainsi qu'on l'a vu à propos des interférences, de trouver la position de chaque frange par rapport à ce plan.

Dans le cas de la diffraction produite par le bord d'un écran, cette symétrie n'a plus lieu. Mais pour la rétablir, il suffit de doubler le phénomène en le produisant simultanément avec les deux bords d'une fente suffisamment large, symétriquement disposée par rapport au plan que nous avons défini aux lignes précédentes.

Note relative à la position du point d'application de la résultante d'une zone éclairante.

Si l'on divise une zone élémentaire en zones différentielles de hauteur $d.\lambda$, ces zones différentielles seront inégales, les plus voisines de l'origine étant les plus longues. De là résulte que le mouvement envoyé en B par la première zone élémentaire de Z'S' ou ZS (fig. 673) peut être considéré comme la résultante de deux séries de mouvements, dont les phases présenteraient, par rapport au premier d'entre eux, des différences variant d'une façon continue entre 0 et π, et dont les intensités seraient toutes égales dans la première série, tandis que dans la deuxième elles iraient en décroissant d'une façon continue pour devenir nulles quand la phase serait π.

La résultante des mouvements de la première série a, par rapport au mouvement transmis suivant AB, une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$; cela résulte immédiatement de la formule $tg\,\psi = \frac{\Sigma a \sin\varphi}{\Sigma a \cos\varphi}$ établie page 382. Pour les mouvements de la deuxième série, la phase de la résultante est nécessairement moindre. Pour cette série en effet la première moitié des termes de $\Sigma a \cos\varphi$ n'est plus détruite par la deuxième. Ainsi, la phase de la résultante de la première des zones élémentaires de Z'S' et de ZS est la résultante de deux mouvements ayant l'un une phase égale à $\frac{\pi}{2}$, l'autre une phase moindre. Or, lorsque deux mouvements vibratoires dont les intensités sont a^2 et a'^2 ont avec un troisième des différences de phase φ et φ' inégales entre elles et qui ne sont pas supérieures à $\frac{\pi}{2}$, on peut voir aisément que leur résultante aura, par rapport à celui auquel on les compare, une différence de phase inférieure elle-même à $\frac{\pi}{2}$.

Posons en effet $tg\,\varphi = m$, $tg\,\varphi' = m'$, et supposons $m' > m$. Pour déterminer la phase de la résultante, on aura l'équation :

$$tg\,\psi = \frac{a\,m\cos\varphi + a'm'\cos\varphi'}{a\cos\varphi + a'\cos\varphi'} = m + \frac{m' - m}{\frac{a}{a'}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} + 1}.$$

Or, $\frac{1}{\frac{a \cos \varphi}{a' \cos \varphi'} + 1}$, n'est jamais supérieur à 1, puisque $\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}$ est toujours positif; donc $tg \psi$ n'est jamais supérieure à m'. Il est du reste visible que $tg \psi$ diminue lorsque a augmente et lorsque a' diminue.

La résultante de la première zone élémentaire est donc en retard sur le mouvement transmis suivant AP' d'une quantité inférieure à $\frac{\lambda}{4}$. Pour la résultante des deux premières zones élémentaires la différence de phase serait encore moindre puisque, quand la seconde zone vient neutraliser une partie de l'action de la première, ce sont surtout les premiers éléments de celle-ci qui deviennent prédominants.

§ 3. RÉSEAUX.

Les principes qui servent à expliquer la formation des franges de diffraction donnent également l'explication d'une série de phénomènes très-brillants, observés avec grand soin par Frauenhoffer et connus sous le nom de *phénomènes des réseaux*.

Expériences de Frauenhoffer. — Que l'on trace sur une lame de verre une série de lignes parallèles, équidistantes et assez rapprochées pour qu'il y en ait au moins 25 par millimètre, et qu'à travers le réseau ainsi formé, on regarde un point lumineux éloigné; par exemple, une lumière ordinaire placée à quelques mètres; on verra d'abord la lumière comme si le réseau n'existait pas; puis, à une certaine distance à droite et à gauche de l'image directe, on verra une série de spectres se développant le long d'une droite perpendiculaire à la direction des lignes du réseau.

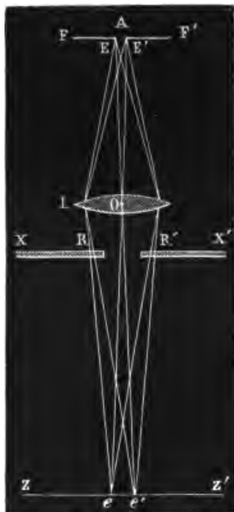


Fig. 680.

Tous ces spectres auront le violet en dedans et le rouge en dehors. A une distance un peu considérable, ils finiront par se fondre en une traînée blanchâtre uniforme.

Lorsqu'on veut opérer par projection, on forme sur un écran ZZ', à l'aide d'une lentille à long foyer L (fig. 680), l'image d'une ouverture étroite A, par laquelle la lumière solaire ou celle d'une lampe électrique, pénètre dans la chambre noire.

Sur la direction du faisceau on place un réseau enchâssé dans l'ouverture RR' d'un écran opaque XX', et l'on voit apparaître sur le fond ZZ' le phénomène que l'on aperçoit par vision directe lorsqu'on opère comme nous l'indiquions d'abord.

Explication des phénomènes. — M. Babinet a donné du phénomène des réseaux l'explication suivante :

Soit un faisceau de rayons parallèles, tombant normalement sur le réseau RR'; sa section, par le plan du réseau, pourra être assimilée à une portion d'onde plane, en tous les points de laquelle les vibrations des molécules éthérées seront parallèles et de même intensité.

Les prolongements des rayons lumineux qui limitent de toutes parts le faisceau incident, viendront découper sur un écran blanc ZZ', parallèle au réseau, un disque lumineux *ee'* différant, seulement par son intensité, de celui que l'on observerait au même point si le réseau était enlevé.

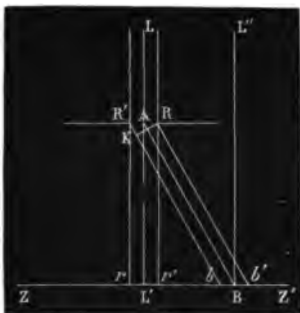


Fig. 681.

Dans cette direction, le réseau n'exerce donc pas d'effet sensible. Il en est autrement dans les directions suffisamment obliques, telles, par exemple, que AB (fig. 681).

Si le réseau n'existait pas, l'ouverture RR' n'enverrait dans cette direction aucune lumière sensible sur l'écran ZZ', car la portion de l'onde, qu'elle laisse libre, n'est, par rapport au point B, qu'une zone presque indéfinie, dont l'origine R est très-éloignée du point où la surface de l'onde est percée par la droite BL'' menée au centre lumineux; et, une zone de ce genre est impuissante à envoyer en B une lumière comparable à celle qui existe en L', parce qu'il y a destruction réciproque presque absolue des mouvements composants que ses éléments successifs envoient en ce point B. Mais si l'on vient à placer le réseau en RR', on supprime une portion de ces mouvements composants, et si cette suppression laisse subsister en majorité des mouvements capables d'être en accord au point B, on verra alors reparaître de la lumière sur ce point.

On peut aisément définir les circonstances dans lesquelles la condition, que nous indiquons ici, sera remplie : supposons que dans un réseau la somme faite d'un intervalle brillant et du sillon opaque qui le suit, ait une largeur constante δ, et que, par conséquent, sur le plan R'R, les traces des bords homologues de deux sillons opaques consécutifs soient distants de cette quantité δ.

Vue du point B, cette distance équivaudra à un nombre p entier ou fractionnaire de zones élémentaires d'autant plus grand que la distance BL' est plus grande; lorsque p sera entier et pair, on verra, en général, de la lumière reproduite en B, car le sillon opaque faisant, comme nous l'avons dit, disparaître une partie des termes d'une somme dont la valeur est nulle, il arrivera, en général, que le reste aura une valeur différente de zéro; sans doute, il se pourra faire exceptionnellement que le sillon opaque lui-même équivaille à une zone de hauteur $2n\frac{\lambda}{2}$; mais ce n'est là qu'un cas particulier, devant répondre, et répondant en effet à une disparition exceptionnelle d'un des spectres de la série.



Fig. 682.

Les lois du phénomène se déduisent immédiatement des considérations précédentes.

Supposons, en effet, que la n^e frange d'une couleur caractérisée par la longueur d'onde λ apparaisse dans la direction AB, et soit CD la somme faite d'un sillon opaque et de l'espace brillant qui le suit, on a (fig. 682)

$$CB - DB = CE = \frac{2n\lambda}{2};$$

soit DE un arc de cercle décrit du centre B avec BD pour rayon, et posons

$$L'AB = \omega$$

on aura très-sensiblement

$$CE = \delta \sin \omega,$$

ou simplement

$$n\lambda = \delta\omega,$$

si ω ne dépasse pas quelques degrés; en d'autres termes, ω sera proportionnel à n.

L'expérience vérifie très-exactement cette première loi.

n restant le même ω varie avec λ; et de là les apparences irisées que présente le phénomène lorsqu'on le produit avec de la lumière blanche. Enfin, ω et δ sont, pour une même valeur de n, en raison inverse l'un de l'autre.

Toutes ces lois sont celles que les observations de Frauenhöffer avaient établies.

L'observation des réseaux peut conduire à de bonnes évaluations des longueurs d'ondulation des différentes lumières. En effet, que l'on opère en projection, que l'on opère par visée directe, l'angle ω, qui figure dans la formule

$$n\lambda = \delta\omega,$$

se mesure sans difficulté, et les spectres présentent les raies ordinaires qui offrent, dans les mesures, les points de repère les plus délicats; quant à l'évaluation de δ, on l'obtient en divisant la largeur totale du réseau par le nombre de traits qu'il contient.

Les réseaux parallèles sont les plus simples de tous, et les phénomènes qu'ils servent à produire s'analysent sans difficulté; avec des réseaux circulaires on obtient des anneaux concentriques, alternativement brillants et obscurs dans la lumière homogène, et irisés dans la lumière blanche. Enfin, en superposant deux ou trois plaques de verre sur lesquelles sont tracés des réseaux parallèles, on obtient des effets très-remarquables qui se prévoient d'après les indications précédentes, et dont M. Schwerd a étudié avec soin tous les détails.

Les calculs dont il s'agit ne sont pas de nature à trouver place dans cet ouvrage.

CHAPITRE XVI.

VITESSE DE LA LUMIÈRE.

§ 1. MESURE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE.

Opinion des anciens. Recherches de Descartes. — Les anciens avaient remarqué que la lumière semble se propager instantanément entre deux points pris à des distances grandes ou petites à la surface de la terre. Galilée vérifia l'exactitude de ces remarques par une série d'observations spéciales, et vers la même époque, Descartes montrait que l'on peut tirer de l'observation des éclipses de lune une preuve bien autrement puissante de l'excessive rapidité de la propagation de *l'action* à laquelle il attribuait les sensations lumineuses.

Voici à fort peu près la forme sous laquelle Huyghens présente le raisonnement de Descartes (*Traité de la lumière*) :

Soit (fig. 683) A le soleil, BD une portion de l'orbite terrestre, DCD′ celle de la lune, et ABC une droite qui coupe ces deux courbes.

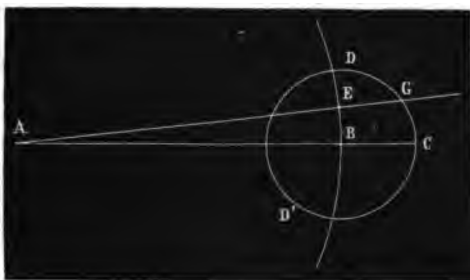


Fig. 683.

Si la lumière met un temps appréciable, une heure, par exemple, pour traverser l'espace qui est entre la terre et la lune, il

s'ensuivra que, quand la terre passera en B, son ombre ne sera pas encore en C. Elle n'arrivera en ce point qu'environ une heure après le passage de la terre en B. Si la lune arrive alors en C, elle y sera obscurcie, mais il faudra qu'une heure encore se passe avant que ce phénomène ne soit vu de la terre. Ainsi il se sera passé deux heures entre le moment où la terre était en B et celui où l'on verra la lune s'éclipser en C. Pendant ces deux heures, la terre sera arrivée en E, elle verra donc l'éclipse dans la direction EC, le soleil dans la direction EA, et par conséquent la lune ne paraîtra en aucune sorte éclipsée dans le lieu de l'écliptique opposé au soleil, ce qui est tout à fait contraire à l'expérience.

Dans l'hypothèse que nous venons de faire sur la vitesse de la lumière, l'angle HEC serait d'environ 33°, mais si l'on suppose qu'au lieu d'une heure la lumière ne mette que 10″ pour venir de la lune, l'angle GEC deviendrait si petit qu'on aurait fort bien pu ne pas l'apercevoir dans les expériences citées par Descartes. « En méditant ces choses, continue Huyghens, je n'ai pas fait difficulté de supposer que la propagation de la lumière exige, pour se faire, *un temps* très-court il est vrai, mais fini ; et, depuis, cette hypothèse a reçu grande apparence d'une vérité constante par l'ingénieuse démonstration de M. Roëmer... »

Recherches de Roëmer. — Les travaux de Roëmer dont parle ici Huyghens remontent à 1678, et le résultat auquel sa méthode a conduit est que la lumière met environ 8 minutes à nous venir du soleil, d'où l'on conclut, en d'autres termes, qu'elle parcourt 79572 lieues de 4 kilomètres en une seconde de temps.

On sait que Jupiter et la terre tournent dans le même sens autour du soleil. Mais leurs moyennes distances à cet astre sont très-différentes ainsi que les temps des révolutions. Pour Jupiter, la distance moyenne est voisine de 200 millions de lieues. Le temps de la révolution, environ 12 ans. Pour la terre, les mêmes éléments sont 32 millions de lieues, et une année. On sait de plus qu'autour de Jupiter circulent 4 lunes on satellites, et l'on désigne sous le nom de 1er satellite celui qui est le plus voisin de la planète. Toutes les fois que dans son mouvement le 1er satellite se plonge dans le cône d'ombre projeté derrière la planète, il cesse d'être visible pour nous : il y a occultation.

Si l'on observe plusieurs occultations consécutives du 1er satellite à une époque où Jupiter et la terre se meuvent dans des portions de leurs orbites à peu près parallèles entre elles, et en restant par suite à même distance l'un de l'autre, on trouve qu'entre deux occultations il s'écoule exactement 42^h 28^m 42^s. En

observant pendant une douzaine d'années autant de fois que possible l'intervalle de temps qui sépare deux immersions ou émersions consécutives de ce 1er satellite, et en prenant la moyenne générale, on trouverait encore le même nombre.

Ceci posé, que l'on détermine l'heure précise d'une occultation à une époque où Jupiter, la terre et le soleil sont à peu près en ligne droite, la terre se trouvant entre les deux autres astres comme dans la figure 684. On pourra, en partant de cette détermination et du temps connu $42^h\ 28^m\ 42^s$, calculer l'instant précis d'une occultation qui devra avoir lieu six mois et quelques jours après, c'est-à-dire pour une époque où les trois astres seront de nouveau en ligne droite, mais cette fois le soleil étant entre les deux planètes, comme en $j'ST'$. Or l'observation prouve toujours que l'époque de l'occultation ainsi déterminée est en avance de 16^m environ sur l'instant où l'on voit le phénomène. Tout au contraire, si l'on prenait pour point de départ une occultation observée quand la terre est en T' et Jupiter en j', la 110^e occultation suivante, qui répondrait à la position j'' T'' des astres, serait vue 16^m avant l'époque calculée.

Voici comment Roëmer expliqua ces anomalies apparentes et en déduisit la mesure de la vitesse de la lumière.

Lorsque l'on voit commencer l'occultation, le satellite est déjà plongé dans l'ombre de la planète depuis un temps égal à celui qu'il faut à la lumière pour venir de Jupiter à notre œil. Néanmoins si, pendant quelques jours, la distance de Jupiter à la terre ne change pas sensiblement, des observations consécutives faites à cette époque feront connaître exactement le temps qui sépare deux occultations réelles, parce que le retard affectera d'une même quantité les deux époques que l'on devra retrancher l'une de l'autre pour avoir le temps cherché.

Si, au contraire, on mesure directement le temps qui sépare deux occultations observées, la première dans la position Tj et l'autre dans la position T'j' des astres, on le trouvera trop long d'un nombre de minutes égal à celui qu'il faut à la lumière pour parcourir toute la différence de ces distances auxquelles ils se trouvent l'un de l'autre dans les deux cas, ou, si l'on aime mieux, tout le chemin qu'a fait la terre en s'éloignant de Jupiter.

L'accroissement de distance est ici égal au grand axe de l'orbe terrestre, et comme le retard observé est de $16^m\ 26^s$, on voit que la lumière nous vient du soleil en $8^m\ 13^s$. Une autre particularité qui se présente encore dans l'observation des éclipses du 1er satellite conduit identiquement aux mêmes conséquences. Deux fois par an, la direction suivant laquelle la terre se meut

passe à peu près par Jupiter. Cela arrive pour les positions des astres représentées sur la figure par $j_1\,T_1$ et $j_2\,T_2$. Dans le premier cas, la terre s'éloigne de Jupiter avec une vitesse qui reste à peu près constante pendant quelques jours, et si l'on choisit cette époque pour mesurer le temps qui sépare deux occultations on le trouve égal à $42^h 28^m 42^s + 14^s$, 14^s étant le temps qu'il faut à la lumière pour parcourir l'accroissement que subit la distance des astres en 42 heures. Au contraire, quand la terre est en T_2 et qu'elle se rapproche le plus vite possible de Jupiter, l'intervalle apparent de deux occultations consécutives se trouve être $42^h 28^m 42^s - 14^s$.

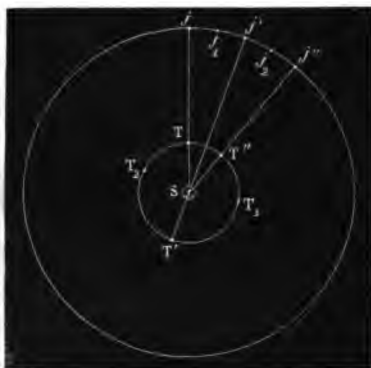


Fig. 684.

Recherches de Bradley et Molineux. — Un demi-siècle après les travaux de Roëmer, Bradley et Molineux trouvèrent dans l'étude d'un nouveau phénomène astronomique, l'aberration des fixes, une confirmation de la non-instantanéité de la propagation de la lumière, et une vérification de la valeur assignée par Roëmer à la vitesse de cette propagation.

Les étoiles paraissent avoir dans le ciel un mouvement faible, il est vrai, mais nettement appréciable, variable en direction et en rapidité avec l'époque où on l'observe, et se résumant en une oscillation qui embrasse l'année entière. Toutes les trajectoires sont des ellipses dont le grand axe, le même pour toutes, est parallèle au plan de l'orbite terrestre et sous-tend un arc de 40''. Pour les étoiles situées dans le plan de l'écliptique, les ellipses se réduisent à leur grand axe; elles deviennent des cercles pour celles qui sont au pôle de l'écliptique.

Pour comprendre à quoi tiennent ces mouvements purement apparents, il suffit des remarques suivantes. Quand un observateur immobile veut observer à la lunette un point lumineux fixe, il dirige son instrument de manière que ce point, le centre optique O (fig. 685) de l'objectif, et le point où se croisent les



Fig. 685.



Fig. 686.

deux fils du réticule soient en ligne droite. Le point de concours P des rayons coïncide avec celui où les fils se croisent. C'est là qu'est l'image réelle du point lumineux. Les choses ainsi disposées, si, au moment où la lumière tombe en O, la lunette se trouve animée tout à coup d'un mouvement qui la transporte parallèlement à elle-même dans le sens PX, les rayons qui pénètrent dans son intérieur ne rencontrent plus le croisement des fils au point P où ils convergent, parce que, pendant le temps très-court θ que la lumière met à parcourir le tube, les fils se seront déplacés avec la lunette et seront venus en p'. Mais on conçoit que le point du croisement des fils eût pu rencontrer la lumière à son arrivée en P si l'on redressait la lunette en la faisant pivoter de manière à rejeter le centre du réticule en p à une distance de P égale à celle que la lunette parcourt pendant le temps θ.

On remarquera seulement que, pour que le mouvement de la terre influe d'une manière sensible sur l'inclinaison à donner à la lunette, il faut que sa vitesse de translation v soit comparable à celle de la lumière que nous appellerons V. Et en effet, d'après les résultats de Roëmer, ce rapport est égal à 0,0001 environ, c'est-à-dire à la tangente de 20″, quantité très-observable.

Ainsi donc, pour voir une même étoile fixe aux différentes époques de l'année, il faudra pointer la lunette dans des directions différentes dont la détermination pourra se faire dans chaque cas de la manière suivante.

Pour chacune des positions de l'observateur, on conçevra que l'on mène par le centre optique de l'objectif (fig. 686) : 1° une droite OT dont la direction soit parallèle à celle du mouvement de la terre dans son orbite ; 2° une autre droite OL dont le prolongement passe par l'astre que l'on veut observer : on donnera à ces deux lignes des longueurs proportionnelles à v et à V, puis on joindra leurs extrémités, et l'on aura dans chaque cas la direction TL qu'il faut donner à l'axe de la lunette.

A cause de l'éloignement infini de l'étoile, la droite qui la joint au centre de l'objectif conserve pendant toute la durée de l'année une direction constante, et d'après ce que nous venons de dire, on voit que l'axe de la lunette décrit autour d'elle un cône dont la trace est un cercle sur tout plan parallèle à l'écliptique. La trace du même cône sur la sphère céleste sera donc la projection d'un cercle sur le plan tangent mené à la sphère par le point qui y représente la position de l'étoile. Or, cette projection est évidemment une ellipse dont le grand axe est parallèle au plan de l'écliptique et égal au diamètre du cercle en question.

Pour toutes les étoiles, ce grand axe a toujours même valeur absolue ; il est égal au diamètre de la sphère celeste multiplié par le rapport de la vitesse de circulation de la terre à la vitesse de la lumière.

Pour toutes les étoiles il est vu sous le même angle, car il est toujours perpendiculaire au rayon de la sphère céleste.

Quant au petit axe de ces ellipses, il est évidemment nul pour celles qui sont dans le plan de l'écliptique. Il est égal au grand pour celles qui sont au pôle de l'écliptique.

Recherches de M. Fizeau. — En 1849, M. Fizeau parvint à rendre observable le temps que la lumière met à parcourir une distance de quelques lieues : ses expériences ont été communiquées à l'Académie des sciences le 23 juillet 1849.

Supposons que dans un tube opaque et horizontal AB (fig. 687)



Fig. 687.

soit disposé un miroir de glace non étamé, incliné à 45° sur l'axe

du tube. Si l'on fait tomber sur ce miroir un faisceau LL', intense et perpendiculaire à l'axe du tube, une partie se réfléchira, suivant l'axe, dans la direction L'Z, et si le faisceau ainsi réfléchi tombe quelque part en PP' sur un miroir métallique plan exactement perpendiculaire à sa direction, il reviendra sur lui-même et pourra, en traversant la glace MM', arriver, partiellement au moins, à l'œil d'un observateur en O.

Or, admettons maintenant que sur le trajet du faisceau L'Z et perpendiculairement à sa direction on fasse tourner très-rapidement un disque partagé vers sa circonférence en secteurs égaux, alternativement pleins et vides, et ayant une largeur égale à celle du faisceau, il ne passera évidemment, soit au départ, soit au retour, que la portion du faisceau LL' qui tombera sur les secteurs vides. Or, si pendant le temps que la lumière met à aller de AB en PP' et à revenir, les secteurs pleins se substituent exactement aux vides, toute la lumière en retour sera arrêtée. Ainsi donc, s'il y a n secteurs vides et n pleins, il y aura éclipse complète toutes les fois que pendant le temps de l'aller et du retour de la lumière la roue tournera d'une fraction de circonférence égale à $\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{5}{2n}$, car alors la substitution des secteurs pleins aux secteurs vides se fera exactement.

Au contraire pour des vitesses qui croîtraient comme les nombres 0, $\frac{2}{2n}, \frac{4}{2n}$, on aurait des maxima de lumière.

Pour les vitesses intermédiaires à celles-ci, on aurait des intensités variables entre les limites extrêmes.

Dans les expériences de M. Fizeau, les conditions théoriques que nous venons d'indiquer étaient réalisées de la manière suivante :

« Deux lunettes placées l'une à Suresnes, l'autre à Montmartre,



Fig. 688.

étaient dirigées l'une vers l'autre, de telle sorte que l'image de

[illegible]

§ 2. [illegible]

Observations d'Arago. — [illegible]

[illegible] Dans les idées de Newton, en effet, la vitesse croît avec l'action réfringente, et c'est précisément le contraire dans le système de Huyghens.

Sans doute la belle observation d'Arago sur le déplacement des images (voir page 344) s'expliquait si bien dans l'hypothèse des ondulations, qu'elle constituait une preuve nouvelle en faveur de la réalité de cette hypothèse; mais enfin l'auteur de cette hypothèse lui-même désirait une confirmation directe du fait qu'elle mettait en évidence, et voici par quelle série d'idées et d'expériences on est arrivé à l'obtenir.

Miroir tournant de M. Wheatstone. — En 1836, à l'occasion de recherches sur la vitesse de propagation de l'électricité, M. Wheatstone s'était proposé le problème suivant : Étant donnés deux points lumineux apparaissant sur une même verticale, à des intervalles de temps extrêmement courts, $\frac{1}{1,000,000}$ de seconde, par exemple, rendre visible ce très-court intervalle de temps qui sépare les deux apparitions successives. Pour résoudre la question, il imagina de placer à une certaine distance de

l'endroit où se développaient les deux étincelles un miroir métallique, poli sur ses deux faces, tournant avec grande vitesse autour d'un axe vertical, et de regarder le phénomène dans ce miroir. En ces conditions, les images réfléchies ne peuvent plus paraître sur une même verticale. Supposons en effet que le miroir fasse 500 tours à la seconde, l'image de chaque point lumineux en fera 1,000; elle parcourra donc en une seconde un nombre de minutes égal à 360 × 60 × 1,000 = 21,600,000; et en $\frac{1''}{1,000,000}$, elle parcourra 21',6, c'est-à-dire un tiers de degré environ. Que les points lumineux soient à une distance de l'axe un peu supérieure à 3 mètres, chaque minute vaudra $0^{m},001$, et 21',6 vaudront un peu plus de 2 centimètres. Ainsi l'image de la deuxième étincelle sera vue à environ 2 centimètres de celle de la première.

Méthode d'Arago. — Peu de temps après la publication des travaux de M. Wheatstone, Arago montra qu'en modifiant convenablement le procédé que le savant anglais avait adopté dans ses recherches, on pouvait décider si la lumière se propage dans l'air plus ou moins vite qu'elle ne le fait dans l'eau, ou, plus généralement, dans un liquide transparent quelconque.

La note dans laquelle Arago indique le plan des expériences à faire pour arriver à ce résultat a été insérée aux Comptes rendus de l'Académie des sciences (1839). Nous en extrayons ce qui suit :

« Deux points rayonnants, placés l'un près de l'autre et sur la même verticale, brillent instantanément devant un miroir tournant. Les rayons du point supérieur ne peuvent arriver à ce miroir qu'en traversant un tube rempli d'eau. Les rayons du second point atteignent la surface réfléchissante, sans avoir rencontré dans leur course aucun autre milieu que l'air. Pour fixer les idées, nous supposerons que le miroir, vu de la place que l'observateur occupe, tourne de droite à gauche. Alors, si la théorie de l'émission est vraie, si la lumière est une matière, le point le plus élevé semblera à gauche du point inférieur; il paraîtra à sa droite, au contraire, si la lumière résulte des vibrations d'un milieu éthéré. »

Recherches de M. Foucault. — De grandes difficultés pratiques empêchèrent Arago de mettre à exécution le projet d'expériences que nous venons de faire connaître, et ce fut M. Foucault qui réussit le premier à tirer de l'emploi du miroir tournant la solution de la question qui nous occupe.

Dans le procédé de M. Foucault, les images dont on veut

mesurer l'écart sont fixes. Elles se forment en une position déterminée à l'avance; elles sont très-fines; et par suite on peut les observer avec les appareils micrométriques ordinaires. Ces bonnes conditions permettent de réduire la longueur des tubes destinés à contenir les liquides sur lesquels on opère, sans que pour cela l'expérience perde de sa précision. Soit (fig. 689) ZA'Z'

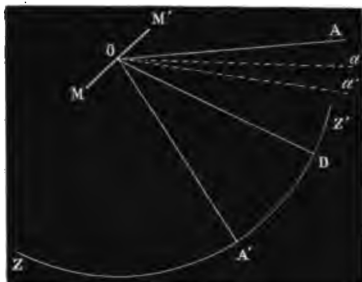


Fig. 689.

un miroir sphérique ayant son centre en O, et MM' un miroir plan passant par le point O; un rayon incident AO se réfléchit suivant OA', et s'il tombe sur le miroir sphérique ZZ', il revient au point O. Là il éprouve une troisième réflexion qui le ramène suivant OA, si MM' est resté immobile pendant que le rayon a parcouru deux fois la ligne OA'.

Si pendant ce très-court intervalle, le miroir MM' s'était déplacé, la troisième réflexion renverrait le rayon suivant une direction O*a* faisant avec OA un angle double de celui dont le miroir MM' aurait tourné.

Tous ces résultats sont parfaitement indépendants de la position première du miroir; par suite, l'instantanéité de la lumière apparaissant en A n'est plus nécessaire. Dès lors on pourra voir à la fois A et *a*, et la déviation A*a*, si elle est sensible, permettra de « mesurer la durée de la propagation de la lumière entre deux points distants seulement de quelques mètres. » (L. Foucault, *Ann.*, s. 3, t. XLI.)

Si maintenant entre O et A' on interpose un milieu autre que l'air, un liquide renfermé dans un tube par exemple, la déviation A *a'* sera différente : plus grande, si dans le liquide la lumière se trouve retardée, et moindre dans le cas contraire; et il faut bien remarquer que les deux images *a* et *a'* se verront à la fois si le tube interposé entre O et A' ne cache pas tout le miroir

sphérique. — La mire se verra toujours aussi, et, par suite, toutes les observations pourront se faire.

Le calcul de la déviation A O*a* ne présente aucune difficulté, une fois qu'on se donne la vitesse de rotation du miroir, celle de la lumière, et le rayon OA' du miroir sphérique. Or, dans les expériences de M. Foucault, OA' était égal à 2 mètres, et le miroir faisait 800 tours à la seconde.

Dans l'air, la lumière, pour parcourir 4 mètres, met un temps égal à $1'' \frac{4}{80\,000 \times 4\,000} = 1'' \frac{1}{80\,000 \times 1\,000}$; le miroir par seconde parcourt un nombre de minutes égal à

$$800 \times 360 \times 60 = 800 \times 21\,600,$$

et l'image de A en parcourt le double, soit :

$$1\,600 \times 21\,600 = 34\,560\,000.$$

Ainsi pendant le double parcours de OA', le miroir décrit un nombre de minutes égal à $\frac{17\,280\,000}{80\,000\,000} = \frac{1\,728}{8\,000}$, ou bien 0',216; l'image en parcourt le double, c'est-à-dire 0',432, soit $\frac{1}{2}$ minute. Cette fraction angulaire se traduit par un dépla-

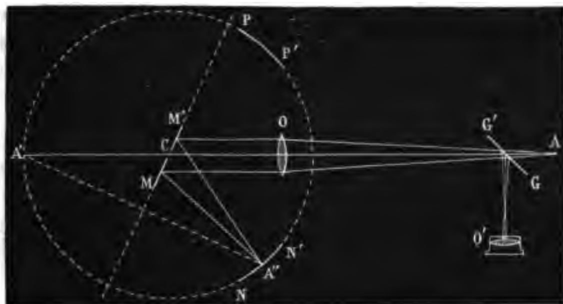


Fig. 690.

cement voisin de $\frac{1}{3}$ de millimètre, dans le cas où la distance OA est de 2 mètres; et tel est, en effet, l'ordre de grandeur des effets observés par M. Foucault. Pour l'image transmise à travers

l'eau, la déviation est à peu près les $\frac{4}{3}$ de la précédente. De pareilles grandeurs se mesurent avec sûreté. Ainsi, pas d'erreur possible sur la réalité de la solution fournie par les expériences dont nous venons d'indiquer le principe.

Dans les expériences de M. Foucault, la mire est une ligne tracée au diamant sur une lame de verre A (fig. 690). Les rayons partis d'un point quelconque A de cette mire, traversent une glace GG', inclinée à 45°, et tombent sur un objectif O qui tend à la faire converger en un point A'. Ces rayons rencontrent sur leur route le miroir MM' auquel peut être donné le mouvement de rotation. Pour la position MM' du miroir, les rayons sont renvoyés au point A'' symétrique de A' par rapport à MM'.

En ce point A'' ils rencontrent un miroir sphérique ayant son centre en C'; ils sont réfléchis en échangeant leurs routes, de telle sorte que le rayon qui vient suivant MA'', retourne suivant A''M' au moins très-sensiblement. Dans tous les cas, après nouvelle réflexion sur MM', le faisceau paraît revenir de A', et traversant de nouveau la lentille et la lame, il arrive finalement au point A d'où il était parti; seulement la réflexion sur GG' en rejette une partie vers l'oculaire, et là, on peut, à l'aide d'un réticule, fixer la position qu'il occupe avant la rotation du miroir ou pendant son mouvement.

Un autre miroir sphérique identique à NN' était placé en une position PP' symétrique de NN', par rapport à la ligne AC. Le tube à liquide était placé dans la direction CA'', et quant à la rotation du miroir, on l'obtenait en fixant celui-ci sur l'axe d'une turbine à vapeur. Cette turbine ressemble presque de tous points à une sirène, et la valeur du son qu'elle rendait, faisait connaître la vitesse de rotation de l'axe.

Recherches de MM. Fizeau et Breguet. — Le jour où M. Foucault communiquait les résultats de ses expériences, MM. Fizeau et Breguet faisaient connaître le plan d'un appareil analogue à celui de M. Foucault, et avec lequel ils ont fait postérieurement des déterminations dont les résultats se sont accordés avec ceux que nous venons de faire connaître.

Influence du mouvement des milieux sur la translation de la lumière. Recherches de M. Fizeau. — Depuis cette époque, M. Fizeau a cherché si la rapidité avec laquelle la lumière traverse un corps transparent dépend ou non de l'état de mouvement ou de repos dans lequel ce corps se trouve.

Que l'on se rappelle l'appareil avec lequel Arago voulait étudier le déplacement des franges; que l'on suppose les deux tubes

pleins d'eau en repos, et le fil de l'oculaire sur la frange centrale.

Si l'on avait un moyen d'imprimer à l'eau de l'un des tubes un mouvement de translation rapide, on pourrait, en observant pendant ce mouvement la frange centrale, voir si elle est ou non déplacée, et juger par là si la vitesse de propagation d'un des deux rayons a éprouvé quelque modification.

Voici une idée générale de la disposition à l'aide de laquelle M. Fizeau a pu réaliser une semblable recherche.

AB A'B' (fig. 691) sont deux tubes de cuivre bien droits, d'environ 1m50 de long. Ils sont fermés par des glaces parallèles, et communiquent entre eux par les extrémités A et A'; de plus, deux robinets placés en B et B' peuvent, en ces points, établir la communication du système avec l'extérieur.

En DED', un diaphragme percé de deux fentes dont les milieux sont distants l'un de l'autre d'environ un centimètre; en O et O', deux lunettes disposées en regard l'une de l'autre comme dans l'expérience de Suresnes; leurs axes coïncident entre eux et avec la cloison du système de tubes AB A'B'.

La lumière solaire reçue latéralement sur un héliostat est concentrée par une lentille cylindrique qui ferait son foyer en F', le faisceau est brisé par une glace M' et rejeté vers l'objectif O; transformé en faisceau parallèle, il tombe sur l'écran diaphragmé DE et se divise en 2 pinceaux; l'un suit la route ZZ'Z"X'X et revient finalement en F, l'autre revient aussi au même point, mais après avoir suivi la route inverse XX'Z"Z'Z.



Fig. 691.

CC' est une sorte de compensateur qui, par un effet de rejet latéral, rapproche un peu au retour les rayons qui doivent interférer en F. Les deux tubes étant pleins d'eau au repos, on observe en F la position de la frange centrale sur un micromètre divisé, puis on fait couler l'eau dans le système des deux tubes,

en lui donnant une vitesse d'environ 7 mètres à la seconde. Si l'eau entre par B, il est évident que dans chacun des deux tubes elle se meut dans le même sens que le rayon ZZ'Z"X'X... et en sens inverse de l'autre. En ces circonstances, la frange centrale se déplace et elle le fait comme si le rayon ZZ'Z"... avait éprouvé une accélération; le déplacement de la frange fut d'environ $\frac{1}{4}$ de frange.

CHAPITRE XVII

EXPLICATION DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION DANS LA THÉORIE DES ONDULATIONS.

Nous avons montré en acoustique comment, dans les conditions ordinaires de la propagation des ondes sonores, il se fait que le mouvement ne revient pas en arrière. Dans l'étude des phénomènes de diffraction nous avons expliqué pourquoi, lorsqu'un faisceau lumineux cylindrique se propage dans un milieu homogène M, il n'y a pas de diffusion latérale. Lorsque le faisceau dont il s'agit ABCD rencontre en CD (fig. 692) un autre milieu M' séparé

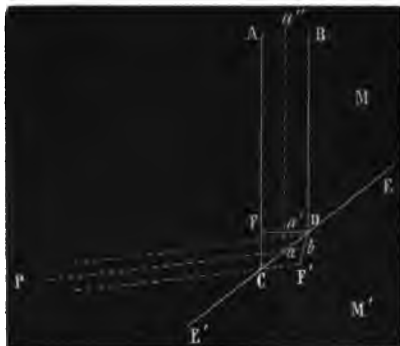


Fig. 692.

du premier par une surface plane EE', les conditions de la propagation étant changées, le faisceau ABCD ne peut plus continuer à se

propager, comme il le ferait s'il y avait identité entre le milieu M' et le milieu M, et d'après ce que l'on a vu en acoustique on doit s'attendre à voir une portion du mouvement apporté en CD par le faiseau incident se propager dans le milieu M', et une autre rester dans le milieu M et s'y propager à nouveau en partant des différents points de CD considérés comme centres d'ébranlements. Soit DF perpendiculaire sur AC. Si le faisceau ABCD vient d'une source très-éloignée, les vibrations qu'il apporte en tous les points de DF ont même phase, au même instant. Par suite, il est naturel d'admettre qu'au même instant les vibrations renvoyées dans le milieu M par les molécules d'éther, situées sur la surface de séparation CD, auront entre elles à leur point de départ des différences de phases proportionnelles aux différences des distances de ces molécules à la ligne FD. Entre le mouvement en C et le mouvement en D la différence de phase sera $2\pi \frac{CF}{\lambda}$.

Ceci posé, considérons une molécule d'éther P située dans le milieu M à une distance de CD assez grande pour que PD et PC soient sensiblement parallèles; prolongeons PC d'une longueur CF' = CF, la droite PCF' sera égale à la ligne brisée PCF. Joignons DF', et soit menée une ligne Pab en un point quelconque b de DF'; enfin menons par a une ligne $aa'a''$ parallèle à CA. Puisque PF', Pb, PD sont sensiblement parallèles, on aura $\frac{ab}{CF'} = \frac{Da}{CD} = \frac{aa'}{CF}$ et comme CF = CF', on en conclut $aa' = ab$.

Le mouvement que P reçoit à un instant donné de toutes les vibrations excitées le long de CD, est donc identique à celui qui lui serait donné par une série de vibrations existant avec même phase au même instant physique en tous les points de DF', dans l'hypothèse toutefois où la propagation se ferait dans le milieu M' avec la même vitesse que dans l'autre. Rien ne détermine d'ailleurs jusqu'ici l'intensité de ces mouvements vibratoires concordants qui remplaceraient, dans leur action sur le point P, celle des molécules d'éther réellement ébranlées en CD par les ondes incidentes; rien ne détermine non plus le rapport qui existe entre leur phase commune et celle des vibrations concordantes qui ont lieu en FD.

De cette manière d'envisager le phénomène, et de ce que nous avons vu au chapitre précédent, il résulte qu'il n'y aura pas de mouvement réellement transmis en P, si la perpendiculaire, abaissée de P sur la direction de DF', tombe en dehors de cette ligne à une distance appréciable de D ou de F'. La condition du

maximum est que cette perpendiculaire tombe au milieu de DF'. Dans ce cas, les triangles *aa'*D, *ab*D sont égaux ; P*a* et *aa'* sont également inclinés sur EE', et le point P se trouve, par rapport au plan EE' et au faisceau incident, dans la direction de la réflexion régulière.

La loi fondamentale de la réflexion se présente donc comme une conséquence des principes généraux du système des ondulations. Il en est de même de la loi de Descartes touchant la réfraction simple.

Tandis que dans le milieu M (fig. 693) le mouvement vibratoire se propage de F en C, dans l'autre il décrit un chemin différent et s'étend du point D jusqu'à la surface d'une sphère dont le rayon DR est égal à $CF \times \frac{v'}{v}$ v', et v étant les vitesses de propagation dans les deux milieux.

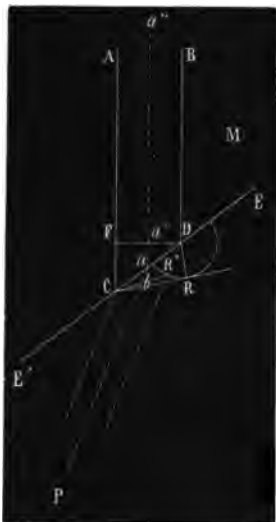


Fig. 693.

Considérons toujours dans le second milieu un point P assez éloigné pour que PC et PD soient sensiblement parallèles; soit R' le point où PD coupe la circonférence décrite du centre D avec le rayon $CF \frac{v'}{v} = DR$, et joignons CR'. Si nous menons du point P une droite P*ba* à un point quelconque de CD, et si par *a* nous menons dans le premier milieu une ligne *aa'a''* parallèle à CA, *ab* sera parcouru dans le second milieu en un temps égal à celui que, dans le premier milieu, le mouvement met à parcourir un chemin égal à CF — *aa'*. Le mouvement en P peut donc être considéré comme la résultante d'une série de mouvements, existant à une même époque avec la même phase en tous les points de CR'. Pour que ce mouvement ne soit pas nul, il faut donc que les droites PC, P*b*, PR' soient perpendiculaires sur CR', en d'autres termes, P doit être sur le prolongement du rayon CR mené au point de contact du cercle de la figure avec la tangente menée du point C à ce cercle. — Il en résulte que P doit être par rapport à CD et au faisceau incident dans la direction assignée par la

loi de Descartes. En effet, dire que l'on a $DR = CF \times \frac{v'}{v}$, c'est dire que $\frac{DR}{CF}$, et par suite $\frac{sin\ DCR}{sin\ FDC}$, ne dépendent pas de l'angle d'incidence; c'est dire, en outre, que le rapport $\frac{v}{v'}$ est égal à celui des *sinus* des angles que font avec la normale la direction du rayon incident et celle dans laquelle la lumière se propage dans le deuxième milieu.

C'est donc en réalité dans la direction indiquée par la loi de Descartes qu'il y aura lumière dans le second milieu.

Le rapport des longueurs d'onde $L_r L_r'$ d'un même rayon dans deux milieux différents est égal à celui des vitesses V_r et V_r' de propagation du rayon considéré dans les deux milieux. Nous venons de voir qu'il est aussi égal à l'indice de la réfraction que le rayon éprouve en passant du premier milieu dans le second. Donc puisque l'indice change avec la couleur, on peut en conclure que le rapport des vitesses de propagation d'un même rayon dans deux milieux différents dépend de la nature de ce rayon, c'est-à-dire du nombre de vibrations qu'il exécute dans l'unité de temps. Ainsi les rapports

$$\frac{V_r}{V'_r} \qquad \frac{V_j}{V'_j} \qquad \frac{V_b}{V'_b}$$

changent avec les indices *r, j, b*.

Si donc il était possible que dans un milieu déterminé on eût

$$V_r = V_j = V_b.$$

cette égalité ne saurait être qu'un accident et non pas une loi générale.

En acoustique, on a vu que dans les différents milieux les sons de valeurs différentes se propagent également vite.

Remarques. — Dans ce qui précède, nous avons supposé parfaitement polie la surface de séparation des deux milieux. Nous reviendrons plus tard sur le cas très-important ou cette surface serait mate ou dépolie; et nous verrons alors comment la réflexion ou la réfraction régulière se changent en dissémination ou diffusion. Nous avons aussi supposé que les surfaces réfléchissantes ou réfringentes ont toutes leurs dimensions suffisamment grandes. Si l'une d'elles devenait très-petite, on se trouverait dans le cas des phénomènes de diffraction.

CHAPITRE XVIII.

DOUBLE RÉFRACTION.

§ 1. — DÉFINITIONS. LOIS FONDAMENTALES DE LA DOUBLE RÉFRACTION UNIAXIALE.

Définition du phénomène. — Les lois de réfraction que nous avons fait connaître au troisième chapitre de l'optique ne sont applicables que si le milieu transparent dans lequel pénètrent les rayons est homogène et amorphe comme le verre et les liquides, ou s'il est cristallisé dans le système cubique comme le sel gemme.

Dans les autres cas, le phénomène de la réfraction se complique, et le plus souvent à un rayon incident unique correspondent deux rayons réfractés distincts.

Bartholin le premier a observé ces effets en étudiant la transmission de la lumière à travers le spath d'Islande. Un cristal de cette espèce, lorsqu'il a ses faces de clivage assez transparentes, fait voir doubles les lettres, les lignes, sur lesquelles on le place, et s'il reçoit un mince rayon solaire, il le bifurque, même quand l'incidence est normale.

Huyghens a reconnu une action analogue dans le cristal de roche, et depuis on l'a observée dans tous les cristaux transparents qui n'appartiennent pas au système cubique. Mais ces cristaux, au point de vue de leur action birefringente, se divisent en deux groupes distincts.

Cristaux à un axe et à deux axes. — Pour les cristaux du système rhomboédrique et du système prismatique droit à base carrée, l'un des rayons réfractés suit toujours les lois ordinaires : il reste dans le plan d'incidence, et sa direction dans ce plan est déterminée par la règle que Descartes a formulée. Ce rayon est désigné sous le nom de *rayon ordinaire*. L'autre est dit *extraordinaire*. Il sort en général du plan d'incidence, et la loi du sinus ne lui est plus applicable.

Dans les cristaux des trois derniers systèmes, il n'y a plus de réfraction ordinaire.

Ce chapitre sera consacré à faire connaître les principales lois

de la marche de la lumière réfractée dans les cristaux biréfringents du premier groupe.

Spath d'Islande. Quartz. — Le spath d'Islande et le quartz appartiennent à ce groupe, et la beauté des échantillons rend les observations faciles.

Ces cristaux et en général ceux du groupe qu'ils caractérisent ont une forme primitive symétrique par rapport à un axe. Dans le rhomboèdre de spath, l'axe est la droite sur laquelle s'inclinent également les trois angles plans de 120° qui se réunissent pour former l'un des sommets du cristal. Dans le quartz, l'axe est parallèle aux faces des prismes sous la forme desquels se présente ordinairement cette substance.

D'après la symétrie que la forme type de chacun de ces systèmes affecte par rapport à l'axe que nous venons de définir, on est porté à chercher si cette direction ne présenterait pas quelque particularité au point de vue de la réfraction. Et en effet, on peut s'assurer facilement que tout rayon tombant normalement sur une face perpendiculaire à l'axe, traverse le cristal sans se dédoubler et reste simple à la sortie, même quand la face d'emergence est oblique à l'axe.

Pour faire l'expérience, on peut prendre un prisme de spath taillé de telle sorte qu'une de ses faces, AB (fig. 694) par exemple, soit perpendiculaire à l'axe, et faire tomber sur cette face un pinceau de rayons venus du soleil ou d'une lampe élec-

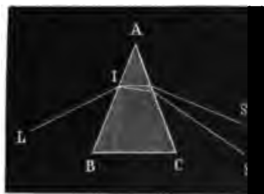


Fig. 694.

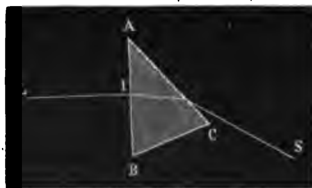


Fig. 695.

trique. Tant que l'incidence sera oblique, on obtiendra deux spectres S et S'. Mais si en tournant le prisme on amène AB (fig. 695) à être perpendiculaire à LI, on verra les deux spectres se rapprocher, et se confondre lorsque l'angle LIB sera droit.

Indice ordinaire et indice extraordinaire. — Quand les faces AB et AC sont obliques à l'axe, on obtient toujours deux spectres, et si, avec des prismes de ce genre, on cherche à déterminer pour chacun des rayons le rapport des angles d'incidence et de

réfraction, on voit que pour l'un d'eux seulement cette recherche conduit à des résultats semblables à ceux que nous avons indiqués chap. III et IX. Pour ce rayon, qui suit les lois ordinaires, l'indice est 1,654295 dans le cas du spath, et 1,547897 dans celui du quartz.

Il est pourtant une circonstance dans laquelle les deux rayons obéissent tous deux aux lois ordinaires : ce cas est celui où l'axe du cristal étant parallèle à l'arête réfringente, le rayon incident est compris dans un plan perpendiculaire à cette arête.

Dans ce cas, le rapport des sinus d'incidence et de réfraction est constant pour chacun des deux rayons. Avec le spath, on trouve pour l'un des rayons 1,654295, et pour l'autre 1,4833015; avec le quartz, 1,547897 et 1,557106.

1,4833015 et 1,557106 sont ce qu'on appelle les *indices extraordinaires* des deux substances auxquelles ils se rapportent; on voit que dans le spath l'indice ordinaire est plus grand que l'autre : c'est le contraire dans le quartz.

Construction de Huyghens. — Par une série de déterminations numériques, de raisonnements et d'inductions qu'il développe dans son *Traité de la lumière,* Huyghens a été conduit à découvrir la loi générale qui, dans le cas des cristaux biréfringents à un axe, détermine dans tous les cas possibles la position des rayons réfractés extraordinairement. Cette loi s'exprime par une construction géométrique qui donne aussi la direction du rayon ordinaire. Avant de la développer dans toute sa généralité, nous indiquerons d'abord les cas particuliers dont l'étude a servi de point de départ à Huyghens.

Fig. 696.

Soit (fig. 696) MM' l'intersection du plan d'incidence par la sur-

face plane et polie d'un milieu réfringent homogène et BO la direction suivant laquelle tombent sur MM' des rayons venus d'un point lumineux très-éloigné O. Si dans le plan d'incidence, on mène par le point B une droite BC perpendiculaire à BO, elle représentera l'onde incidente à l'époque T où elle rencontre en B la surface réfringente. Sur tous les points de BC les molécules d'éther accomplissent des vibrations de même phase. Le mouvement imprimé alors à la molécule B du milieu inférieur se propage sphériquement dans ce milieu, et les chemins BE, BE'... qu'il parcourt en différentes directions dans un temps θ sont égaux au produit θ par la vitesse v' de propagation dans le milieu inférieur. Soit v la vitesse de propagation dans le milieu supérieur, et admettons que θ soit le temps que met à arriver en A la vibration qui existait en D à l'époque T, on aura $AD = v\theta$, $BE = v'\theta$; d'où

$$\frac{BE}{AD} = \frac{1}{l},$$

si l'on appelle l l'indice de réfraction du milieu inférieur par rapport au premier, ou simplement

$$BE = \frac{1}{l},$$

si l'on suppose $AD = 1$, ce qui est toujours permis.

A l'époque T, toutes les vibrations qui ont lieu sur BC sont concordantes entre elles. Elles arrivent successivement aux différents points de BA; et les ondes, qui se trouvent ainsi excitées par elles dans le deuxième milieu, sont à l'époque $T + \theta$ toutes tangentes au plan mené par AF, perpendiculairement au plan d'incidence. Soit en effet $T + \theta'$ l'instant où l'onde incidente arrive en A'; soit A'D' parallèle à AD, et A'E' perpendiculaire sur AE. Pour que l'onde excitée en A' à l'époque $T + \theta'$ arrive en E' à l'époque $T + \theta$, il faut que A'E' soit parcouru dans un temps égal à $\theta - \theta'$. Or cette condition est satisfaite. En effet, on a d'abord $\frac{A'E'}{BE} = \frac{AA'}{AB}$, ou comme $BE = v'\theta$, $A'E' = \frac{AA'}{AB}\, v'\theta$. D'autre part, on a $\frac{BA}{BA'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{\theta}{\theta'}$, et par suite $\frac{AA'}{AB} = \frac{\theta - \theta'}{\theta}$. Donc $A'E' = \frac{\theta - \theta}{\theta} \times v'\theta = (\theta - \theta')\, v'$.

Tout le long de AE les vibrations sont concordantes, parce que, s'il y a un changement de phase au passage du premier milieu dans le second, ce changement est le même tout le long

de AB. Huyghens admit dès lors que AE représentait la surface de l'onde réfractée, et admettant en outre que le rayon est perpendiculaire à cette surface, il posa en principe que, pour trouver la direction du rayon réfracté qui correspond à un rayon incident OB, il faut élever par le point B une perpendiculaire BD à BO ; prendre sur BO une ligne BI égale à l'unité, mener ID parallèle à MM', et DA parallèle à BI ; du centre B, avec un rayon égal à $\frac{1}{l}$, décrire une circonférence, et par le point A mener, dans l'intérieur du milieu inférieur, une tangente à cette circonférence. Soit E le point de contact, BE sera la direction du rayon réfracté.

Ajoutons que d'après cette construction on a évidemment

$$\frac{\sin \mathrm{ABD}}{\sin \mathrm{ABE}} = \frac{v}{v'} = l;$$

or ABD et ABE sont les angles que font les directions OB et BE avec la perpendiculaire à MM' passant par le point B.

La construction que nous venons de faire connaître est la représentation graphique de la loi de la réfraction simple.

Lorsqu'on fait tomber un rayon naturel sur un prisme de spath dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe de double réfraction, si le plan d'incidence est perpendiculaire à cette arête, les deux rayons réfractés restent dans le plan d'incidence. Tous deux suivent la loi de Descartes ; seulement les indices de réfraction des deux rayons ont des valeurs différentes l et l'. Donc, pour avoir dans

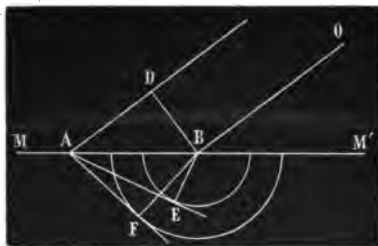


Fig. 697.

ce cas leurs positions, il faudra du point d'incidence B (fig. 697), comme centre, avec des rayons $\frac{1}{l}$ et $\frac{1}{l'}$, décrire deux circonférences, et, après avoir déterminé le point A comme nous l'avons

indiqué, mener une tangente à chacune de ces circonférences. Les droites qui joindront les points de contact au centre seront les directions des deux rayons réfractés.

Lorsque le plan d'incidence contient l'axe de double réfraction, les deux rayons réfractés restent encore dans ce plan, mais l'un d'eux, le rayon extraordinaire, ne suit plus la loi de Descartes. Huyghens s'est assuré que, pour définir géométriquement sa position, il faut, par le point d'incidence B, mener dans le plan d'incidence une parallèle à l'axe de double réfraction, et une perpendiculaire à cet axe, prendre, à partir du point B, sur la première de ces lignes une longueur $\frac{1}{l}$, et une longueur $\frac{1}{l'}$ sur la deuxième; construire une ellipse ayant $\frac{1}{l}$ et $\frac{1}{l'}$ pour demi-axes, et, après avoir déterminé le point A comme précédemment, mener par ce point une tangente à l'ellipse : la droite BI qui joint le centre B au point de contact est la direction du rayon extraordinaire; rien de changé du reste à la règle qui définit la direction du rayon ordinaire.

Enfin dans le cas général où le plan d'incidence est orienté d'une façon quelconque par rapport à l'axe, on opère de la manière suivante.

Soit SA un rayon incident (fig. 698); par le point A, on mène

Fig. 698.

parallèlement à l'axe une ligne AL égale à $\frac{1}{l}$, l étant l'indice du rayon ordinaire. On prolonge AL d'une quantité AL′ égale à AL, et sur LL′, prise comme axe de révolution, on décrit d'abord une sphère de rayon $\frac{1}{l}$, puis un ellipsoïde de révolution ayant

pour diamètre de son équateur une longueur CC′ égale à $2 \times \frac{1}{l'}$ l' étant l'indice extraordinaire de la substance.

Puis, conformément aux règles suivies dans les constructions précédentes, on mène dans le plan d'incidence AE perpendiculairement à AS. On prend AD = 1, et par le point D on mène une droite parallèle à la trace AM, du plan d'incidence sur la face du cristal. Par le point G, où cette droite rencontre AE, on mène GK parallèle à AD, et au point K une perpendiculaire au plan d'incidence.

Ceci fait, on mène par cette perpendiculaire deux plans tangents, l'un à la sphère en N, l'autre à l'ellipsoïde en O, et les droites AN et AO représentent l'une le rayon ordinaire, l'autre le rayon extraordinaire qui répondent au rayon incident SA.

Vérifications expérimentales des règles de Huyghens. — Pour vérifier l'exactitude des règles de Huyghens, il faut pouvoir suivre commodément dans l'intérieur d'un cristal la marche des deux rayons réfractés qui répondent à un rayon incident unique. On peut arriver à ce but par plusieurs procédés différents. Nous décrirons d'abord celui que Malus employait.

Malus traçait sur un carton blanc un triangle *abc* (fig. 699),

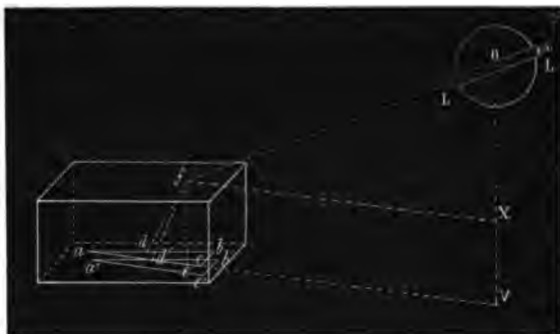


Fig. 699.

rectangle en *b*, ayant en *a* un angle très-aigu et dont l'hypoténuse ainsi que le grand côté *ab* étaient divisés en parties égales. Au-dessus du carton et à une distance convenable, il installait un limbe vertical muni d'une lunette et dont le plan contînt l'hypoténuse *ab* du triangle. Il mesurait exactement la distance du point *a* au pied de la verticale OV, puis sur le triangle il posait un spath à

faces parallèles. Nous les supposerons horizontales. Par l'action du spath, l'image du triangle paraissait dédoublée, et l'œil placé à la lunette en L' voyait un point déterminé *d* de l'image extraordinaire du côté *ab* coïncider avec un autre point également déterminé de l'image ordinaire de l'hypoténuse *ac*. Soit *d'* ce dernier point. Soit enfin *f* le point où la ligne L'OL vient percer la face supérieure du cristal, et *e* sa projection sur la base inférieure du cristal.

df et *d'f* sont les rayons ordinaires et extraordinaires qui répondent au rayon incident *of*. Or, on a tous les éléments nécessaires pour résoudre le trièdre *dd'fe*. On connaît *f*X, V*a* et *ad'*, donc on connaît *d'e* et tous les éléments du triangle *d'ef*. On connaît de même tous les éléments du triangle *dd'e*. Dans le triangle rectangle *ed'f* on connaît *d'e* et *fe*. On en déduit *df*. Les trois côtés de *dd'f* sont donc connus, et par suite ce triangle lui-même tout entier[1].

M. Billet a montré (*Traité d'optique physique*, t. I, p. 311) comment le réfractomètre de M. F. Bernard peut être appliqué à l'étude de la double réfraction, et il cite l'accord remarquable que des mesures exécutées par M. Bernard ont présenté avec la théorie. Nous renvoyons sur ce point au traité de M. Billet, et nous terminons ce qui est relatif à la détermination expérimentale des positions relatives des rayons en décrivant un procédé qui se traduit très-facilement en expériences de projection.

Avant que nous n'eussions fait connaître l'emploi que l'on peut tirer de la machine à diviser dans la mesure des anneaux colorés, M. Babinet avait proposé de tracer une fine division sur la glace qui termine inférieurement la lame mince dans laquelle le phénomène se développe. On voit alors en même temps et les anneaux et la division qui les mesure à l'endroit même où ils se forment.

Depuis assez longtemps j'emploie un procédé analogue dans les expériences de double réfraction. Le cristal est toujours à faces parallèles. Il peut tourner dans une bague dont l'axe est horizontal, et qui se trouve portée par une alidade horizontale elle-même. Cette alidade pivote autour d'une verticale contenue dans le plan de la face antérieure du cristal. Sur la face de sortie j'applique un micromètre ordinaire ou quadrillé, en prenant soin que les divisions touchent le cristal. Enfin, je fais en sorte que l'image réelle d'un réticule placé à une distance un peu grande d'un objectif de lunette vienne se former sur le micromètre lui-même. L'image se dédouble par l'action du cristal, et l'on mesure

1. Le triangle *a'b'c'* n'a aucun rapport avec la discussion du procédé de Malus Seulement l'ensemble de ce triangle et du triangle *abc* donne une idée des apparences que l'on observe quand on place un spath sur une figure quelconque.

immédiatement les distances qui définissent les positions relatives des deux rayons réfractés et du rayon incident.

Si maintenant à l'aide d'une lentille grossissante on forme sur un tableau l'image amplifiée de la division micrométrique, on y voit en même temps se projeter les deux images du réticule avec l'indication exacte de leurs positions relatives.

§ 2. — DÉVELOPPEMENT DE QUELQUES CONSÉQUENCES DE LA LOI DE HUYGHENS.

Recherches de M. P. Desains. — Depuis plusieurs années j'ai publié, dans le cours de la Faculté des sciences, une série d'expériences qui offrent une vérification d'ensemble de la loi de Huyghens : je ne crois pas inutile de les décrire et de les discuter ici avec quelques détails.

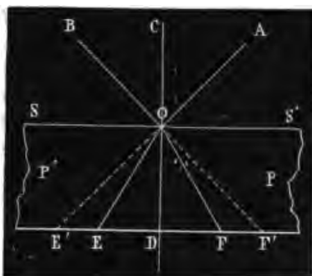


Fig. 700.

On fait tomber sur une lame de spath à faces parallèles PP' (fig. 700) une nappe de rayons lumineux ayant la forme d'une surface conique droite à base circulaire BOA. L'axe CO de cette surface est perpendiculaire à la face d'incidence, et son sommet O est sur cette face.

Sous l'action du cristal, la nappe lumineuse se dédouble en deux autres. L'une, EOF, formée par les rayons ordinaires, est encore une surface conique droite qui coupe la face de sortie, suivant un cercle dont le centre est sur l'axe du cône incident; le rayon de ce cercle est le produit de l'épaisseur du cristal par la tangente de l'angle de réfraction ordinaire EOD, qui correspond à l'angle d'incidence commun à toutes les génératrices du cône incident.

La nappe lumineuse formée par les rayons extraordinaires coupe la face de sortie, suivant une courbe elliptique dont les dimensions et la position peuvent se calculer d'après la règle de Huyghens.

On peut calculer de même la forme et la grandeur des sections que l'on obtient en coupant par un écran les deux nappes lumineuses émergentes, et l'expérience confirme de tous points les résultats de ces calculs.

Pour obtenir commodément la réalisation physique des sections dont il s'agit, on reçoit les nappes émergentes sur une lentille

suffisamment large, et dont l'axe coïncide avec celui du cône incident.

La lentille forme alors sur un écran blanc, situé à une distance p de son centre optique o, une image de la section faite dans les nappes lumineuses réelles ou virtuelles, par un plan distant du point o d'une quantité p' donnée par l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}$, a étant la distance focale principale de la lentille.

Les courbes ainsi produites sont très-lumineuses : il est facile de leur donner en projection plus d'un mètre de diamètre, et l'on peut aussi en prendre des épreuves photographiées. Les planches ci-jointes sont la reproduction d'épreuves de ce genre.



Fig. 701.

La fig. 701 représente le phénomène tel qu'on l'observe quand les faces du cristal sont perpendiculaires à l'axe de double ré-

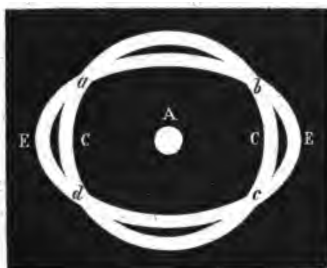


Fig. 702.

fraction. Les deux courbes sont circulaires, et il est évident, *à priori*, qu'il en doit être ainsi.

La fig. 702 est relative au cas où la face d'incidence est parallèle à l'axe de double réfraction. La fig. 703 se rapporte au cas plus général où la face d'entrée est orientée d'une façon quelconque par rapport à l'axe.

Discussion. — La discussion de ces trois cas distincts se fait sans difficulté. Dans le premier, les deux courbes de section sont des cercles concentriques ; mais, suivant la position de la lentille, le cercle formé par les rayons ordinaires peut être extérieur à l'autre ou bien lui être intérieur. Sur la face de sortie, et à toute distance au delà de cette face, la nappe ordinaire est intérieure à

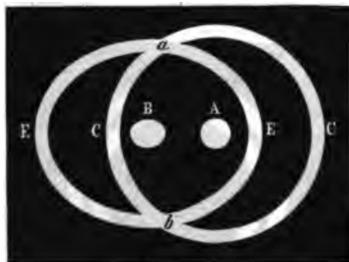


Fig. 703.

l'autre. Mais si l'on prolonge la direction des rayons émergents de l'autre côté du cristal, c'est précisément l'inverse qui a lieu. C'est le prolongement de la nappe ordinaire qui recouvre l'autre.

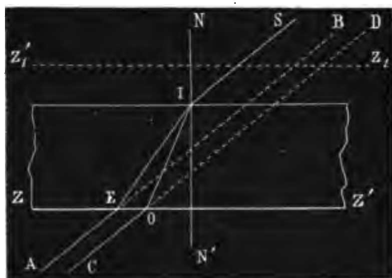


Fig. 704.

Cette sorte d'inversion tient à ce que les deux rayons émergents EA et OC (fig. 704) sont parallèles au rayon incident SI,

et à ce que le point P, où OC prolongé rencontre NN', est au-dessous du point Q, où AEB rencontre cette même ligne.

Quand la lentille sera placée de façon à faire sur le tableau l'image d'une section telle que $Z_1'Z_1$, le cercle extraordinaire sera enveloppé par l'autre. Ce serait l'inverse si le plan conjugué du tableau par rapport à la lentille était situé de même côté de ZZ' que cette lentille.

Deuxième cas. Dans le deuxième cas, les faces du cristal sont parallèles à l'axe de double réfraction. Soit c l'épaisseur de la lame; prenons pour axe des x une parallèle à l'axe de double réfraction menée par le point d'incidence.

L'ellipsoïde de Huyghens est alors de révolution autour de l'axe des x, et par suite son équation peut être mise sous la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A'z^2 - 1 = 0.$$

Il est coupé par le plan xy, suivant l'ellipse $aa'bb'$ (fig. 705);

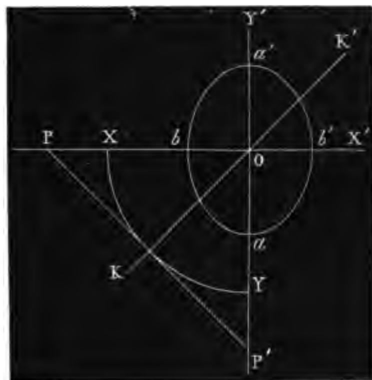


Fig. 705.

la longueur du demi-axe Ob est donnée par la relation $x^2 = \dfrac{1}{A}$, celle du demi-axe Oa par l'équation $y^2 = \dfrac{1}{A'}$.

D'autre part, d'après la règle de Huyghens, si l'on appelle l et l' l'indice ordinaire et l'indice extraordinaire du spath, les valeurs de ces demi-axes doivent être respectivement $\dfrac{1}{l}$ et $\dfrac{1}{l'}$.

Donc

$$A = l^2 \quad \text{et} \quad A' = l'^2.$$

Recherche de la courbe de sortie. — Soit maintenant un plan d'incidence quelconque dont la trace sur celui des XY soit K'K. Pour avoir la direction du rayon extraordinaire qui répond au rayon incident contenu dans ce plan, il faut prendre sur OK une longueur $OK = R = \frac{1}{\sin\varphi}$, φ étant l'angle d'incidence. Par le point K mener une perpendiculaire PP' à OK dans le plan XOY, et par cette droite un plan tangent à l'ellipsoïde. Enfin, joindre le centre O au point de contact Q.

La droite PP' est une tangente au cercle dont le rayon est $\frac{1}{\sin\varphi} = R$. Soient x_1 et y_1 les coordonnées de K, l'équation de PP' sera

$$x_1 x + y_1 y = R^2,$$

et l'on aura

$$OP = \frac{R^2}{x_1}, \qquad OP' = \frac{R^2}{y_1}.$$

Soient $x'y'z'$ les coordonnées du point de contact Q.

Le plan tangent à l'ellipsoïde en Q a pour équation

$$Axx' + A'yy' + A'zz' - 1 = 0.$$

Ce plan doit couper les axes en P et P'. Donc on doit avoir

$$OP = \frac{1}{Ax'}, \qquad OP' = \frac{1}{A'y'},$$

et par suite

$$(a) \qquad \frac{R^2}{x_1} = \frac{1}{Ax'}, \qquad \frac{R^2}{y_1} = \frac{1}{A'y'},$$

d'où l'on conclut déjà la relation importante

$$(b) \qquad R^4(A^2x'^2 + A'^2y'^2) = R^2.$$

Soient maintenant x'_1, y'_1 et c les coordonnées du point où la droite OQ perce le plan de la deuxième face du cristal. On a évidemment

$$(c) \qquad \frac{x_1'}{x'} = \frac{c}{z'}, \qquad \frac{y_1'}{y'} = \frac{c}{z'},$$

d'où

$$x' = \frac{x_1'z'}{c}, \qquad y' = \frac{y_1'z'}{c}.$$

Portons ces valeurs de x' et y' dans l'équation de l'ellipsoïde, ainsi que dans la relation (b), et il viendra

$$\frac{Ax_1'^2z'^2}{c^2} + \frac{A'y_1'^2z'^2}{c^2} + A'z'^2 = 1,$$

et

$$\frac{R^4A^2x_1'^2z'^2}{c^2} + \frac{R^4A'^2y_1'^2z'^2}{c^2} = R^2,$$

et par suite

$$\frac{Ax_1'^2}{c^2}(1 - R^2A) + \frac{A'y_1'^2}{c^2}(1 - R^2A') + A' = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe de sortie des rayons extraordinaires.

A et A' sont positifs, $1 - R^2A$, $1 - R^2A'$ sont négatifs; la courbe est une ellipse.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que les équations (a) et (c) établissent une relation très-simple, et connue depuis longtemps, entre les angles que font avec le plan ZOX, les plans qui contiennent la perpendiculaire à la face d'incidence, et l'un des deux rayons réfractés provenant d'un rayon incident unique. Soit en effet ω celui de ces angles qui se rapporte au rayon ordinaire, et ω' l'autre, on a $tang\,\omega = \frac{y_1}{x_1}$ et $tang\,\omega' = \frac{y'_1}{x'_1}$.

Or, des équations (a) on tire

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{A'y'}{Ax'}$$

De (c) on déduit

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{y'}{x'}$$

Donc

$$tg\,\omega = \frac{A'}{A}\,tg\,\omega'.$$

Etude des sections faites dans les nappes émergentes. — Les rayons ordinaires, à leur sortie, forment un cône droit ayant un demi-angle au sommet égal à φ; le sommet S de ce cône est sur l'axe OZ; et si l'on désigne par e l'épaisseur du cristal, et par φ' l'angle de réfraction correspondant à l'angle d'incidence φ, la distance de S à la face de sortie sera $\frac{e\,tang\,\varphi'}{tang\,\varphi}$. La courbe de sortie des rayons ordinaires est donc un cercle; dans ce qui va suivre, le rayon de ce cercle sera désigné par $\sqrt{\frac{1}{a_1}}$. (Voir p. 437.)

Quant aux rayons extraordinaires, ils forment une nappe lumineuse dont l'équation est plus compliquée; mais il est facile de voir qu'à une distance un peu considérable des faces du cristal les sections de cette nappe, par un plan parallèle à celui des XY, ne diffèrent pas sensiblement d'une ellipse, dont les axes tendent vers l'égalité à mesure que le plan de section s'éloigne de l'origne.

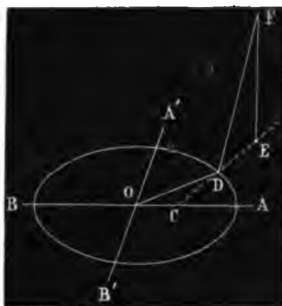


Fig. 706.

Pour le démontrer, supposons que l'ellipse de la figure 706 soit l'ellipse de sortie; admettons que les lignes OA et OA' soient respectivement parallèles aux axes des X et Y positifs, et que l'équation du plan qui contient l'ellipse, soit $z = e$.

Soient enfin X et Y les coordonnées du point F où le plan, dont l'équation est $z = h + e$, est percé par le rayon extraordinaire qui émerge au point D de l'ellipse de sortie, dont les coordonnées sont x'_1 et y'_1. Pour trouver X et Y, on raisonnera de la manière suivante. Le rayon émergent est parallèle à sa direction d'entrée; il fait donc un angle $(90° - \varphi)$ avec le plan de l'ellipse de sortie, et par suite la ligne FD qui joint les points $(x'_1\ y'_1)$, $(X\,Y)$ se projette sur ce plan suivant une droite DE de longueur $h\,tg\,\varphi = \lambda$. DE est parallèle à la ligne suivant laquelle les faces du cristal sont coupées par le plan passant par l'axe de la nappe incidente et le rayon incident que l'on considère. Soit toujours ω l'angle de ce plan avec ZOX. $h\,tg\,\varphi\cos\omega$ et $h\,tg\,\varphi\sin\omega$ sont les projections de λ sur les deux axes coordonnés, et l'on a

$$(d) \qquad X = x'_1 + \lambda\cos\omega, \qquad Y = y'_1 + \lambda\sin\omega.$$

Quant aux valeurs de y'_1 et x'_1, elles sont liées entre elles, et l'angle ω par la relation

$$\frac{y'_1}{x'_1} = tg\,\omega\,\frac{l^2}{l'^2}.$$

Soit maintenant $a_1(X_1^2 + Y_1^2) = 1$ l'équation du cercle de sortie des rayons ordinaires; et représentons, pour abréger, celle de l'ellipse de sortie des rayons extraordinaires par $ax_1'^2 + by_1'^2 = 1$; les valeurs de a et b étant définies respectivement par les

équations

$$\frac{A'}{A'c^2}(R^2A-1)=a \quad \text{et} \quad \frac{R^2A'-1}{c^2}=b;$$

posons $\frac{b}{a}=q$, et soit ω un angle quelconque. Les coordonnées X_1 et Y_1 du point du cercle pour lequel le rayon vecteur fait un angle ω avec l'axe des X sont respectivement données par les équations

$$a_1X_1^2(1+tg^2\omega)=1, \qquad a_1Y_1^2\left(1+\frac{1}{tg^2\omega}\right)=1.$$

Soit ω' un angle défini par la relation $tg\,\omega'=\frac{l^2}{l'^2}tg\,\omega$, et x_1' et y_1' les coordonnées du point de l'ellipse pour lequel le rayon vecteur mené du centre fait avec l'axe des X l'angle ω'; posons $\frac{l^2}{l'^2}=m$. x_1' et y_1' sont donnés par les équations

$$ax_1'^2(1+qm^2tg^2\omega)=1, \qquad by_1'^2\left(1+\frac{1}{qm^2tg^2\omega}\right)=1.$$

Des quatre équations précédentes on déduit :

$$\frac{x_1'}{X_1}=\sqrt{\frac{a_1}{a}\frac{(1+tg^2\omega)}{(1+qm^2tg^2\omega)}},$$

$$\frac{y_1'}{Y_1}=\sqrt{\frac{qm^2a_1}{b}\frac{(1+tg^2\omega)}{(1+qm^2tg^2\omega)}}.$$

Ceci posé, dans les équations (d) de la page 436 on remplacera les coordonnées de l'ellipse x'_1 et y'_1 par les valeurs X_1 et Y_1 tirées des deux équations précédentes; on remplacera $cos\,\omega$ par $X_1:\frac{1}{\sqrt{a_1}}$, et $sin\,\omega$ par $Y_1:\frac{1}{\sqrt{a_1}}$, et il viendra :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} X&=X_1\sqrt{a_1}\left(\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1+tg^2\omega}{1+qm^2tg^2\omega}}+\lambda\right),\\ Y&=Y_1\sqrt{a_1}\left(\sqrt{\frac{qm^2}{b}\frac{1+tg^2\omega}{1+qm^2tg^2\omega}}+\lambda\right).\end{aligned}\right.$$

Si qm^2 était rigoureusement égal à 1, les valeurs de X et Y deviendraient :

$$X = X_1\sqrt{a_1}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} + \lambda\right), \qquad Y = Y_1\sqrt{a_1}\left(\sqrt{\frac{1}{b}} + \lambda\right),$$

et, par suite, on aurait

$$(e) \qquad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{a}} + \lambda\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}} + \lambda\right)^2} = 1$$

ce qui est l'équation d'une ellipse dont les demi-axes ont respectivement pour longueurs :

$$\sqrt{\frac{1}{a}} + \lambda \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{1}{b}} + \lambda.$$

Dans les expériences que nous discutons, qm^2 est un peu inférieur à l'unité, mais il est voisin de cette valeur; par conséquent, dès l'instant que λ sera en valeur absolue égal à 2 ou 3 fois $\sqrt{\frac{1}{a_1}}$, on pourra, sans erreur sensible, regarder la courbe de section comme donnée par l'équation (e).

La forme de cette courbe se complique lorsque les valeurs absolues de $\lambda\sqrt{a_1}$ sont peu considérables, ou plutôt la complication naturelle de cette courbe devient alors très-sensible. Mais les équations 5 de la page 437 se prêtent toujours à une discussion facile.

Supposons $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{a}}$.

Pour $\omega = 0$, $X = 0$, parce que la parenthèse devient nulle. ω croissant, la parenthèse est positive, et sa valeur absolue augmente un peu, jusqu'à ce que l'on ait $\omega = 90$. Quant à x_1, il est toujours positif, et va en diminuant jusqu'à ce que, pour cette valeur (90) de ω, il devienne nul à son tour. Alors X l'est nécessairement aussi.

Pour les valeurs de ω, comprises dans le premier cadran, Y est toujours positif; pour $\omega = 0$ il est nul parce que Y_1 l'est. Puis Y_1 augmente, ainsi que la parenthèse, et pour $\omega = 90$, on a

$$Y = \sqrt{\frac{1}{aq}} - \sqrt{\frac{1}{a}}.$$

La forme des valeurs de X et Y montre que la courbe est symétrique par rapport aux axes des coordonnées; et d'après celle que la

discussion précédente lui assigne dans le premier cadran, on voit qu'elle a la forme d'un huit, dont l'axe coïncide avec celui des Y.

Pour $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{b}}$, la forme serait analogue, mais l'axe du *huit* coïnciderait avec l'axe des X.

Troisième cas. Le troisième cas se traite absolument de la même manière. Les calculs sont un peu plus longs à écrire, mais la marche à suivre dans l'élimination qui conduit à l'équation de l'ellipse de sortie est identique à celle que nous avons développée dans le deuxième cas.

J'ajouterai comme détail d'expériences que pour obtenir les nappes coniques dont je fais usage, je me borne à faire tomber sur une lentille fortement convergente un faisceau intense de rayons à peu près parallèles, en prenant soin de placer contre la lentille une plaque opaque percée d'une ouverture annulaire dont le centre est sur l'axe de la lentille.

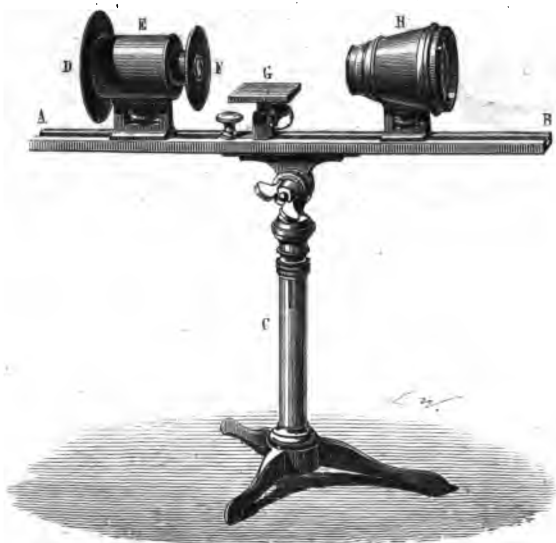


Fig. 707.

La figure 707 représente dans son ensemble l'appareil que j'emploie pour produire et projeter ces phénomènes. DE est la portion

qui sert à obtenir la nappe conique convergente. Elle se compose d'un tube recevant par son ouverture D les rayons solaires ou

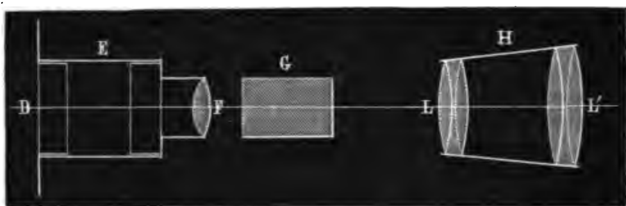


Fig. 708.

ceux d'une lampe électrique et terminé à l'autre par une lentille très-convergente.

La plus grande partie des rayons qui tombent sur cette lentille sont arrêtés par une sorte de couvercle opaque dont on recouvre la face opposée à celle qui reçoit la lumière. On ne laisse émerger que les rayons qui tombent sur un anneau circulaire *b* (fig. 709) ayant son centre sur l'axe de la lentille et aussi ceux qui, cheminant dans la direction de cet axe, tombent sur le très-petit orifice circulaire *a*. G (fig. 707 et 708) est un support à double mouvement sur lequel on place le cristal. Enfin H est un objectif très-convergent formé, comme on le voit fig. 708, de deux systèmes de lentilles achromatiques.

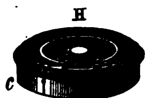


Fig. 709.

Toutes ces pièces glissent dans la rainure AB (fig. 707), et s'y fixent à l'aide de vis de pression. AB peut s'incliner plus ou moins dans un plan passant par le pied C.

§ 3. — LUNETTE DE ROCHON.

Quand deux triangles rectangles ABC, ABD, ont un côté de l'angle droit commun AB (fig. 710), les tangentes des angles opposés sont inversement proportionnelles aux autres côtés BC et BD, et par conséquent, si l'on connaît BC, BD et *tg* ACB, on en déduit aisément *tg* BDA. Il en résulte que si l'on regarde un objet très-éloigné avec une lunette dont l'objectif ait une distance focale connue F = BD, on connaîtra l'angle sous lequel on voit l'objet du centre de l'objectif, si l'on peut assigner le point C de

l'axe d'où l'on voit l'image AB de l'objet sous un angle déterminé ACB.



Fig. 710.

Or, Rochon a montré qu'en ajoutant aux pièces qui composent une lunette ordinaire un prisme biréfringent mobile entre l'objectif et l'oculaire, on peut aisément satisfaire à la condition qui, d'après ce que nous venons de dire, suffit à la détermination de l'angle sous lequel on voit un objet.

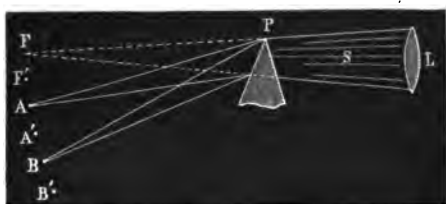


Fig. 711.

Lorsqu'un faisceau de rayons S rendus convergents par une lentille L tombe sur un prisme biréfringent P, il se dédouble, et les deux foyers ordinaire et extraordinaire A et B sont d'autant plus écartés l'un de l'autre que le prisme a été placé plus loin du point F, où le concours aurait eu lieu sans son interposition.

Si la lentille transmet un second faisceau qui converge vers F', le prisme, le dédoublant comme l'autre, force les rayons ordinaires qui en proviennent à venir concourir en A', et les autres en B'.

La distance AA' ne dépend pas sensiblement de la position que l'on fait occuper au prisme sur l'axe de la lentille, et AB au contraire en dépend. Par conséquent, si FF' est assez petit pour que, dans une position convenable du prisme, A' soit entre A et B, on pourra toujours, en rapprochant ce prisme du lieu des foyers, amener A' à coïncider avec B.

Alors l'angle compris entre les droites AP et A'P est précisément égal à celui dont le prisme écarte le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire qui correspondent au rayon incident dont FP est le prolongement; et, comme pour chaque prisme cet angle peut être aisément ou calculé ou mesuré expérimentalement, il en résulte que l'on connaît l'angle sous lequel on voit l'image AA' ou son égale FF' en plaçant l'œil à une distance AP de cette image.

La pièce caractéristique de la lunette de Rochon est donc un prisme biréfringent qui peut se mouvoir entre l'objectif et l'oculaire. Une monture spéciale et une crémaillère extérieure sont disposées de telle sorte que le mouvement se puisse commodément obtenir.

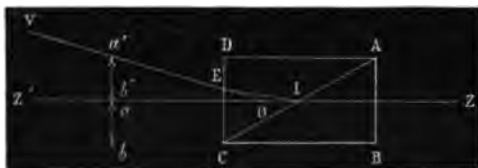


Fig. 712.

Le prisme dans son ensemble est le plus souvent en quartz, et il a la forme d'un parallélipipède rectangle; ses faces d'entrée et de sortie AB, CD sont donc parallèles entre elles; mais ce parallélisme n'empêche pas l'action biréfringente de séparer fortement les deux rayons. En effet, le parallélipipède total ABCD est en réalité formé par la superposition de deux prismes de même angle, mais différemment taillés par rapport à l'axe du cristal. La face AB est perpendiculaire à l'axe du premier morceau de cristal, et au contraire l'arête réfringente du deuxième prisme est parallèle à l'axe de double réfraction de ce prisme. D'ailleurs l'axe ZZ' de la lunette est normal aux faces AB et CD.

D'après cela, les rayons qui tombent sur AB dans une direction à peu près parallèle à ZZ' arrivent jusqu'au point I sans se séparer : mais là, la bifurcation a lieu. Les rayons ordinaires suivent leur route : pour eux, toute la pièce biréfringente n'agit pas autrement qu'une glace de verre. Quant aux rayons extraordinaires, ils sont déviés, rejetés vers le haut avec la disposition indiquée sur la figure.

L'image formée au foyer de l'objectif se résout donc en deux autres, l'une ordinaire *ab* et l'autre extraordinaire *a'b'*. Lorsque

l'extrémité inférieure b' de la seconde coïncide avec l'extrémité supérieure a de la première, on doit avoir

$$a'b' = b'O . tg\, a'Ob',$$

ou bien, en désignant par h la grandeur commune des deux images, par d la distance $b'O$, par M l'angle de bifurcation $a'Ob'$,

$$h = d . tg M.$$

Soient F la distance focale de l'objectif et V l'angle sous lequel on voit l'objet dont l'image a pour grandeur h. On aura la relation $h = F\, tg V$, et l'équation précédente deviendra

$$d . tg M = F . tg V$$

ou

$$tg V = \frac{d}{F}\, tg M.$$

Pour un même instrument, $tg M$ et F sont déterminés ; il en est donc de même de la fraction $\frac{tg M}{F}$, qui devient alors une constante de l'instrument dont il s'agit. Pour déterminer la valeur numérique de cette constante on opère de la manière suivante :

On commence par mettre le prisme dans une position telle que les deux images vues à travers l'oculaire soient superposées ; cette position est celle pour laquelle le foyer de l'objectif coïncide avec le point O où l'axe ZZ' est coupé par le rayon extraordinaire provenant du rayon naturel tombant sur AB, suivant ZZ'. Dans ce cas, en effet, les rayons ordinaires et extraordinaires correspondant à un même point de l'objet qu'on observe semblent, après être sortis du prisme biréfringent, émaner d'un même point situé dans son intérieur. Il n'y a donc qu'une seule image virtuelle correspondante.

Cette position obtenue, on voit à quel numéro d'une division tracée sur le corps de la lunette répond la pièce qui porte le prisme ; puis on vise avec la lunette un objet de grandeur H, situé à une distance suffisante D de l'objectif, et on avance le prisme jusqu'à ce que les deux images soient en contact. Alors, si l'on appelle d' le déplacement de l'index sur la division, on a

$$\frac{H}{D} = tg V = \frac{d'\, tg M}{F}$$

Cette équation ne renferme d'autre inconnue que $\frac{tg\,M}{F}$, et par conséquent elle peut en déterminer la valeur numérique.

CHAPITRE XIX

POLARISATION RECTILIGNE

§ 1. — FAITS GÉNÉRAUX. — LOI DE MALUS. — DIRECTION DE LA VIBRATION LUMINEUSE DANS UN RAYON POLARISÉ RECTILIGNEMENT.

Expérience de Huyghens. — Au chapitre 5 de son traité de la lumière, Huyghens décrit « *un phénomène merveilleux, qu'il a découvert* (dit-il) *après avoir écrit tout ce qui précède...* »

Lorsqu'après avoir bifurqué un rayon de lumière par son passage à travers un spath, on reçoit sur un autre cristal de même espèce les deux rayons transmis, chacun d'eux en général se dédouble à son tour, et l'on obtient quatre faisceaux réfractés différents. Les images peuvent être ou ne pas être de même intensité; seulement « elles ne paraissent pas avoir toutes ensemble plus de clarté que le seul rayon primitif, » et deux de ces quatre images disparaissent lorsque les sections principales des deux cristaux sont parallèles ou perpendiculaires entre elles. Quand les sections sont parallèles, le rayon ordinaire donné par le premier cristal passe tout entier à l'état de rayon ordinaire dans le deuxième, et, de son côté, le rayon extraordinaire traverse le second cristal à l'état de rayon extraordinaire.

Si les sections des deux spaths sont perpendiculaires entre elles, le rayon réfracté *ordinairement* dans le premier cristal se réfracte *extraordinairement* dans le second, et réciproquement. Huyghens déclare qu'il n'a pu trouver la cause de ces effets. Newton se demande si « ce n'est pas une preuve que chaque rayon puisse être considéré comme ayant quatre côtés, desquels deux opposés l'un à l'autre inclinent le rayon à être rompu de la manière extraordinaire aussi souvent que l'un ou l'autre est tourné vers la face à réfraction extraordinaire du cristal, tandis que les autres deux côtés ne produisent pas le même effet... En un mot, Newton se trouve conduit à penser que les rayons lu-

mineux, matériels comme il les suppose, sont doués d'une sorte de *polarité*... »

Expérience de Malus. — En 1811, Malus découvrit que, dans des circonstances convenables, la réflexion peut imprimer aux rayons lumineux des caractères analogues à ceux qu'ils reçoivent de la double réfraction. Il reconnut que quand un rayon lumineux a été réfléchi sur le verre sous l'angle de 35° 25' avec la surface, ce rayon est dans les conditions où serait un rayon transmis *ordinairement* à travers un spath dont la section principale serait parallèle au plan de réflexion sur le verre.

Ainsi, qu'on le reçoive sur un spath dont la section principale soit parallèle au plan de réflexion, il s'y réfractera sans bifurcation et le traversera tout entier à l'état de rayon ordinaire. Si la section est perpendiculaire au plan de réflexion, le rayon passera tout entier à l'état extraordinaire.

Il exprima ce fait en disant que, dans les circonstances citées, la réflexion avait polarisé complétement le rayon, comme la double réfraction polarise chacun des deux faisceaux dans lesquels elle sépare un rayon incident unique; et on convint de dire que le rayon ordinaire transmis par un spath était polarisé dans le plan de la section principale.

Loi de Malus. — De plus, Malus admit que, quand un rayon polarisé se bifurque en tombant normalement sur un spath, l'intensité du rayon ordinaire varie proportionnellement au carré du cosinus de l'angle α que la section principale du spath fait avec le plan de polarisation du rayon incident, et que l'intensité du rayon extraordinaire est proportionnelle au carré du sinus du même angle. Cette hypothèse représentait les faits pour les valeurs 0°, 45° et 90° de l'angle α. De nombreuses vérifications, faites par des procédés très-différents, ont depuis établi l'exactitude complète de cette loi, qui est une des plus importantes de l'optique.

Sous un angle autre que 35° 25', la réflexion sur le verre ne polarise pas complétement la lumière, car le rayon réfléchi donne toujours deux images en traversant un spath. Seulement, chacune à son tour passe par un minimum d'éclat lorsque la section du cristal est parallèle ou perpendiculaire au plan de réflexion. Le rayon réfléchi est *partiellement polarisé*.

En cherchant à interpréter ces phénomènes dans la théorie des ondes, on est conduit à découvrir dans les vibrations lumineuses un caractère que les phénomènes d'interférence et de diffraction n'avaient point manifesté.

Soit, sur le plan de la figure 713, OA la trace de la section principale du premier des deux rhomboïdes de Huyghens, soit OB la

trace de la section principale du second, et OC une perpendiculaire à OB : lorsqu'on fait varier l'angle BOA, les deux rayons transmis à travers le second spath éprouvent des changements d'intensité analogues à ceux qu'éprouveraient par le fait de cette même variation, soit les composantes suivant OB et OC d'un mouvement dirigé suivant OA, soit plus généralement les composantes suivant des directions faisant un angle φ avec BO et OC d'un mouvement faisant lui-même un angle φ avec OA, l'angle φ étant toujours compté dans le même sens.

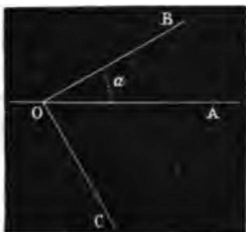


Fig. 713.

Or, pour que la raison de cette analogie devienne évidente, il suffit d'admettre : premièrement, que, dans l'expérience de Huyghens, le rayon ordinaire qui tombe normalement sur le deuxième spath apporte au point d'incidence un mouvement normal à sa direction, et perpendiculaire à la section du premier spath; deuxièmement, qu'à l'entrée dans le second cristal, le mouvement incident, par le fait même de la structure du spath, se trouve forcé à se décomposer en deux autres rectangulaires entre eux, et dont l'un soit encore perpendiculaire à la nouvelle section principale, comme le mouvement incident l'était par rapport à celle du premier rhomboèdre.

Avec ces hypothèses, en effet, si I est le coefficient de vibration du mouvement incident, I $\cos\alpha$ et I $\sin\alpha$ seront ceux des deux composantes dans lesquelles il se dédouble à l'entrée dans le deuxième cristal, et $I^2\cos^2\alpha$, $I^2\sin^2\alpha$ leurs intensités, et ces expressions reproduisent toutes les particularités du phénomène de Huyghens. Que l'on suppose le cristal divisé en couches aussi minces que l'on voudra par des plans parallèles à la face d'entrée, en passant d'une couche à la suivante, chaque mouvement n'en donnera qu'un seul, puisque pour lui α sera 0 ou 90°; par suite, enfin, les vibrations resteront orientées les unes perpendiculairement au plan d'incidence, les autres parallèlement à ce plan.

Enfin, pour représenter les phénomènes que l'étude de la réflexion sur le verre a fait découvrir à Malus, il suffit d'admettre que si un rayon se réfléchit sur cette substance en faisant un angle de 35° 25′ avec la surface, la vibration des molécules lumineuses dans le rayon réfléchi sont toutes perpendiculaires au plan de réflexion.

Fresnel et Arago ont imaginé et exécuté des expériences qui

prouvent directement l'exactitude de la première des hypothèses à l'aide desquelles nous avons rendu compte de la loi de Malus, à savoir, que dans un rayon polarisé, propagé dans un milieu homogène, les vibrations sont, d'une part, perpendiculaires au rayon, d'autre part, orientées d'une manière fixe par rapport au plan de polarisation. Voici en quoi elles consistent :

Qu'on essaye de répéter une quelconque des expériences décrites pages 344 et suiv., en mettant à la place des deux tubes deux spaths dont les sections principales soient croisées, et qu'après avoir éteint soit les deux rayons ordinaires, soit les deux rayons extraordinaires, on cherche à faire interférer les deux autres, on n'obtiendra jamais de franges, même en prenant toutes les précautions nécessaires pour compenser les différences de marche des deux rayons. Les interférences redeviennent possibles dès que les sections des deux spaths ne sont plus rectangulaires ; et les franges ont leur maximum d'éclat quand les sections se trouvent amenées au parallélisme.

Tous ces phénomènes sont nécessaires si les vibrations dans un rayon polarisé sont normales au rayon et orientées d'une manière fixe par rapport au plan de polarisation. Il est bien clair en effet que la composition de deux mouvements vibratoires rectangulaires ne peut jamais avoir pour résultat une destruction de l'un par l'autre. Le résultat de cette action réciproque est, comme on l'a vu en acoustique, un mouvement généralement elliptique. Réciproquement, si, dans les mouvements polarisés, il y avait une composante parallèle au rayon, il serait bien difficile d'imaginer des hypothèses plausibles pour expliquer comment cette composante ne manifesterait pas son existence par un développement de franges lors de la perpendicularité des deux sections principales des spaths polariseurs. Il ne serait pas plus facile de faire concorder le fait de la non interférence des rayons polarisés à angle droit avec l'hypothèse de vibrations transversales qui ne seraient point parallèles ou perpendiculaires au plan de polarisation. Au reste, nous renvoyons sur ces points aux mémoires de Fresnel et à celui que M. Verdet a fait paraître sur ce sujet. (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série, t. XXI, p. 377.)

§ 2. — APPAREILS POLARISEURS.

Ainsi, dans le rayon ordinaire qui émerge d'un spath, la vibration est rectiligne, normale au rayon, parallèle ou perpendiculaire à la section principale. Nous admettrons qu'elle est perpendiculaire. Cette simplicité dans la nature du mouve-

ment rend, *à priori*, très-probable que les lois de l'optique se présenteront en général sous la forme la plus simple, lorsque, pour les étudier, on produira les phénomènes avec la lumière polarisée : de là, l'importance que l'on attache à la construction de bons appareils polariseurs.

Prismes de Spath achromatiques. — Une lame de spath, à faces parallèles entre elles, ne sépare presque jamais assez fortement les rayons ordinaires et extraordinaires pour qu'on puisse l'employer comme polariseur dans les expériences où l'on veut opérer sur des faisceaux un peu larges. On tire, au contraire, un fort bon parti de prismes de spath de petit angle achromatisés par un prisme de verre convenablement épais.

Le système de ces deux prismes accolés forme une lame à faces à peu près parallèles et qui se trouve fixée dans une bague métallique AB (fig. 714). Dans un grand nombre d'expériences, cette bague s'ajuste à frottement au centre d'un disque à crémaillère, qui peut être mis en mouvement par un pignon. On marque sur le bord de la bague la trace de la section principale du prisme biréfringent, et à l'aide d'une division tracée sur le pourtour de la plaque circulaire contre laquelle tourne le disque à crémaillère, on peut orienter dans telle direction que l'on veut le plan de polarisation des rayons ordinaires et extraordinaires. Ces deux rayons sont bien séparés, le premier reste ordinairement à peu près fixe pendant la rotation du système, l'autre tourne autour de lui. On peut aisément l'intercepter à l'aide d'un écran noir.

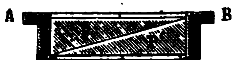


Fig. 714.

En employant deux doubles prismes semblables (fig. 715), on peut répéter commodément l'expérience de Huyghens. On peut aussi, avec ces deux doubles prismes, établir entre les rayons ordinaires et extraordinaires une très-grande séparation angulaire ; ce qui est quelquefois commode dans des expériences de projection.


Fig. 715.

Prisme de Nicol. — Le prisme de Nicol est un polariseur formé de deux prismes de spath que l'on taille et que l'on réunit de façon que leur ensemble arrête totalement le rayon ordinaire dû au premier prisme, et laisse passer l'autre toujours à l'état extraordinaire.

Pour le construire, on se procure d'abord un prisme de spath allongé, tel qu'on l'obtiendrait en prolongeant, dans le rapport de 3,7 à 1, quatre arêtes parallèles du rhomboèdre primitif, puis

on coupe ce prisme en deux par un plan passant par les sommets des deux trièdres formés d'angles plans de 120 degrés qui se trouvent opposés l'un à l'autre sur les deux petites bases du prisme. — Ce plan de section doit être perpendiculaire à la section principale de chacune des bases (fig. 716).



Fig. 716.

Enfin, on rapproche les deux prismes tronqués, en leur laissant les positions relatives qu'ils occupaient avant la section, et on les colle avec une couche de baume de Canada, ayant pour indice 1,549, de manière à reconstituer un solide tout semblable extérieurement au prisme allongé primitif.

Lorsqu'on fait tomber sur ce système un faisceau formé de rayons parallèles aux longues arêtes du prisme ou au moins peu inclinés sur ces arêtes, il se dédouble à l'incidence en deux autres qui tombent à peu près confondus sur la face de jonction. Là, les rayons ordinaires éprouvent la réflexion totale; l'inclinaison de la face de jonction et l'indice du baume ayant été choisis de manière qu'il en fût ainsi, les rayons extraordinaires passent dans le second cristal et le traversent tous à l'état de rayons extraordinaires.

La séparation des deux faisceaux ordinaire et extraordinaire étant l'effet d'une réflexion totale, il est clair que l'ouverture du cône de rayons qu'un pareil prisme peut polariser ne doit pas dépasser certaines limites. Cette ouverture est d'environ 30 degrés dans les prismes ordinaires, de telle sorte que les rayons extrêmes font un angle d'à peu près 15 degrés avec les longs côtés du prisme.

Prisme de M. Foucault. — M. Foucault a construit des polariseurs analogues aux précédents, et qui, pour une même ouverture, exigent moins de longueur dans le morceau de spath à employer.

Dans les prismes de M. Foucault, le baume de Canada est remplacé par une simple couche d'air. Ces nouveaux appareils sont très-avantageusement employés lorsqu'on veut opérer avec un large faisceau de rayons très-sensiblement parallèles entre eux.

Tourmalines. — M. Biot a découvert dans les cristaux de tourmaline une propriété fort remarquable. Ces cristaux sont biréfringents. Ils sont ordinairement colorés et se présentent sous forme de prismes allongés, dont les arêtes sont parallèles à l'axe du cristal. Si, avec un cristal de cette substance, on taille un

prisme dans lequel l'arête réfringente soit parallèle à l'axe, on constate aisément que, près de cette arête, là où l'épaisseur du milieu biréfringent est très-faible, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire passent également; mais, à mesure que le point d'incidence s'écarte de l'arête, le rayon ordinaire s'affaiblit et une épaisseur encore très-faible suffit à l'éteindre complétement. Les plaques de tourmaline, dès l'instant qu'elles ont une épaisseur convenable, ne laissent donc passer qu'un rayon complétement polarisé. Aussi sont-elles très-souvent employées en optique.

Pour manifester commodément la propriété curieuse dont elles jouissent, on prend deux lames de tourmaline aussi pures que possible et parallèles à l'axe. On les fixe sur deux disques de glace G et G' (fig. 717), portés dans deux bagues M et M', qui peuvent tourner dans une même monture, et l'on fait tomber sur l'ensemble un faisceau lumineux. Si les plaques T et T' ont leurs axes parallèles, la lumière les traverse toutes deux aisément. Si les axes sont croisés, il y a extinction complète au point de croisement.

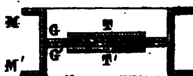


Fig. 717.

La couleur des tourmalines est ordinairement foncée; aussi le rayon qu'elles transmettent est peu intense. M. Herapat a trouvé dans ces derniers temps une sorte de cristaux artificiels, non colorés et qui jouissent aussi de la propriété de ne laisser passer qu'un des rayons dans lesquels ils dédoublent la lumière incidente.

Ajoutons que les plaques d'*hérapatite* ou celles de tourmaline ont toujours des dimensions bien moindres que celles des polariseurs faits en spath. Le seul inconvénient de ces derniers est le prix élevé qu'ils atteignent dès qu'ils sont un peu grands.

Glace noire. — Quant à la glace noire, elle peut sans doute polariser un large faisceau; mais, pour que la polarisation soit complète, il faut que les rayons incidents soient bien parallèles entre eux, et cette condition est souvent difficile à remplir.

Du reste, la glace noire ne réfléchit sous l'angle de polarisation qu'une assez faible partie de la lumière incidente, la moitié environ.

CHAPITRE XX

PHOTOMÉTRIE

§ 1er. — PROCÉDÉ DE BOUGUER.

Bouguer paraît être le premier qui ait entrepris de traiter dans leur ensemble les différents problèmes de la photométrie. Les résultats de ses recherches ont été rassemblés par lui dans l'ouvrage qu'il publia en 1740 sous le nom de *Traité des ombres et de la lumière*.

Le fait qu'il établit d'abord, celui qui sert de point de départ à tous ses travaux, consiste en ce que, si une source lumineuse de faibles dimensions éclaire un élément de surface de grandeur constante, et normal à la direction des rayons incidents, l'éclairement de cet élément, ou en d'autres termes la quantité de lumière qui tombe sur lui, sera inversement proportionnelle au carré de sa distance à la source.

Ce principe peut être considéré comme nécessaire et indépendant de toute hypothèse sur la nature de la lumière.

Considérons en effet une même source placée successivement aux centres de sphères creuses de rayons 1, 2, 3..... La lumière qu'elle envoie dans un même temps très-court vient tomber sur des surfaces qui, d'après les règles de la géométrie, sont entre elles comme 1, 4, 9... Les proportions que reçoit dans ces différents cas un élément de grandeur constante sont donc entre elles comme $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, ce qui vérifie la loi énoncée.

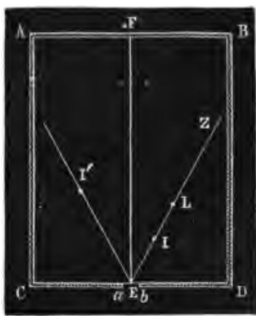


Fig. 718.

On peut du reste arriver à la même conséquence par l'expérience suivante : une grande caisse noircie en dedans est partagée en deux parties égales par une cloison verticale, très-mince, FE (fig. 718). Sur la face antérieure CD est une petite

fenêtre *ab*, bouchée avec un verre dépoli ou un papier huilé. La cloison FE touche exactement ce transparent, dont une des moitiés se trouve ainsi dans le compartiment de gauche, tandis que l'autre se trouve dans le compartiment de droite. La caisse est partiellement ouverte par en haut, et les parois latérales sont mobiles ou présentent de grandes portes par lesquelles on puisse très-librement introduire les mains.

Deux règles graduées EZ, EZ', sur lesquelles glissent des supports, peuvent tourner horizontalement autour d'un même axe vertical passant par le point E.

Ces règles étant également inclinées sur FE, on dispose les supports I et I' qui glissent sur chacune d'elles, de manière que les distances IE et I'E soient entre elles comme 1 et 2; alors, après avoir fait choix de cinq bougies aussi identiques que possible, on en place une en I et les quatre autres en I', en ayant soin que les flammes soient bien à hauteur de la fenêtre *ab*, et l'on s'assure que les deux portions du transparent sont également éclairées : l'égalité d'éclairement n'existerait plus si l'on faisait mouvoir d'une quantité sensible le support I ou le support I'.

La méthode que nous venons de faire connaître peut servir à comparer les intensités de deux sources, c'est-à-dire les quantités de lumière qu'elles envoient à distance 1 sur des surfaces égales, également inclinées sur la direction des rayons. On opère de la manière suivante : Après avoir placé l'une des lumières en un point I de la première règle, on fait avancer ou reculer l'autre jusqu'à ce que l'on trouve la position I', qu'il lui faut donner sur la seconde règle pour qu'il y ait égalité d'éclairement, en *a* et en *b*. Alors, si l et l' sont les intensités cherchées, l'égalité d'éclairement exige que l'on ait $\dfrac{l}{\overline{IE}^2} = \dfrac{l'}{\overline{I'E}^2}$.

En effet, la quantité de la lumière envoyée par I à une distance 1 étant égale à l, elle prendra à distance IE une valeur déterminée par la proportion $\overline{IE}^2 : 1 :: l : x$.

$$x = \frac{l}{\overline{IE}^2}.$$

De même, la source placée en I' enverra à distance I'E une quantité $y = \dfrac{l'}{\overline{I'E}^2}$; de l'égalité $\dfrac{l}{\overline{IE}^2} = \dfrac{l'}{\overline{I'E}^2}$ on déduit $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{\overline{IE}^2}{\overline{I'E}^2}$; et l'équation mise sous cette forme fait immédiatement connaître le rapport cherché.

A l'aide du même procédé, Bouguer étudia l'absorption que subit la lumière en traversant des épaisseurs connues de divers milieux transparents. Avec deux lumières de même nature, il éclairait également les deux portions du transparent, puis il introduisait sur le trajet du rayon de l'une des sources le milieu dont il voulait étudier l'action absorbante. L'égalité était détruite, il la rétablissait en reculant la deuxième lumière, et la marche de cette dernière lui faisait connaître la proportion dans laquelle l'action du milieu diaphane avait réduit la lumière incidente.

On peut employer le procédé de Bouguer pour déterminer la proportion dans laquelle un miroir réfléchit la lumière qui tombe sur lui sous une incidence déterminée.

Que l'on prenne un appareil semblable à celui qui a été décrit page 451, et qu'en un point M quelconque de la règle CL″ (fig. 719) on fixe une alidade qui puisse pivoter horizontalement autour de ce point. Ramenons l'alidade parallèlement à ML″, et après avoir placé sur elle la lampe L″ à une distance suffisante de l'axe de rotation, déterminons la position qu'il faut donner à l'autre lumière L pour que les deux portions du transparent soient également éclairées. Puis, en M, fixons un miroir vertical dont la surface fasse un angle α avec la direction CL″, et amenons à son tour l'alidade à la position ML′ pour laquelle l'angle L″ML′ est égal à 2α. Les rayons partis de la lampe et réfléchis sur le miroir viendront comme tout à l'heure tomber sur la portion f' du transparent, après avoir parcouru une distance égale à celle qu'ils avaient parcourue dans le premier cas. Mais comme la réflexion est toujours accompagnée d'une perte dans l'intensité du faisceau primitif, il en résulte que f' sera moins lumineuse qu'elle n'était d'abord. Pour rétablir l'égalité d'éclairement, on reculera L; et le rapport du carré des deux distances d et d', auxquelles la lumière L s'est trouvée de f dans les deux expériences successives sera celui de l'intensité du faisceau réfléchi à l'intensité du faisceau direct. Il est entendu que toutes précautions sont prises pour que, dans la deuxième partie de l'expérience, il ne puisse tomber en f' aucun rayon venu directement de L′.

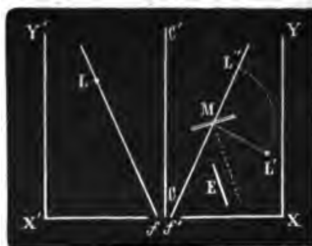


Fig. 719.

En opérant de cette manière, nous avons, M. de La Provostaye

et moi, détermine le pouvoir réflecteur de miroirs d'acier qui nous servaient dans nos expériences relatives à la chaleur rayonnante, et les nombres que nous avons trouvés comme mesure de ce pouvoir se sont accordés avec ceux que M. Jamin avait obtenus quelque temps auparavant en étudiant par un autre procédé la réflexion de la lumière sur des miroirs semblables.

Dans une édition du traité de Bouguer, postérieure à celle que nous avons déjà citée, on trouve indiquée une modification du procédé photométrique qui vient d'être décrit. Cette modification a été souvent adoptée par Rumford. Voici en quoi elle consiste.

Dans une chambre noire, on place un écran blanc vertical AB (fig. 720), et devant lui, à une très-faible distance, un petit cylindre vertical C, un crayon par exemple. Les lumières que l'on compare sont placées en L et L′, et l'on arrive par tâtonnement à faire en sorte :



Fig. 720.

1° Que les deux ombres du crayon qui le projettent sur l'écran soient en contact;

2° Qu'elles soient également intenses. Or l'ombre l est la partie du tableau qui est éclairée par la lumière L toute seule.

L'ombre l' est la partie du tableau qui est éclairée par la seule lumière L′.

Donc, si l'on appelle I et I′ les intensités des deux lumières, D et D′ leurs distances respectives aux ombres l et l', on aura lors de l'égalité de ces ombres :

$$\frac{I}{D^2} = \frac{I'}{D'^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{I}{I'} = \frac{D^2}{D'^2}.$$

§ 2. — PROCÉDÉ D'ARAGO.

Dans la plupart des recherches photométriques récentes, les procédés de mesures adoptés reposent sur la loi de Malus.

Arago, qui s'est beaucoup occupé de ces sortes de questions, indiquait à peu près dans les termes suivants (5 août 1833) l'usage qu'on pouvait faire de cette loi dans la comparaison de deux lumières.

« La connaissance de la loi suivant laquelle un faisceau de lu-

mière polarisée se partage entre l'image ordinaire qu'il donne en traversant un spath serait capitale au point de vue théorique, et, de plus, elle conduirait à la solution d'un grand nombre de questions très-importantes.

« Supposons, par exemple, qu'on voulût comparer l'intensite lumineuse de la portion de la lune que le soleil éclaire directement avec celle de la partie du même astre qui reçoit seulement les rayons réfléchis par la terre, et que l'on appelle *la partie cendrée;* voici, si la loi en question était connue, comment il faudrait opérer.

« Après avoir polarisé la lumière de la lune, on la ferait passer à travers un spath dont la section principale coïnciderait avec le plan de la polarisation donné aux rayons venant de l'astre.

« L'image extraordinaire serait alors éteinte. En tournant le cristal, on la ferait reparaître, et son intensité irait graduellement en augmentant. On arrêterait le mouvement au moment où sur cette image extraordinaire naissante le segment correspondant à la partie de la lune éclairée par le soleil aurait l'intensité de la portion cendrée prise sur l'image ordinaire. Il est facile de voir que, dès ce moment, le problème serait complétement résolu.

« En effet, en représentant par F et F' les intensités de la lumière lunaire et de la lumière cendrée (telles qu'elles sont au moins après la première polarisation), ces intensités sur l'image ordinaire, après une rotation i du cristal, seraient $F\cos^2 i$ et $F'\cos^2 i$. Dans l'image extraordinaire, on aurait respectivement $F\sin^2 i$ et $F'\sin^2 i$. Or j'ai supposé qu'à l'angle i correspond, d'après l'observation, l'égalité des images; donc on a $F'\cos^2 i = F\sin^2 i$, et partant $\frac{F'}{F} = \frac{\sin^2 i}{\cos^2 i} = tg^2 i$. »

Photomètre de M. F. Bernard. — En 1852, M. F. Bernard a étudié l'absorption de la lumière à travers un certain nombre de corps transparents solides ou liquides. Le procédé photométrique qu'il a employé dans ces recherches est fondé sur la loi de Malus. L'appareil à l'aide duquel les mesures ont été exécutées se trouve décrit au tome XXXV de la 3e série des *Annales de Physique et de Chimie*. La figure 721 en représente le plan. SS' est une feuille de papier blanc fortement éclairée par une lampe ou par les rayons solaires. B et D sont deux tubes parallèles entre eux et qui isolent chacun un faisceau des rayons dispersés par le papier. Ces tubes sont fixés sur une des parois d'une boîte noircie en dedans et se prolongent dans son intérieur jusqu'à A et C.

Une fois introduite dans les tubes, la lumière traverse deux prismes de nicol, p et q, p' et q', le premier la polarise et le se-

cond permet de l'éteindre totalement ou de ne lui laisser qu'une fraction déterminée de l'intensité qu'elle avait après sa polarisation.

Dans l'intérieur de la boîte, en g et g', sont deux prismes rectangles qui, par une réflexion totale opérée sur leur hypoténuse

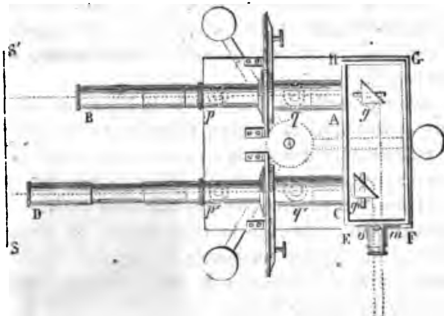


Fig. 721

renvoient vers l'œil, dans deux directions voisines et à peu près parallèles, les rayons qui ont traversé les tubes.

On règle la position des Nicols de manière que les deux images qui cheminent suivant Bg et Dg' aient même éclat, puis on transmet les rayons qui forment l'une d'elles, X par exemple, à travers le corps diaphane dont on étudie l'absorption.

L'éclat de cette image diminue; on tourne alors l'analyseur q' de manière à ramener l'autre image X' à être de nouveau égale à X, et d'après la grandeur de l'angle dont q' a été tourné, on estime la proportion dans laquelle l'action du milieu absorbant avait diminué l'intensité de X.

§ 3. — COMPARAISON DES LUMIÈRES INSTANTANÉES. PHOTOMÈTRE DE M. MASSON.

Nous reviendrons aux chapitres suivants sur les résultats obtenus dans les recherches photométriques récentes. Ici, pour terminer ce qui est relatif à l'exposé des principales méthodes, nous faisons connaître celle que M. Masson a employée dans ses études sur la lumière électrique.

Cette méthode a cela de particulier, qu'elle s'applique à la me-

sure de l'action éclairante de sources lumineuses instantanées, et elle est fondée sur un principe dû à Bouguer, et qui consiste en ce que, pour un même œil et dans des conditions à peu près semblables, la limite de sensibilité ne varie que très-peu, ou même ne varie pas pendant un intervalle de quelques heures.

Voici comment Bouguer décrit les expériences qu'il a faites pour arriver à cette conséquence.

« Ayant mis une bougie à un pied de distance d'une surface très-blanche, j'ai placé à côté de la bougie une règle d'une certaine longueur, et j'ai ensuite éloigné une bougie de même grosseur que la première, jusqu'à ce que je cessasse de distinguer l'ombre que donnait la deuxième bougie (c'est-à-dire la portion éclairée par la première bougie seulement). La distinction entre les deux lumières n'a cessé d'être visible que quand la petite partie ajoutée a été environ la soixante-quatrième partie de l'autre lumière, en d'autres termes, quand les distances des deux bougies à l'écran étaient entre elles comme 1 et 8. » Bouguer ajoute que, pour son organe, la limite de sensibilité lui a paru indépendante de l'intensité absolue de la lumière.

M. Masson a vérifié ces résultats en étudiant la sensibilité de l'œil par une autre méthode.

Il prenait une série de disques de carton blanc qui pouvaient, comme le disque de Newton, page 236, être fixés sur un axe, et recevoir un mouvement de rotation rapide autour de leur centre. Sur chacun de ces disques, il traçait une portion de secteur répondant à un angle au centre variable entre $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{150}$ de circonférence.

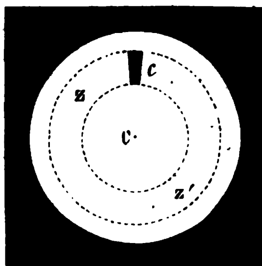


Fig. 722.

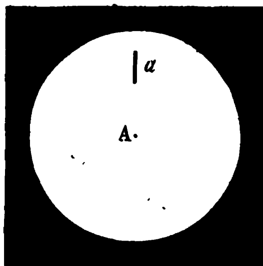


Fig. 723.

Puis il éclairait fortement ces disques, et leur donnant un mouvement de rotation rapide, il observait l'état de leur surface.

Pour ceux tels que C (fig. 722), sur lesquels le secteur noir avait une largeur angulaire un peu grande, $\frac{360}{50}$ par exemple, on voyait en ZZ' une bande circulaire grisâtre se détachant sur le fond lumineux. Avec les disques où le secteur était fort aigu, comme en *a* (fig. 723), on n'observait, en général, aucun effet semblable, il n'y avait pas de nuance appréciable. Enfin, avec quelqu'un des secteurs intermédiaires *b* (fig. 724), on arrivait à la limite où la distinction de la bande sombre cessait d'être possible.

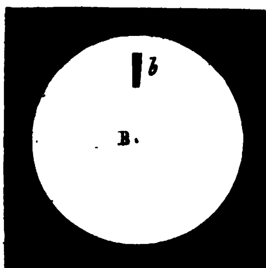


Fig. 724.

La limite de sensibilité de l'œil se trouvait alors donnée par le rapport de l'angle de ce secteur à 360. Et on l'a trouvée toujours indépendante de l'intensité de la lumière qui éclairait le disque.

Ceci posé, pour apprécier le rapport des intensités de deux lumieres instantanées, M. Masson les employait successivement à éclairer un écran blanc déjà illuminé par une lumière fixe, et il les reculait de cet écran jusqu'à ce que leur action devînt négligeable par rapport à la lumière fixe. La sensibilité de l'œil étant constante pendant la durée des expériences, il admettait que les intensités des deux lumières instantanées étaient inversement proportionnelles aux carrés des distances qui les séparaient de l'écran au moment où leur action cessait d'être appréciable sur le fond déjà éclairé par la lumière fixe.

Pour estimer le moment où *la force de la lumière fixe éteignait celle de l'autre,* il n'eût pas été suffisamment exact d'avoir recours à l'observation des deux ombres d'une même tige comme dans l'expérience de Bouguer, citée page 454.

Voici à quel procédé M. Masson avait recours.

Un disque partagé en un certain nombre de secteurs alternativement noirs et blancs, et qui tourne rapidement autour de son centre, paraît d'un gris plus ou moins clair, lorsqu'on projette sur lui les rayons d'une lumière fixe. Lorsqu'au contraire on l'éclaire par une lumière instantanée, une étincelle électrique par exemple, on le voit absolument de la même sorte que s'il était immobile. Si les deux lumières agissent à la fois, les deux apparences se superposent. Le disque apparaît avec tous ses secteurs, mais les blancs tirent sur le gris, et les noirs sont moins foncés.

La fusion des teintes est d'autant plus marquée que l'action de l'étincelle est plus faible. Elle est complète, et le disque paraît de nouveau d'un gris uniforme, lorsque le rapport entre l'éclairement dû à l'étincelle et celui de la lumière fixe n'est plus égal qu'à la fraction qui donne la mesure de la sensibilité de l'œil.

Pour contrôler l'exactitude de cette méthode nouvelle, M. Masson maintint constantes, pendant quelque temps, les conditions de production des étincelles qui lui servaient de sources instantanées, et faisant varier à la fois et la distance D du disque aux boules entre lesquelles éclatait le jet électrique, et la distance D' qui le séparait de la lampe employée comme source fixe, il put s'assurer qu'au moment où l'éclairement dû à l'étincelle disparaissait devant l'autre, le carré du rapport des distances D et D' avait toujours la même valeur.

§ 4. — VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DE MALUS.

Expériences directes. — Nous avons vu aux pages précédentes qu'Arago avait déduit de la loi de Malus les procédés photométriques dont il a enrichi la science; mais jusqu'ici nous n'avons donné aucune démonstration expérimentale directe de l'exactitude de cette loi. Les vérifications qu'Arago en a publiées, quelque rigoureuses qu'elles soient, ne sont pas immédiates, elles s'appuient sur des considérations que nous ne pourrons développer qu'aux chapitres suivants. Nous ne croyons donc pas inutile de faire voir ici que la méthode de Bouguer peut servir à constater l'exactitude de cette loi avec un degré d'approximation aussi grand qu'on peut l'espérer d'après la limite même de sensibilité de l'œil.

J'ai fait depuis longtemps dans mes cours les expériences que je vais décrire, je citerai seulement quelques-uns des nombres qu'elles m'ont fournis.

On prend pour sources de lumière deux lampes à modérateur, et après avoir placé l'une d'elles dans l'appareil ordinairement employé aux projections (t. II, p. 250), on en polarise la lumière à l'aide d'un prisme de Nicol de grandes dimensions et diaphragmé. Une lentille convenablement placée forme sur un écran blanc placé à $1^{m},50$ environ une image agrandie du diaphragme. On dédouble cette image à l'aide d'un prisme de spath achromatisé, porté par une alidade dont le mouvement est mesuré sur un cercle divisé.

Le spath est tourné du côté de la lentille et les rayons inci-

dents sont normaux à sa surface : on éteint l'image extraordinaire et l'on observe la position de l'alidade. Supposons que le point de repère qu'elle porte coïncide avec le zéro du cercle destiné aux mesures d'angles.

Alors on fait tomber sur l'écran les rayons de la deuxième lampe L'. Cette deuxième source est dans une espèce de boîte noircie à l'intérieur. Ses rayons sortent par un orifice suffisamment large, mais ils ne peuvent traverser aucun appareil réfringent. Ils sont, comme les rayons transmis par le spath, à peu près normaux à l'écran.

La distance d de cette seconde lampe à l'écran étant telle que l'ombre qu'elle éclaire paraisse un peu plus noire que l'autre, on tourne le spath d'un angle α de manière à rétablir l'égalité ; puis on place L' à d'autres distances d', d'', et dans chaque cas on rétablit l'égalité des ombres en inclinant la section du spath d'angles α', α''. Or, on trouve toujours que les égalités

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha'} = \frac{d'^2}{d^2}, \qquad \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha''} = \frac{d''^2}{d^2}$$

sont satisfaites, ou, ce qui revient au même, on constate la constance des produits $d \cos \alpha$, $d' \cos \alpha'$, $d'' \cos \alpha''$..... Il en résulte une démonstration expérimentale directe de la loi de Malus.

Dans une série d'expériences faites les 2 et 3 janvier 1862, les valeurs correspondantes de α et de d ont été respectivement :

Valeur de α en degrés.	Valeur de d en centimètres.
34° 30'	118
46° 54'	143
55° 30'	173
64° 36'	233
72° 0'	313

On en déduit pour valeurs successives des produits $d \cos \alpha$, les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\cos 34^\circ 30' \times 118 &= 972\\
\cos 46^\circ 50' \times 143 &= 977\\
\cos 55^\circ 30' \times 173 &= 979\\
\cos 64^\circ 36' \times 233 &= 997\\
\cos 72^\circ \times 313 &= 970
\end{aligned}$$

Dans une autre série du 26 juillet 1862, on a obtenu pour valeurs correspondantes de α et de d :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 28^\circ & \text{et } d &= 133\\
&= 47^\circ 30' & &= 173\\
&= 55^\circ & &= 203\\
&= 62^\circ & &= 253
\end{aligned}$$

Et le calcul prouve que l'on a :

$$\cos 28^\circ \times 133 = 117$$
$$\cos 47^\circ\ 30' \times 173 = 117$$
$$\cos 55^\circ \times 203 = 116$$
$$\cos 62^\circ \times 253 = 119$$

Ces nombres montrent évidemment que le procédé de Bouguer peut s'appliquer parfaitement à la vérification de la loi de Malus. M. F. Bernard était déjà arrivé à une conclusion analogue, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire qu'il a publié en 1852 sur l'absorption de la lumière dans les différents milieux. Néanmoins j'ai pensé qu'il n'y avait pas d'inconvénient à publier des nombres obtenus dans une série d'expériences postérieures aux siennes, mais faites à l'aide d'une disposition toute différente.

NOTA. *Nous avons par mégarde négligé de définir le mot* section principale, *si souvent employé dans ce chapitre. On désigne par ce nom tout plan d'incidence qui est parallèle à l'axe.*

CHAPITRE XXI.

POLARISATION ROTATOIRE.

§ 1. — DÉCOUVERTES D'ARAGO.

Lorsqu'un rayon blanc et polarisé traverse un spath dans une direction oblique à l'axe, il s'y bifurque en deux autres d'intensités généralement inégales, mais tous deux de couleur blanche. Il en est autrement lorsque, sur le trajet du rayon, et avant son entrée dans le spath, on place soit une lame mince biréfringente, de quartz ou de spath, taillée parallèlement à l'axe de double réfraction, soit un verre trempé, soit un quartz perpendiculaire à l'axe et de quelques millimètres d'épaisseur.

Les deux images données par l'analyseur se teignent alors de couleurs souvent très-vives, et les aspects variés qu'elles offrent constituent une série de phénomènes des plus remarquables.

La découverte de ces phénomènes est due à Arago. Elle est consignée dans un Mémoire lu le 11 août 1811 à la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut impérial de

*

France. Nous allons indiquer rapidement la manière dont elle a été faite.

En examinant par un temps bien pur une lame de mica à travers un spath d'Islande, et en la projetant sur le ciel pour la mieux voir, Arago s'aperçut que les deux images données par le prisme biréfringent étaient colorées; l'une était jaune verdâtre, l'autre rouge pourpre, et, dans les endroits où elles se superposaient, leur ensemble paraissait parfaitement blanc. Si l'on faisait tourner soit le prisme seul, soit la lame seule, on trouvait plusieurs positions pour lesquelles les deux images étaient blanches. Mais en général elles étaient colorées de teintes complémentaires, et la couleur variait soit avec l'épaisseur de la lame, soit avec son inclinaison sur les rayons incidents. — En continuant l'étude de ce phénomène, Arago remarqua qu'on ne l'observait plus lorsque le ciel sur lequel on regardait la lame était uniformément couvert, et qu'enfin, par les temps bien purs, l'éclat des teintes variait avec la région du ciel qui éclairait la lame, et aussi avec la hauteur du soleil sur l'horizon.

Or Arago avait observé, d'autre part, que la lumière atmosphérique paraît naturelle dans les jours sombres, et plus ou moins polarisée lorsque le ciel est pur.

Il en conclut que la condition essentielle de la production des phénomènes que la lame de mica lui avait présentés était la polarisation de la lumière incidente; et, en effet, il s'assura bientôt que, pour reproduire le fait de la coloration des images avec le plus vif éclat, il suffisait d'employer, pour éclairer la lame, des rayons réfléchis, par un miroir de verre non étamé, sous l'angle de 35° avec la surface.

Arago s'assura que tous ces phénomènes se produisaient encore lorsqu'aux minces lames de mica on substituait des lames aussi très-minces de sulfate de chaux ou de quartz parallèles à l'axe. — Puis, à la place de ces lames minces, il mit une plaque de cristal de roche, taillée perpendiculairement à l'axe et ayant environ 6 millimètres d'épaisseur. Les images se colorèrent encore de teintes brillantes et complémentaires. Par ce premier caractère, le nouveau phénomène se rapprochait de celui que le mica avait présenté; mais il en différait en plusieurs points essentiels. Lorsque le faisceau qui tombait sur la lame de mica était bien polarisé, on pouvait, en donnant des positions convenables à cette lame et au prisme analyseur, faire disparaître une des images; rien de pareil ne se présentait plus lorsque le quartz perpendiculaire avait été substitué à la lame mince. Les

deux images subsistaient toujours, quelles que fussent les positions relatives du plan de polarisation primitif et de l'analyseur.

Arago remarqua encore une autre différence non moins saillante entre les deux ordres de phénomènes. Dans le cas d'une lame mince parallèle à l'axe, les teintes des deux images se changeaient l'une dans l'autre, en passant par le blanc lorsqu'on amenait la section de l'analyseur à être parallèle ou perpendiculaire à celle de la lame; mais pendant chaque quart de révolution de l'analyseur, chacune conservait sa nuance; le seul changement qu'elle éprouvait était une diminution ou un accroissement de vivacité. Avec le quartz perpendiculaire, au contraire, les couleurs de chaque image changent avec l'angle compris entre le plan de polarisation primitif et la section principale du spath placé contre l'œil.

Les effets produits par le quartz perpendiculaire, et ceux que l'on obtient avec les lames minces constituent donc deux séries de phénomènes distincts : nous consacrerons ce chapitre à l'étude des premiers.

§ 2. — ACTION ROTATOIRE DU CRISTAL DE ROCHE.

Après avoir découvert l'action que les quartz perpendiculaires exercent sur la lumière polarisée, Arago reconnut que les phénomènes de coloration par lesquels elle se manifestait pouvaient s'expliquer en admettant qu'après la transmission à travers le cristal, les plans de polarisation des rayons des différentes teintes qui composaient le faisceau blanc primitif se trouvaient tous orientés dans des directions différentes. Pour montrer comment cette hypothèse conduit à l'explication des teintes, soit une série de rayons simples des différentes nuances prismatiques, et dont les intensités

$$R, \; O, \; J, \; V, \; B \ldots$$

aient entre elles des rapports tels que leur ensemble constitue de la lumière blanche. Supposons que ces rayons soient polarisés dans des plans différents, et soient a, b, c, d,... les angles que leurs plans de polarisation font avec la section principale de l'analyseur.

Les intensités de leurs images ordinaires seront respectivement :

$$R\cos^2 a, \quad O\cos^2 b, \quad J\cos^2 c \ldots$$

celles de leurs images extraordinaires :

$$R \sin^2 a, \quad O \sin^2 b, \quad J \sin^2 c \ldots$$

Or, les éléments de différentes couleurs qui entrent dans l'image ordinaire totale M ne s'y trouvent plus dans la même proportion que dans la lumière blanche.

M sera donc colorée. — Il en sera de même de l'image extraordinaire N, et de plus ces deux faisceaux seront complémentaires, car si on les ajoute on reproduit R + O + J + ..., c'est-à-dire de la lumière blanche.

Arago ne paraît pas avoir poussé plus loin ses recherches sur la polarisation rotatoire, et ce fut M. Biot qui découvrit les lois fondamentales du phénomène.

Recherches de M. Biot. — M. Biot reconnut d'abord que lorsqu'un rayon simple et polarisé traverse normalement une lame de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, son plan de polarisation tourne d'un angle proportionnel à l'épaisseur de la lame. — Il reconnut ensuite que l'angle de rotation varie avec la couleur du rayon ; qu'il est minimum pour le rouge, maximum pour le violet ; et enfin, par une série de mesures très-précises, il assigna les valeurs suivantes aux rotations que les rayons des teintes principales du spectre solaire éprouvent en traversant un millimètre de quartz.

TABLEAU DES ROTATIONS IMPRIMÉES AUX PLANS DE POLARISATION DES DIVERS RAYONS SIMPLES PAR 1^{mm} DE QUARTZ.

DÉSIGNATION DES RAYONS.	Arc de rotation répondant à 1^{mm} de quartz en degrés et fractions décimales de degrés.
Rouge extrême	17°,496
Limite du rouge et de l'orangé	20°,478
— de l'orangé et du jaune	22°,314
— du jaune et du vert	25°,675
— du vert et du bleu	30°,046
— du bleu et de l'indigo	34°,572
— de l'indigo et du violet	37°,683
Violet extrême	44°,083

« Pour obtenir ces mesures, M. Biot introduisit dans la chambre obscure un rayon solaire fixe, très-mince, qu'il brisa par un prisme très-réfringent. Puis, en faisant tourner lentement le prisme autour de son axe, il fit tomber successivement les différentes portions du spectre sur une glace noire, inclinée à leur direction de manière à les réfléchir polarisées. De là, les rayons réfléchis arrivaient à un prisme de spath d'Islande placé au centre d'un cercle divisé et porté sur une alidade qui permettait de tourner sa section principale dans toutes les directions possibles autour du plan de polarisation primitif. Dans le trajet des rayons, il plaça une plaque de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe, et il la plaça de manière que la transmission s'opérât bien parallèlement à cet axe; puis, tournant lentement l'alidade qui portait le prisme de spath d'Islande, il chercha l'angle dans lequel il fallait amener la section principale pour que le rayon simple transmis à travers la plaque se réfractât tout entier extraordinairement, et comme une opération semblable avait été faite avant l'interposition du quartz, l'angle compris entre les deux positions successives de la section principale de l'analyseur était celui dont le plan de polarisation primitif avait été transporté par la rotation. » (Biot, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1817.)

Dans les expériences de M. Biot, le polariseur était donc une glace noire. Il est souvent plus commode d'employer au même usage un prisme de Nicol diaphragmé. L'étroitesse du diaphragme devient un garant de l'homogénéité des rayons qui composent le faisceau dont on fait usage.

Calcul des teintes. — Après avoir ainsi déterminé les lois fondamentales de l'action rotatoire du quartz et assigné les valeurs numériques de la rotation imprimée aux plans de polarisation des divers rayons par un millimètre de cette substance, M. Biot appliqua au calcul des teintes obtenues dans la lumière blanche la règle donnée par Newton pour la composition des couleurs (voir p. 239). Ce que nous avons dit au commencement de ce chapitre indique la marche à suivre dans ce genre de calcul. Seulement il faut remarquer que, dans chacune des nuances principales du faisceau blanc primitif, il y a en réalité une infinité de rayons de longueurs d'onde différentes; les plans de polarisation de ces rayons sont déviés de quantités inégales, et pour des épaisseurs de quartz un peu grandes, les différences des rotations aux limites extrêmes de chaque couleur peuvent être considérables. L'expression de la part que chacune des sept couleurs prismatiques donne à l'image ordinaire ou à l'image extra-

ordinaire ne peut donc s'obtenir que par des sommations de séries renfermant chacune un nombre de termes pour ainsi dire infini. M. Biot a effectué ces sommations de la manière suivante : soit pour une certaine épaisseur e, a et a', les rotations des rayons placés aux deux limites d'une couleur prismatique, du rouge par exemple, et par conséquent $a' - a$, l'angle de dispersion relatif à cette couleur. Concevons le rouge divisé en un nombre $\frac{a'-a}{dx}$ de parties caractérisées par cette condition que pour la première l'arc de rotation soit a, $a + dx$ pour la seconde, $a + 2\,dx$ pour la troisième, etc., et admettons, ce qui n'est pas évident *à priori*, que ces différentes portions de rouge soient égales entre elles, c'est-à-dire qu'elles soient toutes dans le même rapport avec chacune des 68 parties du rouge prismatique de Newton, etc.

Si l'on représente par i l'angle de la section principale de l'analyseur avec le plan de polarisation primitif, celle de ces portions du rouge prismatique qui répond à l'angle de rotation x donnera à l'image ordinaire

$$\frac{R}{a'-a}\,dx\cos^2(x-i),$$

et à l'image extraordinaire

$$\frac{R}{a'-a}\,dx\sin^2(x-i),$$

et pour avoir le poids qu'il faudra placer au centre de gravité de l'arc du rouge, dans le calcul des teintes totales des deux images, il faudra faire les sommes

$$\int_a^{a'}\frac{R}{a'-a}\cos^2(x-i)dx \quad \text{et} \quad \int_a^{a'}\frac{R}{a'-a}\sin^2(x-i)dx.$$

L'intégration par parties donne immédiatement pour ces deux sommes

$$R_1 = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\sin(a'-a)}{a'-a}\cos(a'+a-2i)\right],$$

$$R_2 = \frac{R}{2}\left[1 - \frac{\sin(a'-a)}{a'-a}\cos(a'+a-2i)\right],$$

et ainsi de suite pour les autres couleurs.

Pour toutes les valeurs possibles de e, les teintes ainsi calculées par M. Biot se sont trouvées d'accord avec l'expérience.

Le développement des couleurs est peu considérable lorsque la lame de quartz destinée à le produire est très-mince, et il disparaît complétement lorsque cette lame a une épaisseur un peu considérable. Les considérations précédentes expliquent ce double phénomène. Dans le premier cas, en effet, les angles x, x', x''... sont très-petits; $\cos(i-x)$, $\cos(i-x')$, $\cos(i-x'')$... sont tous presque égaux entre eux. — Il en est de même de $\sin(i-x)$, $\sin(i-x')$.... Dès lors dans chaque image les teintes élémentaires composantes sont à peu près en même proportion que dans la lumière blanche. Les couleurs ne peuvent donc pas être fort vives.

Dans le second, c'est-à-dire lorsque e est suffisamment grand, $a'-a$ devient très-grand par rapport à son sinus. Par conséquent R_1 et R_2 se réduisent sensiblement à $\frac{R}{2}$. Il en est de même pour les autres couleurs. Alors les poids à appliquer aux centres de gravité des divers arcs représentatifs des couleurs sont à peu près proportionnels à R, O..., c'est-à-dire aux longueurs mêmes des arcs, et le point d'application de la résultante générale s'approche de plus en plus de coïncider avec le centre du cercle de Newton, ce qui est la condition de la blancheur.

Pour effectuer les calculs précédents, nous avons admis que, au moins dans l'étendue de chaque couleur, l'ensemble des rayons dont les rotations sont comprises entre deux limites déterminées constitue une quantité de lumière proportionnelle à la distance qui sépare ces limites. Cette hypothèse est purement gratuite, mais l'accord général qui existe entre les teintes observées et calculées montre qu'elle est suffisante pour représenter le développement chromatique des phénomènes. Au reste, il n'est pas nécessaire de l'admettre pour expliquer le fait fondamental de l'affaiblissement que subissent les teintes quand l'épaisseur du quartz augmente.

Soit en effet u la quantité de lumière donnée par la somme des rayons dont les rotations sont comprises entre a et x, l'hypothèse de M. Biot revient à admettre que l'on a $du = K\,dx$, K étant une constante. Supposons, et cette hypothèse comporte toute la généralité désirable, supposons que l'on ait $du = Kx^m dx$, on aura d'abord

$$\int_a^{a'} du = K\int_a^{a'} x^m dx = K\frac{1}{m+1}(a'^{m+1} - a^{m+1});$$

puis, en intégrant par parties, on a

$$\int x^m \sin^2(x-i)\,dx = -x^m \sin(x-i)\cos(x-i) + \int \cos(x-i)\left\{x^m \cos(x-i) + m\sin(x-i)x^{m-1}\right\}dx,$$

d'où

$$\int x^m \sin^2(x-i)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+1}x^{m+1} - x^m \sin(x-i)\cos(x-i) + \int m x^{m-1}\sin(x-i)\cos(x-i)\,dx\right\}.$$

On en déduit aisément que le rapport

$$\frac{\int_a^{a'} x^m \sin^2(x-i)\,dx}{\int_a^{a'} du}$$

est égal à

$$\frac{1}{2\,\mathrm{K}}\,\frac{m+1}{(a'^{m+1} - a^{m+1})}\left\{\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + \mathrm{Z}\right\}.$$

Z étant égal à

$$-a'^m \sin 2(a'-i) + a^m \sin 2(a-i) + \int_a^{a'} m x^{m-1}\sin(x-i)\cos(x-i)\,dx,$$

cette somme est certainement inférieure à

$$a'^m + a^m + ma'^m + ma^m$$

Or on a

$$\frac{a'^m}{a'^{m+1} - a^{m+1}} = \frac{1}{a' - \left(\frac{a}{a'}\right)^m a}.$$

Cette quantité est positive et, a restant constant, elle diminue lorsque a' augmente, et par conséquent, pour une valeur suffisante de a', $\frac{\mathrm{Z}}{a'^{m+1} - a^{m+1}}$ deviendra négligeable devant $\frac{1}{m+1}$,

surtout si l'on admet, comme on doit le faire, que m n'est jamais supérieur à 3, et alors

$$\int_a^{a'} x^m \sin^2(x-i)\,dx : \int_a^{a'} du$$

devient constant et égal à $\frac{1}{2K}$.

Ainsi, pour qu'il y ait coloration, il faut que l'épaisseur des lames ne soit ni trop petite ni trop grande.

De plus, il faut que la lumière incidente soit polarisée.

Pour indiquer comment on peut théoriquement se rendre raison de la nécessité de cette condition, nous nous bornerons à la remarque suivante. Supposons un rayon de lumière homogène tellement constitué qu'une molécule d'éther située sur ce rayon accomplisse toujours des vibrations rectilignes, de même amplitude, normales à la direction du rayon et orientées successivement dans tous les azimuts possibles, sous cette condition que pendant la durée de la sensation elle accomplisse le même nombre de vibrations dans chacun de ces azimuts. Soit i l'angle que le plan de polarisation de l'un de ces mouvements fait avec la section principale de l'analyseur, et x l'angle de rotation correspondant. L'image ordinaire O aura pour intensité $\cos^2(x-i)$, l'image extraordinaire E sera $\sin^2(x-i)$; pour le mouvement polarisé dans l'azimut $90 + i$, l'image ordinaire O′ serait $\sin^2(x-i)$, et l'autre, E′, serait $\cos^2(x-i)$. — On aurait donc toujours $O + O' = E + E'$, et cela aurait lieu pour toutes les couleurs. — L'impossibilité de toute coloration est une conséquence de cette égalité. Quant à l'hypothèse qui nous y a conduit, il sera facile de montrer qu'elle résume l'idée la plus générale qu'on puisse se faire de la constitution d'un rayon de lumière naturelle.

Teinte de passage. — L'interposition d'un quartz perpendiculaire sur le trajet d'un rayon blanc polarisé empêche que l'on n'arrive à éteindre l'une des images par une rotation convenable de l'analyseur sur lequel on reçoit ce rayon. Toutefois, dans le cas où l'épaisseur de la lame active est assez faible, quand l'analyseur a été primitivement orienté de façon à éteindre l'image extraordinaire, on peut, même après l'action du quartz, arriver à la rendre de nouveau très-faible en tournant l'analyseur d'un angle à peu près égal à celui dont il eût fallu le déplacer pour obtenir l'extinction complète, si l'on avait opéré avec une lumière homogène jaune ; alors cette image est très-sombre et d'une teinte gris de lin un peu vineux, elle résulte de la com-

binaison des couleurs rouge, bleue et violette qui échappent à l'extinction. La teinte dont il est ici question a été nommée *teinte sensible* ou *teinte de passage*. Elle est facilement reconnaissable. Quand on l'a obtenue, les moindres déplacements de l'analyseur la font virer au rouge ou au bleu : au bleu, si on ramène l'analyseur vers le zéro ; au rouge, dans le cas contraire ; et entre les limites qui répondent à de faibles rotations, les angles dont il faut tourner l'analyseur pour l'obtenir sont proportionnels aux épaisseurs, et alors l'observation de cette teinte peut être très-avantageusement substituée à celle de l'extinction de l'image extraordinaire donnée par un rayon homogène, parce qu'il est, en général, plus facile de juger de l'azimut auquel elle répond que d'apprécier celui pour lequel a lieu une extinction complète.

Par exemple, pour connaître l'épaisseur d'une substance active quelconque, qui équivaut à un millimètre de quartz, on partira de ce fait que pour un millimètre de quartz, la teinte de passage répond à un azimut de 24° 30′, et alors, après avoir trouvé l'épaisseur e', pour laquelle on l'obtient avec la substance employée, dans un azimut φ, qui ne soit pas trop considérable, on cherchera par une simple proportion l'épaisseur e, pour laquelle on l'obtiendrait à l'azimut 24° 30′. La proportion à résoudre est $\frac{e}{e'} = \frac{24^\circ\,30'}{\varphi}$.

Cristal de roche dextrogyre, Cristal lævogyre. — A côté des faits précédents, il en est un autre que l'on doit encore signaler pour achever de définir et de coordonner l'ensemble des phénomènes de rotation produits par le cristal de roche.

Tous les échantillons de cette substance ne font pas tourner dans le même sens le plan de polarisation des rayons. Si l'on suppose que le rayon soit horizontal et primitivement polarisé dans un plan vertical, l'observateur qui analyse ce rayon avec un spath devra placer verticalement la section principale de son analyseur pour éteindre l'image extraordinaire. Or, quand l'action du quartz aura détruit l'extinction, il faudra, pour l'obtenir de nouveau, faire tourner l'extrémité supérieure de la section du spath, tantôt de gauche à droite, et tantôt de droite à gauche, suivant les échantillons de quartz employés. — Les premiers sont dits dextrogyres, les autres lævogyres. — Du reste, l'expérience prouve qu'à égalité d'épaisseurs, leurs actions absolues sont égales.

§ 3. — ACTION DES LIQUIDES. — POUVOIRS ROTATOIRES MOLÉCULAIRES.

Le cristal de roche n'est pas la seule substance qui jouisse de l'action rotatoire. Peu de temps après les premiers travaux que nous venons d'exposer, M. Biot la découvrit dans l'essence de térébenthine, et depuis on la trouva dans un grand nombre d'autres liquides. Le tableau suivant montre à quel degré un certain nombre de ces corps la présentent, et il fait voir en même temps que le sens de la rotation imprimée au plan de polarisation du rayon peut changer avec la nature des substances actives, de telle sorte que ces substances se divisent en deux classes distinctes : celles qui tournent vers la droite le plan de polarisation, et celles qui le tournent à gauche. Les premières sont dites *dextrogyrès,* les autres *lævogyres.*

TABLEAU DES ROTATIONS IMPRIMÉES AUX RAYONS ROUGES PAR DIFFÉRENTES HUILES ESSENTIELLES PRISES SOUS UNE ÉPAISSEUR DE 200^{mm}.

NOMS DES SUBSTANCES.	CLASSE de la substance active.	ANGLE de rotation des rayons rouges.
Huile essentielle de térébenthine......	Lævogyre.	— 59°,21
— — de citron...........	Dextrogyre.	+ 110°,53
— — de bergamote........	Dextrogyre.	+ 38°,16
— — de naphte...........	Lævogyre.	— 15°,21
— — d'anis...............	Lævogyre.	— 1°,51
— — de fenouil..........	Dextrogyre.	+ 26°,32
— — de carvi............	Dextrogyre.	+ 131°,58
— — de lavande..........	Dextrogyre.	+ 4°,04
— — de menthe..........	Lævogyre.	— 32°,28

TABLEAU DES ROTATIONS IMPRIMÉES AUX RAYONS ROUGES PAR DES SOLUTIONS DE DIFFÉRENTS SUCRES.

NOMS DES SUCRES.	PROPORTION de la substance active dans l'unité de poids de la solution.	DENSITÉ de la solution.	ROTATION à travers une épaisseur de 152mm.
Sucre de cannes candi.....	0,2499	1,1052	+ 23,28'
Idem idem	0,5005	1,2311	+ 51,7'
Idem idem	0,6506	1,311	+ 70,11'
Sucre de lait cristallisé....	0,1401	1,0537	+ 10,21'
Sucre d'amidon...........	0,64877	1,21599	+ 48,30'

Tous ces sucres sont dextrogyres. D'autres matières sucrées sont, au contraire, lævogyres.

M. Biot s'est assuré que toutes les lois qu'il avait trouvées en étudiant l'action rotatoire du cristal de roche régissent également celle que les liquides exercent, et de plus il découvrit un nouveau fait que nous allons maintenant faire connaître.

Pouvoir rotatoire moléculaire. — Si l'on prend deux dissolutions de sucre faites de telle sorte que sous le même volume elles contiennent des poids de sucre qui soient entre eux dans un rapport déterminé, égal à R par exemple, on trouve que des épaisseurs égales de ces deux solutions font éprouver au plan de polarisation d'un même rayon des déviations qui ont aussi entre elles un rapport égal à R. — L'eau, par elle-même, est inactive, et, dans les deux solutions dont il s'agit ici, les densités de la substance active, rapportées au volume total, ont entre elles un rapport égal à celui que présentent les actions rotatoires produites par d'égales épaisseurs des liquides. M. Biot admet alors que si, par des moyens quelconques, on pouvait faire varier régulièrement les distances des molécules d'un corps actif, l'action rotatoire de ce corps ainsi dilaté ou comprimé, sans autre modification dans l'arrangement intime de ses molécules, varierait proportionnellement à sa densité; et dès

lors, se plaçant dans cette hypothèse, il calcula pour les différentes substances soumises à ses expériences ce que serait l'angle de rotation qu'elles imprimeraient aux rayons rouges sous une épaisseur de 1 millimètre et avec une densité égale à 1.

Cet angle, il l'a appelé pouvoir rotatoire moléculaire de la substance.

Ainsi, une plaque de quartz de 1 millimètre fait éprouver aux rayons rouges moyens une rotation de 19°; le poids spécifique de ce corps est 2,6; multiplions l'angle 19 par le rapport de 1 à 2,6, et le produit $\frac{19}{2,6} = 7°, 30'$ sera le pouvoir rotatoire moléculaire du quartz.

Pour le sucre, ce pouvoir rotatoire moléculaire a été trouvé égal à 0°33',30", soit en opérant sur des plaques de sucre fondu, transparent et amorphe, soit en le déduisant par le calcul de l'étude des rotations produites par des dissolutions de cette substance.

Voici d'une manière générale comment on peut, en observant l'action d'une dissolution, en déduire le pouvoir rotatoire de la substance dissoute, dans l'hypothèse où le dissolvant, inactif par lui-même, ne fait que dilater uniformément la substance active.

Soit une solution renfermant un poids p de substance active et un poids p' de dissolvant inactif, d le poids spécifique de la solution et α l'angle de rotation produit par 1 millimètre de la solution. Si tout le dissolvant disparaissait, les molécules actives restant à leurs places respectives, l'action produite par 1 millimètre resterait la même, mais le poids spécifique du milieu deviendrait $d\frac{p}{p+p'}$. Ainsi α est la rotation produite par 1 millimètre de la substance active prise sous un poids spécifique égal à $d\frac{p}{p+p'}$. Donc le pouvoir moléculaire ρ de cette substance est $\alpha \cdot \frac{p+p'}{pd}$, ou encore $\frac{\alpha}{d} \cdot \frac{p+p'}{p}$.

L'équation

$$\rho = \frac{\alpha}{d} \cdot \frac{p+p'}{p}$$

peut s'écrire

$$\frac{\alpha}{d} = \rho \frac{p}{p+p'}$$

Elle indique que le pouvoir rotatoire moléculaire $\frac{\alpha}{d}$ de la solution est égal au pouvoir moléculaire ρ de la substance active, multiplié par le rapport $\frac{p}{p+p'}$, qui exprime la proportion de substance active qui entre dans l'unité de poids de la solution.

Il est facile de voir que, si le dissolvant était actif et avait un pouvoir moléculaire ρ', l'équation précédente deviendrait

$$\frac{\alpha}{d} = \rho \frac{p}{p+p'} + \rho' \frac{p'}{p+p'},$$

mais toujours dans l'hypothèse où la solution ne ferait que dilater uniformément chacune des substances qui la forment; dans les autres cas, on ne peut rien affirmer touchant la relation qui doit exister entre l'action de la solution et celles des corps qu'elle renferme.

§ 4. — Corrélation du pouvoir rotatoire avec la nature et l'état physique des corps.

Les corps inscrits au tableau de la page 472 sont tous des produits immédiats du règne végétal.

Un certain nombre des substances que l'on retrouve le plus généralement dans le règne animal jouissent aussi de l'action rotatoire. Le sérum du sang et tous les liquides albumineux sont dans ce cas.

Souvent ces produits immédiats de l'organisation végétale ou animale présentent l'action rotatoire sous les différents états physiques qu'ils peuvent affecter. De plus, ils la portent avec eux dans leurs composés, et quelquefois même ils la transmettent jusqu'à leurs dérivés.

Ainsi M. Biot a constaté que la vapeur d'essence de térébenthine jouit de l'action rotatoire, tout aussi bien que l'essence elle-même. Il a vu que les tartrates agissent comme l'acide qu'ils renferment; il a constaté que les combinaisons d'acide chlorhydrique et d'essence de térébenthine sont des substances actives. Enfin il a retrouvé, dans le sucre fondu et transparent, le même pouvoir rotatoire que dans les solutions sucrées.

Tous ces faits ont reçu de nouvelles confirmations.

Ainsi le sulfate de strychnine possède, soit à l'état cristallin, soit à l'état de solution, la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'un rayon qui le traverse, et l'action rotatoire découverte par M. Pasteur dans l'asparagine se retrouve dans les

acides aspartique et malique que l'on en peut déduire, tandis que les mêmes acides, dérivés d'un fumarate d'ammoniaque inactif par lui-même, sont dépourvus de toute puissance rotatoire, et il en est de même de tous leurs composés.

Il est beaucoup plus rare de trouver l'action rotatoire dans les corps qui appartiennent au règne minéral, et, quand on l'y trouve, elle paraît, jusqu'ici au moins, liée plutôt à l'état du corps qu'à sa nature chimique. Le cristal de roche, dans lequel cette action est si énergique, est la seule variété de silice pure qui la présente; le quartz amorphe, les silicates solides ou dissous en sont également dépourvus, et le chlorate de soude perd, lorsqu'il est dissous, l'action qu'il possède à l'état solide et cristallin.

Influence des modifications de la forme cristalline. — Le cristal de roche, le chlorate et le bromate de soude, le cinabre, sont les seules substances minérales proprement dites dans lesquelles on ait jusqu'ici trouvé l'action rotatoire[1]. Or le chlorate de soude appartient au système cubique, le cristal de roche au système rhomboédrique. Il ne paraît donc y avoir aucune connexion entre le type cristallin, auquel on peut rapporter la forme de ces substances, et la propriété qu'elles ont de faire tourner le plan de polarisation de la lumière. Mais des observations très-importantes ont fait voir que dans le cas où une substance est active, des modifications dissymétriques de sa forme sont souvent l'indice de l'existence de cette action, et du sens dans lequel elle s'exerce.

Observations d'Herschell. — La première de ces observations est due à Herschell. Le cristal de roche se présente ordinairement sous forme d'un prisme droit à six pans, terminé par une pyramide à six faces, et souvent les angles solides formés par la réunion des faces de la pyramide avec celles du prisme se trouvent, de deux en deux, modifiés par des facettes inégalement inclinées sur les faces du prisme qu'elles coupent. Ces variétés dissymétriques se partagent en deux groupes qui se distinguent de la manière suivante : lorsqu'un observateur plaçant le prisme verticalement tourne vers lui l'une des arêtes latérales sur lesquelles porte la modification, il voit que cette arête fait des angles aigus inégaux avec les droites suivant lesquelles les deux faces adjacentes du prisme sont coupées par la facette modifiante. Si le plus grand de ces deux angles est à la droite de l'observateur, le cristal est lævogyre; il est dextrogyre dans le cas contraire.

Recherches de M. Pasteur. — Tel est le fait qui résultait des

1. L'action du chlorate de soude a été découverte par M. Marbach, celle du cinabre par M. Descloiseaux.

observations d'Herschell. Ce fait est resté assez longtemps isolé; mais, en 1848, M. Pasteur découvrit un nouvel exemple des relations qui peuvent exister dans les corps actifs entre le sens de la rotation et celui des modifications dissymétriques que peuvent offrir les cristaux de ces substances.

On connaissait deux modifications de l'acide tartrique, identiques par leur composition élémentaire et l'ensemble de leurs propriétés, mais différentes pourtant à certains égards.

La modification la plus commune, l'acide tartrique ordinaire était plus soluble dans l'eau que la variété la plus rare à laquelle on avait donné le nom d'acide paratartrique ou racémique; mais surtout l'acide tartrique en dissolution exerçait sur la lumière une action rotatoire énergique, et l'acide racémique en était dépourvu. D'un autre côté, il résultait des recherches cristallographiques de M. Pasteur que les tartrates et les paratartrates cristallisés présentaient dans leurs formes des modifications dissymétriques analogues à celles que Herschell avait signalées dans le quartz.

Ainsi (Voir *Ann. de phys. et Chimie*, série 3, T24, p. 450) : ... Le tartrate double de soude et d'ammoniaque peut s'obtenir en cristaux d'une grande beauté dérivant d'un prisme droit à base rectangle. La forme primitive ne se rencontre pas. Elle est toujours modifiée, comme l'indique la figure 725, par les facettes

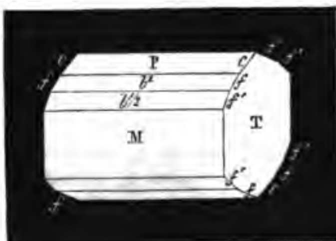


Fig. 725.

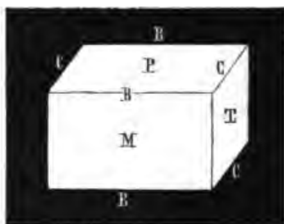


Fig. 726.

b^1 et $b^{\frac{1}{2}}$, et les cristaux complets ont en outre les angles solides tronqués. — Ce sel est hémièdre, et voici dans quel sens il faut prendre ce mot :

Puisque les cristaux dérivent d'un prisme droit à base rectangle, les arêtes B sont identiques, les arêtes C le sont également : les arêtes f et f' sont donc aussi respectivement identiques. Donc, les arêtes f en particulier, lesquelles sont au nombre de huit, devraient, par une simple raison de symétrie,

être toutes modifiées de la même manière, si une seule d'entre elles vient à l'être. Or, il arrive toujours que quatre seulement portent de petites facettes, et les deux arêtes qui sont modifiées à une extrémité du prisme sont placées en sens inverse de celles qui présentent la modification à l'autre extrémité du cristal.

Quand on a posé le cristal devant soi, en mettant les faces P verticales et les faces T horizontales, l'arête *f*, qui à la partie supérieure est *placée à droite de la face* P, *la plus rapprochée du corps de l'observateur*, se trouve une des arêtes de modification; dans ce cas, l'hémiédrie est dite hémiédrie droite.

Elle serait dite hémiédrie gauche, si la modification avait porté sur l'arête *f* placée à gauche de la face P la plus voisine de l'observateur. . . .

Or, continue M. Pasteur, « lorsque j'eus découvert l'hémiédrie de tous les tartrates, je me hâtai d'étudier avec soin le paratartrate double de soude et d'ammoniaque, et je vis que les facettes dissymétriques correspondantes à celles des tartrates isomorphes étaient placées, relativement aux faces principales du cristal, tantôt à droite et tantôt à gauche sur les différents cristaux que j'avais obtenus. Je séparai avec soin les cristaux hémièdres à droite des cristaux hémièdres à gauche, j'observai séparément leurs dissolutions dans l'appareil de M. Biot, et je vis que les cristaux hémièdres à droite déviaient à droite, que les cristaux hémièdres à gauche déviaient à gauche le plan de polarisation. »

A ce fait si important pour la théorie de la polarisation rotatoire, M. Pasteur en ajouta deux autres également neufs dans la science; il isola l'acide des cristaux hémièdres à droite et celui des cristaux hémièdres à gauche, et les mettant en présence en proportions égales, il les vit se combiner avec dégagement de chaleur pour reproduire l'acide paratartrique inactif qui lui avait servi de point de départ.

L'acide lævogyre, l'acide dextrogyre, sont donc unis dans l'acide inactif. — La combinaison aux bases les sépare quelquefois, quoique cela n'ait pas toujours lieu ; mais il est des forces d'une autre espèce qui peuvent opérer la séparation. M. Pasteur fit dissoudre dans l'eau, en proportions égales, du tartrate de potasse tournant à droite et du tartrate tournant à gauche ; dans cette eau il mit un peu de levure de bière, de façon à en déterminer la fermentation, et il constata que le tartrate gauche seul était détruit par cette action chimique spéciale.

De tous ces faits il résulte, comme nous l'avons énoncé en commençant ce paragraphe, que, dans les substances actives, des modifications dissymétriques dans la forme cristalline peuvent

être un indice du sens dans lequel la rotation s'opère, et aussi un indice de changements importants dans quelques propriétés de la substance dans laquelle on les observe ; il n'est besoin de rien ajouter pour faire voir quel nouvel intérêt s'attache maintenant à l'étude de ces particularités curieuses que présente la structure cristalline des corps hémièdres.

§ 5. — SACCHARIMÉTRIE.

Procédé de M. Biot. — L'étude des phénomènes que nous venons de décrire a conduit M. Biot à découvrir un procédé d'analyse chimique très-employé maintenant dans l'industrie sucrière.

Lorsqu'on dissout du sucre dans l'eau, la solution est d'autant moins active qu'elle est moins concentrée, et l'expérience prouve du reste que l'eau employée à dissoudre le sucre peut contenir quelque peu de sulfates, chlorures, ou plus généralement des sels minéraux qui se trouvent dans les jus de cannes ou de betteraves, sans qu'il en résulte aucune modification dans l'action du sucre proprement dit. Cela posé, on fait une solution de sucre candi pur dans l'eau distillée, de telle sorte qu'un litre en renferme p grammes. On cherche la déviation n' produite par un tube de longueur déterminée l rempli de cette solution. On prend ensuite p grammes du sucre impur que l'on veut analyser, on les dissout dans l'eau, de façon que la solution occupe encore un litre, et l'on cherche la rotation n' que produit le tube de longueur l plein de cette solution : le rapport $\frac{n'}{n}$ représente la richesse du sucre brut éprouvé.

A cela il faut ajouter la remarque suivante :

Le sucre cristallisable, celui que l'on emploie dans les usages domestiques, est dextrogyre. Mais il existe aussi d'autres sucres non cristallisables qui sont lævogyres. Ces deux sortes de sucres peuvent se trouver mélangés dans les sirops que l'on produit d'abord pour les transformer ensuite, après raffinage, en sucres blancs ordinaires, et l'on conçoit à combien d'erreurs le mélange de ces deux principes dans un sucre brut pourrait conduire sur la richesse réelle de celui-ci.

Ce qui permet de résoudre la difficulté pratique que nous signalons, c'est que le sucre de cannes sous l'action des acides peut être *interverti*, c'est-à-dire transformé en sucre lævogyre ; et l'on a déterminé l'angle kn dont se trouverait dévié le plan

de polarisation d'un rayon rouge, si on lui faisait traverser une longueur l d'une solution de sucre interverti renfermant p grammes de ce sucre par litre. On connait d'ailleurs l'angle n de rotation qui aurait lieu dans les mêmes conditions sous l'action du sucre dextrogyre.

Ceci posé, soit q le poids de la matière sucrée contenue dans un litre de la solution soumise à l'expérience, soient x et y les poids de sucres dextrogyres et lævogyres qui forment en s'ajoutant le poids total q de la matière sucrée.

Soit enfin ω l'angle de déviation observé :

On a

$$\omega = \frac{nx}{p} - \frac{kny}{p} \quad \text{ou} \quad p\,\omega = nx - kny.$$

Alors on intervertit le sucre dextrogyre, et l'angle de rotation est ω'. Si les opérations chimiques qui ont amené l'inversion ne produisaient aucun changement de volume, on aurait

$$p\,\omega' = knx + kny,$$

d'où l'on déduirait

$$p(\omega' - \omega) = (k + 1)\,nx.$$

x serait donc connu.

En réalité l'addition d'acide chlorhydrique qui produit l'inversion accroît de $\frac{1}{10}$ le volume de la liqueur, et dès lors il faut,

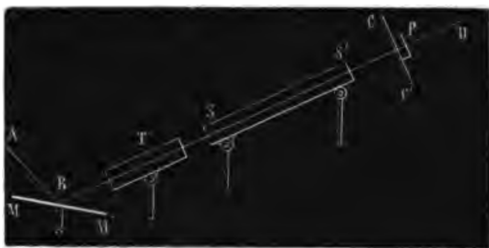


Fig. 727.

à la place de ω' dans la précédente formule, mettre $\omega' \frac{11}{10}$. Mais cela n'amène aucune complication dans les résultats.

La figure 727 donne une idée générale de l'appareil employé par M. Biot dans ses études sur les liquides.

MM', la glace noire, destinée à polariser la lumière et à la réfléchir le long de l'axe du cylindre diaphragmé T; SS', tube qui renferme le liquide; P, prisme analyseur dont la rotation se mesure sur le cercle gradué CC'.

Saccharimètre de MM. Soleil et Duboscq. — MM. Soleil et Duboscq ont imaginé un appareil saccharimétrique fort commode dans les applications, et dont le principe mérite une attention toute spéciale.

Les plaques de cristal de roche sont, avons-nous dit, tantôt dextrogyres et tantôt lævogyres, suivant les échantillons dont elles proviennent. Mais, quoique de sens différents, les pouvoirs rotatoires de ces deux variétés de quartz sont égaux en grandeur absolue. Ceci posé, concevons une plaque de cristal formée de deux lames l'une dextrogyre, l'autre lævogyre, d'épaisseurs bien égales, et se touchant exactement par une facette plane, perpendiculaire à la surface sur laquelle doivent tomber les rayons.

Si l'on vient à répéter avec cette plaque double l'expérience fondamentale d'Arago, en prenant soin que les sections principales du polariseur et de l'analyseur soient ou parallèles ou perpendiculaires entre elles, rien de particulier ne se remarque d'abord. La plaque, dans toute son étendue, présente une teinte uniforme, celle qui répond à son épaisseur : en effet les quantités $cos^2(+x)$ et $cos^2(-x)$ sont égales entre elles; il en est de même des autres expressions : 1° $sin^2(+x)$ et $sin^2(-x)$, 2° $cos^2(x-90)$ et $cos^2(-x-90)$, 3° $sin^2(x-90)$ et $sin^2(-x-90)$, et, d'après ce que nous avons vu p. 463, l'égalité de ces quantités entraîne l'identité des teintes des images ordinaires et aussi des images extraordinaires des deux moitiés de la plaque. Mais pour distinguer la plaque à 2 rotations d'une plaque simple de même épaisseur, il suffit de placer successivement contre chacune, soit une plaque simple de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, soit un tube, une auge, renfermant un peu de liquide actif, et d'analyser le faisceau transmis à travers le système. Dans le second cas, le faisceau prend une couleur différente, et rien de plus; dans le premier, il se trouve partagé en deux portions de teintes différentes; et il en doit être ainsi, car en juxtaposant la lame auxiliaire simple à la plaque à deux rotations, on produit le même effet que si l'on accroissait l'épaisseur de l'une des moitiés de cette dernière et qu'on diminuât l'autre d'une même quantité. Le faisceau transmis est donc composé de deux parties juxtaposées ayant traversé des épaisseurs différentes d'une même substance

active. Sous l'action de l'analyseur ces deux portions doivent donc prendre des teintes différentes.

Il en résulte qu'une plaque à deux rotations peut être très-avantageusement employée pour reconnaître si un corps est ou non doué du pouvoir rotatoire. Mais, pour que ce procédé d'investigation ait toute la sensibilité dont il est susceptible, il faut que, d'elle-même, la lame donne sur ses deux moitiés la teinte de passage. Alors, en effet, les moindres changements de son épaisseur effective se traduisent par des différences de coloration très-prononcées. Or, pour trouver l'épaisseur de la plaque qui satisfait à cette condition, on raisonnera de la manière suivante :

Si la section principale de l'analyseur et celle du polariseur sont rectangulaires entre elles, l'intensité de l'image extraordinaire est donnée par une suite de termes de la forme $A^2 sin^2(x - 90)$. Soit x_j la valeur de x pour les rayons jaunes; puisque ces rayons doivent disparaître de l'image, il faudra que l'épaisseur y soit telle que :

$$sin^2 (90 - x_j) = 0, \text{ d'où : } x_j = 90°; \text{ et}$$

comme pour 1^{mm}, $x_j = 23°99$, il faudra que l'épaisseur y soit égale à $1^{m} \dfrac{90}{23°99} = 3^{mm}75$.

Si les sections étaient parallèles, la teinte résulterait de la composition d'une série de rayons dont les intensités auraient des expressions de la forme $A^2 sin^2 x$. Pour que l'un de ces termes disparût, il faudrait que la valeur de $sin\ x$ correspondante fût 0, et comme la solution qui consisterait à prendre une plaque d'épaisseur nulle est une solution illusoire, on en déduit que x doit être égal à $n\pi$; pour $n = 1$, $y = 7^{mm}50$ les valeurs supérieures de n répondraient à des plaques trop épaisses.

Compensateur. — Après avoir ainsi construit des plaques à deux rotations, éminemment propres à manifester l'existence du pouvoir rotatoire dans une solution, MM. Soleil et Duboscq ont construit un compensateur d'un genre tout à fait nouveau et à l'aide duquel on détermine immédiatement l'épaisseur de quartz à laquelle équivaut le tube plein de liquide actif. Il est formé de trois pièces de quartz distinctes : 1° une lame dextrogyre ayant une épaisseur uniforme; 2° un ensemble de deux prismes rectangulaires lævogyres taillés sous un angle très-aigu, le même pour tous les deux; les faces opposées à l'angle droit sont superposées et les deux prismes peuvent glisser lentement l'un sur

l'autre en constituant toujours une lame à faces parallèles; seulement l'épaisseur de cette lame varie avec la position relative des deux prismes mobiles. Elle est égale à celle de la lame simple sous-jacente lorsque les deux prismes sont exactement superposés et ne débordent pas l'un sur l'autre. Dans les autres cas, elle est plus grande ou plus petite, en sorte que le compensateur entier agit tantôt comme lame tournant à droite, et tantôt comme lame tournant à gauche.

L'épaisseur de cette lame variable est indiquée par la graduation tracée le long du cadre de cuivre qui règle la marche des prismes mobiles. Il suffit donc de régler la position de ces derniers de manière à détruire l'action que le tube avait exercée sur les rayons transmis à travers la plaque à deux rotations, pour que l'on puisse assigner l'épaisseur de la lame de quartz ayant même action rotatoire que le tube plein de solution active.

Au lieu de graduer le compensateur de manière à connaître immédiatement l'épaisseur de quartz à laquelle il équivaut, on peut inscrire en face des divisions les richesses en sucre des solutions qui, sous une longueur de 1 décimètre, se trouvent compensées par l'appareil dans la position correspondante.

Coloration de l'image. — Nous n'insistons pas sur ce point, et nous nous bornons à ajouter quelques mots pour indiquer comment MM. Soleil et Duboscq donnent à la lumière qu'ils emploient la coloration qui convient le mieux dans les différents cas qui peuvent se présenter.

Pour comprendre le but de cette addition, il faut se rappeler que la teinte sensible est de toutes celle qui subit les altérations les plus profondes sous l'influence d'une légère modification dans l'action rotatoire. Aussi le saccharimètre est-il réglé de façon à ce que, dans la lumière blanche, la lame présente cette teinte dans toute son étendue lorsque le compensateur est au zéro et qu'il n'y a aucun liquide interposé. Mais, si l'on emploie une lampe pour faire les expériences, ou si la solution est un peu colorée, la couleur que les deux portions de la lame posséderont à l'origine ne sera plus celle qui répond au maximum de sensibilité, et il en sera de même au moment où la compensation sera établie. L'effet serait, par exemple, très-prononcé avec une solution rougeâtre.

Alors on fait subir au rayon qui émerge du compensateur une légère modification capable, si elle agissait seule, de lui donner une coloration complémentaire de celle dont on veut annuler l'effet. Pour cela, avant qu'il arrive à l'analyseur final, on le transmet à travers un système double formé d'un prisme de Nicol

et d'un quartz perpendiculaire. Placé devant un analyseur, ce système peut donner aux rayons qui le traversent toutes les teintes possibles : il est donc éminemment propre à compenser l'effet nuisible des colorations accidentelles dans les expériences de saccharimétrie.

Appareil. — La figure 728 représente la disposition générale



Fig. 728.

des pièces du saccharimètre de MM. Soleil et Duboscq.

P, prisme polariseur;

R, lame à 2 rotations; elle est vue de face en DG ;

TT, tube à liquide;

Q, CC, *cc*, système compensateur, formé d'une plaque de quartz dextrogyre Q et de 2 prismes de quartz achromatisés lævogyres CC, *cc*;

A, Q', système destiné à donner aux images une teinte convenable; il est formé d'un prisme biréfringent achromatique A et d'un quartz perpendiculaire Q';

L, LL', lentilles destinées à donner une bonne qualité aux images.

N, prisme de Nicol oculaire.

§ 4. — DU DÉVELOPPEMENT DU POUVOIR ROTATOIRE DANS LES CORPS TRANSPARENTS SOUS L'INFLUENCE D'AIMANTS PUISSANTS.

Découverte de M. Faraday. — M. Faraday a découvert en 1845 que l'on peut faire acquérir le pouvoir rotatoire à un grand nombre de corps transparents en faisant agir convenablement sur eux les pôles d'un électro-aimant puissant. Pour constater l'exactitude de cette proposition, on opère de la manière suivante : on taille un morceau de verre bien pur, de flint lourd, par exemple, en forme de cylindre ou prisme droit à bases parallèles, et l'on fait reposer les deux extrémités de ce prisme sur les deux

armures C et D (fig. 729) d'un électro-aimant. Puis, sans faire passer le courant dans le fil de l'électro-aimant, on dirige à travers le prisme et parallèlement à son axe un rayon de lumière XX' polarisé par un Nicol P, et, recevant ce rayon sur un autre

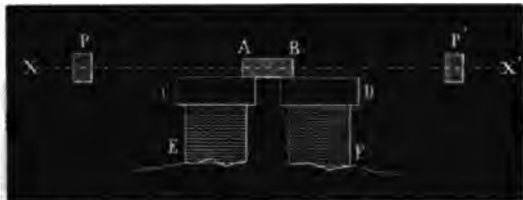


Fig. 729.

Nicol P', servant d'analyseur, on l'éteint complétement. On fait alors passer le courant dans le fil de l'électro-aimant EF; l'image éteinte reparaît, et, pour l'annuler de nouveau, il faut tourner l'analyseur d'un angle plus ou moins considérable.

Pour opérer sur des liquides, on les renferme dans une auge à faces parallèles que l'on met à la place du prisme AB. M. Faraday avait soumis à ses expériences le flint pesant et quelques liquides organiques; les recherches postérieures ont rapidement accru le nombre des substances sensibles à cette action. M. Mathiessen a fait connaître un grand nombre de verres artificiels qui peuvent remplacer le flint de M. Faraday, et M. Bertin, dès 1848, constatait que le sulfure de carbone et le bichlorure d'étain prennent sous l'influence magnétique un pouvoir rotatoire considérable.

En outre, la disposition des appareils s'est améliorée; M. Edmond Becquerel, en particulier, a pensé à faire arriver le rayon de lumière, par une sorte de canal percé, à travers les électro-aimants, ce qui permet de faire agir sur les substances transparentes des forces beaucoup plus énergiques.

La figure 730 donne le plan d'un grand appareil construit par M. Rumkorff, pour répéter les expériences de M. Faraday. BB' sont deux bobines très-puissantes soutenues par de fortes poupées en fer qui peuvent s'approcher ou s'écarter l'une de l'autre. Ces deux bobines sont percées suivant leur axe d'un canal ayant de 4 à 5 centimètres de diamètre. P et A sont des prismes de Nicol servant l'un à polariser, l'autre à analyser le rayon; ils sont enchâssés dans des bagues cylindriques et se fixent aux extrémités du canal central en conservant la liberté de tourner sur eux-mêmes. F est la substance sur laquelle on opère; *feg*, le fil de l'électro-aimant : il vient se fixer aux boutons *b* et *d* d'un

commutateur qui peut transmettre, soit à l'un, soit à l'autre, l'électricité du pôle positif d'une pile en contact avec *c*. Le sens de la rotation change avec celui du courant, et le plus souvent, quand l'expérience est disposée comme on le voit fig. 730, le

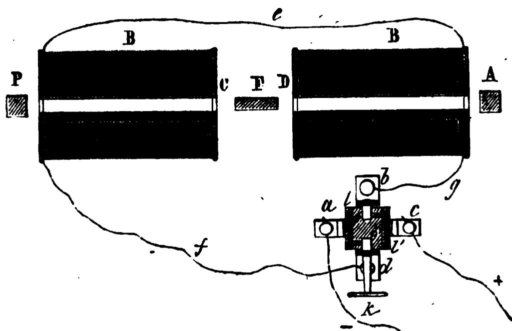


Fig. 730.

mouvement du plan de polarisation semble suivre celui de l'électricité dans les fils de la bobine; d'ailleurs, la grandeur des effets que nous venons de décrire augmente avec la puissance de l'électro-aimant; de plus, elle change avec l'angle que l'axe de figure du prisme ou du cylindre F forme avec la droite qui joint les pôles de l'électro-aimant. — L'effet s'annule quand ces deux directions sont perpendiculaires entre elles.

Recherches de M. Verdet. — M. Verdet a cherché les lois des dépendances que nous signalons. Nous allons indiquer les principaux résultats qu'il a obtenus.

La première chose à faire était de définir d'une manière précise ce que l'on devait entendre par cette intensité de force magnétique à laquelle on voulait comparer la grandeur des rotations obtenues, et il fallait ensuite donner un moyen de la mesurer.

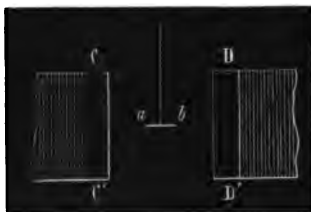


Fig. 731.

Or, concevons que l'on prenne un électro-aimant de force moyenne, disposé comme sur la fig. 731 et ayant ses deux extrémités armées de plaques de fer doux CC′ et DD′ disposées parallèlement entre elles.

Si l'on suspend entre ces plaques une très-petite aiguille aimantée *ab*, fortement trempée, et qu'on la fasse osciller, on trouvera que le nombre d'oscillations faites dans le même temps est indépendant de la position que l'aiguille occupe dans l'espace CC'DD', à moins toutefois que l'aiguille ne soit amenée presque au contact d'une des plaques. L'espace CC'DD' est ce que M. Faraday appelle un champ d'intensité magnétique constante.

Avec les très-forts électro-aimants que M. Verdet employait dans ses recherches, cette constance du nombre des oscillations de l'aiguille pourrait ne pas s'observer, à cause des variations que son magnétisme éprouverait sous les actions trop puissantes des pôles voisins; mais par une autre méthode que nous développerons en son lieu, M. Verdet s'est assuré qu'en armant toujours les pôles de ses aimants de fortes plaques de fer doux parallèles entre elles, il obtenait entre ces plaques un champ magnétique d'intensité constante; et les appareils à l'aide desquels il constatait cette constance pouvaient également lui servir à déterminer la manière dont variaient, avec les intensités du courant de l'électro-aimant, les intensités des actions qu'eût éprouvées dans une position quelconque, comprise entre les armures, une petite aiguille aimantée de *force coercitive absolue* soustraite à l'action de la terre.

En telle sorte que, dans tout ce qui va suivre, les intensités magnétiques auxquelles nous comparerons les déviations pourront être regardées comme mesurées par les carrés des nombres des oscillations de cette aiguille.

Dans la série des recherches faites pour chercher la loi qui lie l'intensité de l'action magnétique à la grandeur de la rotation, M. Verdet employait un électro-aimant semblable à celui de la figure 730.

Le rayon traversait les deux bobines suivant leur axe. Les expériences furent faites tantôt par la méthode d'extinction, tantôt par l'observation de la teinte de passage. Dans tous les cas, en alternant les mesures d'angle et les mesures d'intensité, on se mettait à l'abri de l'influence des variations de la pile.

Lois de M. Verdet. — La relation cherchée s'est trouvée être une proportionnalité exacte, et M. Verdet en conclut que la loi élémentaire du phénomène peut se formuler de la manière suivante:

« Le pouvoir rotatoire développé par l'action d'un centre magnétique dans une tranche infiniment mince d'une substance monoréfringente varie proportionnellement à l'action magnétique, c'est-à-dire en raison directe de la quantité de magnétisme accumulée en ce centre et en raison inverse du carré de la distance. »

Après avoir établi cette première loi, M. Verdet a cherché comment variait l'intensité de l'action rotatoire développée dans la substance soumise à l'expérience, lorsque l'angle compris entre la direction du rayon de lumière et celle de l'action magnétique variait de 0 à 90°, et il a reconnu que l'intensité du phénomène optique est proportionnelle au cosinus de cet angle.

Pour faire commodément ces expériences M. Verdet disposait ses appareils à peu près comme on le voit fig. 732. F représente la substance à éprouver, A et A' les armures des électro-aimants. Elles pouvaient être rapprochées ou écartées l'une de l'autre et fixées dans une position convenable à l'aide des vis V et V'. Le prisme transparent F se trouvait encore dans l'étendue du champ d'égale intensité, et rien ne gênait son orientation, ni le passage du rayon HH'. La perpendiculaire commune aux faces planes A et A' des armures représentait ici la direction de l'action magnétique.

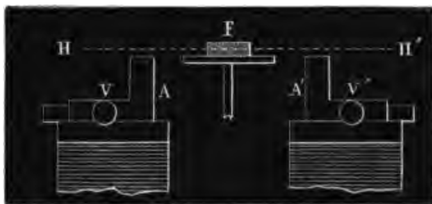


Fig. 732.

Pouvoirs rotatoires magnétiques des liquides. — Les liquides sont susceptibles d'éprouver très-énergiquement le genre d'action que nous venons de définir. Pour les soumettre à l'expérience, on les enferme dans de petites auges, et l'on prend soin de déduire de l'effet total celui que produit l'auge vide soumise isolément à l'action des électro-aimants.

Les pouvoirs rotatoires moléculaires absolus que les différents corps acquièrent ainsi sous l'influence magnétique dépendent de l'énergie même de ces actions. Mais jusqu'ici, pour deux corps quelconques le rapport de ces pouvoirs a paru indépendant de l'intensité de l'action magnétique à laquelle son développement était dû.

En comparant dans des conditions identiques les actions exercées sur un grand nombre de corps différents à celle qu'éprouve l'eau distillée, M. Verdet a pu donner les valeurs numériques des pouvoirs rotatoires magnétiques rapportés à celui de l'eau pris pour unité. Ce que nous avons dit page 474 suffit pour faire comprendre comment les chiffres définitifs se déduisent des rotations

observées et de la connaissance des densités des corps soumis aux expériences, et enfin, lorsqu'il s'agit de dissolutions, des proportions dans lesquelles le dissolvant et le corps dissous entrent dans la solution totale. Il faut seulement remarquer que presque toujours le dissolvant lui-même est actif, mais la marche des raisonnements ne se trouve pas pour cela changée : soit R la rotation observée à travers une colonne de longueur constante prise, si l'on veut, pour unité; D la densité de la solution; P et P′ le poids du dissolvant et celui du corps dissous; α le pouvoir rotatoire moléculaire du dissolvant; x celui du corps dissous.

Si la densité était égale à l'unité, la rotation serait $\frac{R}{D}$ et se trouverait la somme de l'action $\alpha \frac{P}{P+P'}$ due au dissolvant et de l'action $x \frac{P'}{P+P'}$ due au corps dissous : on a donc pour déterminer x la relation :

$$\frac{R}{D} - \alpha \frac{P}{P+P'} = x \frac{P'}{P+P'}$$

En suivant ces méthodes, M. Verdet a constaté que toutes les substances n'acquièrent pas un pouvoir rotatoire de même signe, lorsqu'on les place entre les pôles d'un puissant électro-aimant.

Les composés du fer, du titane, du cerium, du lanthane, éprouvent une action inverse de celle qu'éprouvent le verre, le sulfure de carbone, l'eau. Le nikel, le cobalt, le molybdène, prennent un pouvoir rotatoire de même sens que celui de l'eau.

Le manganèse appartient à un type intermédiaire, le pouvoir rotatoire de ses composés étant tantôt positif et tantôt négatif.

CHAPITRE XXII.

ACTION DES LAMES MINCES CRISTALLISÉES SUR LA LUMIÈRE POLARISÉE.

§. 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Rien ne pouvait faire prévoir le genre d'action tout spécial que le quartz et les autres substances actives exercent sur la lumière polarisée; en d'autres termes, la théorie physique exposée au chapitre précédent repose sur un principe complétement indépen-

dant de ceux que nous avions antérieurement établis. On peut au contraire déduire de ces principes l'explication des effets que l'on obtient, lorsqu'on place des lames minces cristallisées sur le trajet des rayons lumineux qui, après avoir été primitivement polarisés, vont ensuite tomber sur un analyseur.

Ainsi qu'on l'a vu page 461, ces effets sont les premiers qui se sont présentés à Arago. M. Biot en a assigné les lois principales; Fresnel en a donné la théorie complète.

Lorsqu'un rayon polarisé tombe normalement sur une lame biréfringente parallèle à l'axe, il s'y décompose en deux autres qui sont polarisés, l'un dans le plan de la section principale de la lame, l'autre dans un plan perpendiculaire. Si la lame est très-mince, ces rayons ne se séparent ni dans son intérieur, ni lorsqu'ils émergent dans l'air; mais comme ils la traversent avec des vitesses différentes, ils ont en général à l'émergence des phases différentes.

Chacun d'eux en tombant sur l'analyseur donne une composante à l'image ordinaire et une autre à l'image extraordinaire, et par suite on voit que chacune de ces images définitives résulte de la combinaison de deux vibrations d'amplitudes et de phases généralement différentes. Si l'on opère avec la lumière blanche, lorsque les différences de phases et d'intensité dont nous parlons amèneront l'extinction complète ou presque complète d'une couleur élémentaire dans une des images données par l'analyseur, cette image se teindra d'une nuance complémentaire de la couleur éteinte; si l'on opère avec une lumière homogène, lorsque les conditions d'extinction seront satisfaites pour une image, elle disparaîtra, et le phénomène se reproduira périodiquement pour une série d'épaisseurs croissant suivant une certaine loi de succession.

Dans les cas où la section principale de la lame mince serait parallèle ou perpendiculaire soit au plan de polarisation de la lumière incidente, soit à la section principale de l'analyseur, aucun phénomène particulier de coloration ne pourrait se présenter. En effet, dans le premier cas la lumière ne se bifurque pas en traversant la lame. Dans le second, l'image ordinaire de l'analyseur est formée tout entière soit par le rayon ordinaire de la lame mince, *seul,* soit par son rayon extraordinaire. Il en est de même de l'image extraordinaire. Il n'y aura donc jamais de coloration possible dans les images; mais l'une d'elles disparaîtra quand la section principale de la lame mince se trouvera parallèle ou perpendiculaire au plan de polarisation primitif, et que par suite cette lame ne transmettra à l'analyseur qu'un rayon polarisé unique.

Toutes ces considérations se développent par le calcul suivant :

Composition des deux images. — Soit sur le plan de la figure 733 AO la trace du plan de polarisation du rayon incident, c'est-à-dire la trace de la section principale du polariseur, OB et OC les traces des sections principales de l'analyseur et de la lame mince. Le plan de la figure est perpendiculaire à l'intersection de ces trois plans. Posons AOB $= b$, AOC $= a$.

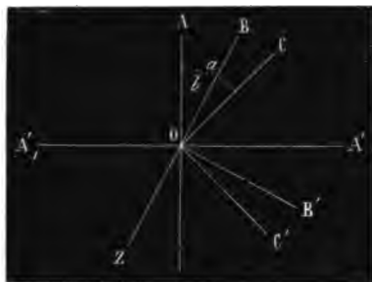


Fig. 733.

La vibration du rayon incident s'exécutera parallèlement à A_1'A'. Supposons à un moment déterminé le mouvement de la molécule lumineuse dirigé vers A'; en pénétrant dans la lame mince il va se décomposer en deux autres : l'un O' transmis à l'état ordinaire sera dirigé suivant OC' et aura pour coefficient de vibration *cos* A'OC' = *cos a;* l'autre E' dirigé suivant OC aura pour coefficient *cos* COA' = *sin a*. Nous supposons égal à 1 le coefficient de vibration du rayon incident, et ici, comme dans la suite du calcul, nous négligeons les pertes de lumière dues à la réflexion ou à l'absorption.

Ces deux mouvements se transmettent avec des vitesses différentes dans la lame cristalline, mais, comme nous l'avons déjà dit, à cause de la minceur extrême de celle-ci, ils ne peuvent se séparer. Rentrés dans l'air ils ne se séparent pas davantage, et quoique distincts en réalité ils viennent en suivant la même direction tomber sur l'analyseur.

Là, chacun d'eux éprouve de nouveau la double réfraction, et par suite chacun d'eux donne une composante à l'image ordinaire définitivement produite par l'analyseur et une autre à l'image extraordinaire.

La composante que O' donne à l'image ordinaire définitive O a pour coefficient de vibration *cos a cos* B'OC' ou *cos a cos*

$(a-b)$, puisque B'OC' = BOC. Celle qu'il donne à l'image extraordinaire E a pour coefficient $-\cos a \cos$ C'OZ ou $-\cos a \sin(a-b)$. On met le signe — parce que l'on regarde comme positives les vitesses dirigées vers la droite de la ligne AO.

De même, les coefficients des vibrations composantes que E' donnera aux deux images sont respectivement $\sin a \sin(a-b)$ et $\sin a \cos(a-b)$. Ainsi à l'image ordinaire O se rapportent $\cos a \cos(a-b)$ et $\sin a \sin(a-b)$, et à l'image extraordinaire E, $-\cos a \sin(a-b)$ et $\sin a \cos(a-b)$.

Mais il faut remarquer que les deux vibrations élémentaires qui se composent pour former O n'ont pas même phase ; il en est de même des éléments de E, et cela tient à ce que E' et O' ont traversé la lame mince avec des vitesses différentes. Soit h l'épaisseur de cette lame, λ' et λ'' les longueurs d'ondes de O' et de E', et λ la longueur d'onde dans l'air du rayon homogène qui s'est dédoublé pour former O' et E' ; la différence de phase qui existe entre O' et E' à la sortie de la lame mince est

$$2\pi\left(\frac{h}{\lambda'}-\frac{h}{\lambda''}\right)$$

ou

$$2\pi h\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda''}\right)=\frac{2\pi h}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda}{\lambda''}\right)$$

ou enfin $\frac{2\pi}{\lambda}(H-H')$, si nous convenons d'appeler H et H' les valeurs des quotients $\frac{h\lambda}{\lambda'}$, $\frac{h\lambda}{\lambda''}$ dans la direction où la transmission se fait.

Ceci posé, d'après les principes généraux de la composition des mouvements vibratoires, voir pages 61 et 281, l'intensité de O sera

$$\left[\cos a\cos(a-b)+\sin a\sin(a-b)\cos 2\pi\frac{H-H'}{\lambda}\right]^2 + \left[\sin a \sin(a-b)\sin 2\pi\frac{H-H'}{\lambda}\right]^2,$$

et celle de E

$$\left[-\cos a\sin(a-b)+\sin a\cos(a-b)\cos 2\pi\frac{H-H'}{\lambda}\right]^2 + \left[\sin a \cos(a-b)\sin 2\pi\frac{H-H'}{\lambda}\right]^2.$$

On en déduit :

$$(1)\quad O=\cos^2 a\cos^2(a-b)+\sin^2 a\sin^2(a-b) + 2\cos a\cos(a-b)\sin a\sin(a-b)\cos 2\pi\frac{H-H'}{\lambda}$$

et

$$(2)\quad \mathrm{E} = \cos^2 a \sin^2 (a-b) + \sin^2 a \cos^2 (a-b) - 2 \cos a \sin (a-b) \sin a \cos (a-b) \cos 2\pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda}.$$

Ces expressions peuvent se mettre sous une forme plus simple. En effet on a en général

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2 z,$$

et par suite

$$\cos 2\pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda} = 1 - 2\sin^2 \pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda};$$

de là

$$\begin{aligned} \mathrm{O} &= [\cos a \cos (a-b) + \sin a \sin (a-b)]^2 \\ &\quad - 4 \cos a \sin a \cos (a-b) \sin (a-b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda} \\ &= (\cos^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b + \sin^2 a \cos b - \sin a \cos a \sin b)^2 \\ &\quad - \sin 2a \sin 2(a-b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda} \end{aligned}$$

$$(3)\quad \mathrm{O} = \cos^2 b - \sin 2a \sin 2(a-b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda}.$$

De même

$$(4)\quad \mathrm{E} = \sin^2 b + \sin 2a \sin 2(a-b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\lambda}.$$

Ainsi toute la lumière de longueur d'onde λ, qui se trouvait dans le faisceau primitif, étant distribuée entre les images ordinaires et extraordinaires définitives, le rapport qui existe entre l'intensité de cette couleur dans l'image ordinaire et l'intensité dans le faisceau incident est exprimé par le nombre O. De même le rapport existant entre l'intensité de cette même couleur, considérée dans l'image extraordinaire définitive et dans le rayon incident, est E.

L'image ordinaire et l'image extraordinaire seraient blanches toutes deux, si dans l'une comme dans l'autre l'intensité de chaque couleur simple était une fraction constante de ce qu'elle est dans le faisceau incident, en d'autres termes, si les nombres O_r, O_j, O_v... restaient les mêmes, quel que fût λ, et si d'autre part E_r, E_j, E_v... étaient également constants. Cette constance n'a

pas lieu, puisque l'arc $2\pi \frac{H-H'}{\lambda}$ varie avec λ : donc les images sont colorées.

Calcul des teintes. — Elles ont des teintes complémentaires, c'est-à-dire que, prises ensemble, elles forment du blanc. En effet, si l'on veut appliquer la règle de Newton au calcul de la teinte qui résulterait de la combinaison de toutes les couleurs des deux images, il faudra au centre de gravité de l'arc représentatif du rouge appliquer un poids égal au produit de $(O+E)$ par l'intensité de la lumière rouge existant dans le rayon incident, et de même pour les autres couleurs. Or $O+E$ est égal à 1, et cela quel que soit λ : donc au centre de gravité de l'arc rouge il faudra appliquer un poids égal à 69, un poids égal à 34 à celui de l'orangé, etc. ; donc enfin la teinte résultante sera le blanc.

Pour déduire des formules précédentes le calcul complet des teintes, il faudrait, comme dans le cas de la polarisation rotatoire, faire une hypothèse sur la relation qui existe entre la variation de l'intensité dans le spectre et la variation correspondante de l'angle $\pi \frac{H-H'}{\lambda}$. Enfin et absolument encore, comme dans le cas de la polarisation rotatoire, on établira que la minceur des lames et la polarisation de la lumière incidente sont des conditions essentielles à la production des phénomènes. Mais toute redite sur ces points serait inutile.

Projection. — Pour projeter les phénomènes que nous étudions, on se procure un faisceau de rayons parallèles, soit avec un héliostat, soit avec la lampe électrique; on le polarise par un prisme de Nicol ou un prisme de M. Foucault; puis on le limite par un diaphragme d'ouverture convenable, et l'on forme sur le tableau l'image de cette ouverture à l'aide d'une lentille ayant une trentaine de centimètres de distance focale. Sur le trajet des rayons on place alors un spath qui transforme l'image en deux autres complétement séparées; puis on place la lame mince contre l'ouverture du premier diaphragme. La lame mince doit être collée sur une lame de verre, montée dans une bague mobile, comme celles qui tiennent les polariseurs décrits au chapitre XVIII. Enfin, si l'on veut opérer avec de la lumière homogène, on place un verre rouge contre la lame mince.

Influence de l'épaisseur. — Lorsqu'on veut mettre en évidence l'influence de l'épaisseur, on clive une lame de sulfate de chaux de façon à ce qu'elle présente des plages d'épaisseurs différentes. Chaque plage est colorée d'une teinte particulière. — Il

n'est pas besoin d'ajouter que, dans les deux images données par l'analyseur, une même plage se trouve toujours colorée de teintes complémentaires.

Disques concaves. — On peut aussi opérer avec un disque de quartz parallèle à l'axe et usé en son centre de manière à présenter une concavité régulière. Les épaisseurs croissent alors régulièrement tout autour du centre ; et, dans une lumière homogène, les deux images sont formées d'anneaux alternativement sombres et brillants ; un des systèmes est à centre lumineux et l'autre à centre noir. Il est bien entendu que tous ces anneaux cesseraient de se produire si l'on avait $a = 0$, $a = 90$, ou si $(b - a)$ était égal à zéro ou 90°.

Toutes les particularités des effets que l'on obtient avec les disques concaves se déduisent aisément de la discussion des formules 3 et 4. Nous examinerons spécialement le cas où l'on a en même temps $a = 45$ et $b = 0$, puis celui ou $b = 2a$, a étant quelconque.

Dans le premier cas, les formules se réduisent à

$$O = 1 - \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda},$$

$$E = + \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}.$$

O devient égal à 1 et E devient nul dans tous les points où $\frac{H - H'}{\lambda}$ est égal à un nombre entier, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que $H - H'$ est égal à $\frac{\lambda}{2}$ multiplié par un nombre pair ; au contraire, lorsque $H - H'$ est égal à $\frac{\lambda}{2}$ multiplié par un nombre impair, $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}$ a pour valeur l'unité, O devient nul, et E se trouve égal à 1.

Ainsi donc les deux images présentent deux systèmes d'anneaux complémentaires l'un de l'autre, et dans toutes deux les points les plus sombres des anneaux noirs sont complétement obscurs, et les lois suivant lesquelles varient les épaisseurs auxquelles répondent les anneaux des divers ordres sont analogues à celles que nous avons fait connaître en étudiant les anneaux colorés de Newton.

Lorsque, a étant quelconque, on a $b = 2a$, les formules deviennent :

$$O = \cos^2 2a + \sin^2 2a \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda},$$

$$E = \sin^2 2a - \sin^2 2a \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda},$$

et si $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda} = 1$, l'image extraordinaire disparaît complétement : la lumière qui émerge de la lame est donc polarisée dans l'azimut $2a$.

En général, quels que soient b et a, la lumière, au sortir du cristal mince, est polarisée rectilignement, lorsque le faisceau ordinaire et le faisceau extraordinaire qui la forment ont entre eux une différence de marche correspondante à un nombre entier quelconque de demi-vibrations. En d'autres termes, la lumière émergente est polarisée rectilignement quand on a $\frac{H - H'}{\frac{1}{2}\lambda} = n$ ou $\frac{2(H - H')}{\lambda} = n$. Il en résulte qu'alors $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}$ est égal à zéro ou à 1 ; et la valeur de b pour laquelle E devient

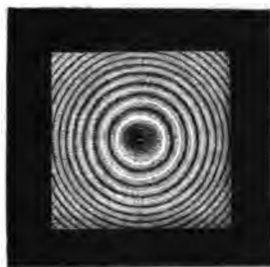


Fig. 734.

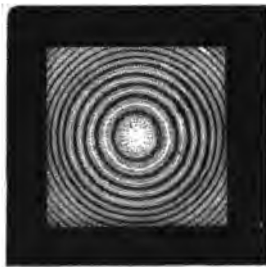


Fig. 735.

nul définit la direction du plan de polarisation de la lumière émergente. Lorsque $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}$ est nul, E ne devient nul que si b est lui-même égal à zéro. La lumière émergente est alors polarisée dans le plan primitif. Lorsque $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}$ est égal à 1, E s'annule lorsqu'on a

$$\sin^2 b = \sin 2a \sin 2(b - a) \qquad \text{ou} \qquad b = 2a;$$

c'est-à-dire qu'alors la lumière émergente est polarisée dans l'azimut $2a$.

Il est évident que, si l'on emploie le disque concave avec de la lumière blanche, les anneaux des images ordinaires et extraordinaires seront colorés. Les deux figures 734 et 735 sont la reproduction des deux images ainsi obtenues avec un quartz concave.

Franges parallèles. — Si la lame mince, au lieu de former un disque concave, est taillée en prisme très-aigu, les deux images données par l'analyseur sont formées d'une série de bandes irisées dans la lumière blanche, alternativement brillantes et obscures dans la lumière homogène, et la largeur de ces bandes est d'autant plus grande que l'angle du prisme est plus aigu. Nous verrons plus loin quel parti l'on a tiré de ce fait.

§ 2. — Anneaux donnés par un spath perpendiculaire dans la lumière divergente.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé les rayons incidents parallèles entre eux et normaux à la lame mince bi-réfrigérante, et, de plus, nous avons supposé cette lame taillée parallèlement à l'axe. Les phénomènes changent lorsque les faisceaux employés sont convergents ou divergents et lorsque les faces de la lame ne sont plus parallèles à l'axe.

Si la lumière au sortir de l'analyseur est reçue sur un écran blanc perpendiculaire à l'axe du cône lumineux incident, on voit apparaître une série d'anneaux ayant tous pour centre commun le point où l'écran coupe l'axe; ces anneaux n'ont pas même intensité dans toute leur étendue, et l'ensemble de la surface circulaire que couvre leur système se trouve en général partagé en



Fig. 736.

huit parties, égales quatre à quatre, par deux croix dont chaque branche présente une intensité lumineuse constante dans toute son étendue. Les anneaux sont irisés dans la lumière blanche. Les deux croix sont toujours incolores. Elles se réduisent à une seule lorsque la section principale de l'analyseur est parallèle ou perpendiculaire à celle du spath polariseur.

Il paraît naturel de chercher l'explication de ces nouveaux phénomènes dans la théorie que résument les formules (3) et (4). Mais cela ne peut se faire qu'en appliquant au cas des incidences obliques certaines propositions fondamentales que nous avons établies en supposant l'incidence normale. Nous ne discuterons pas la valeur théorique de cette extension, mais nous admettrons comme probable que pour les incidences inférieures à une vingtaine de degrés elle doit conduire à la représentation des faits au moins d'une manière très-approchée.

La lame de spath interposée entre le polariseur et l'analyseur étant perpendiculaire à l'axe, tout plan d'incidence est une section principale; par conséquent, à chacun des rayons du cône incident correspondront deux rayons réfractés, tous deux dans le plan d'incidence, et nous admettons que les intensités de ces deux rayons sont entre elles comme les carrés du cosinus et du sinus de l'angle POA compris entre les droites OA et PP' suivant lesquelles le plan de la figure coupe et le plan d'incidence et la section principale du polariseur.

Nous admettrons en outre que chacun de ces rayons, en traversant l'analyseur, donne à l'image ordinaire définitive des composantes dont les intensités individuelles sont proportionnelles aux carrés du cosinus et du sinus de l'angle compris entre le plan d'incidence et le plan de la section principale de l'analyseur. Quant au retard réciproque de ces deux composantes, il dépendra de la longueur du trajet du rayon dans la lame de spath et par conséquent de l'angle d'incidence. Mais il sera le même pour tous les rayons formant à l'incidence une nappe conique droite d'ouverture déterminée.

Ceci posé, il est évident que pour calculer l'intensité lumineuse en un point quelconque A de l'image ordinaire il faut, dans la formule (3), mettre à la place de a la valeur de l'angle AOP. b, H, H', λ, conservent leur signification.

Croix noire et croix blanche. — L'angle a change donc ici avec la position de A. Quel que soit b, lorsque l'on a $a = 0$, $a = 90$, $a = b$ ou $a = 90 + b$, le terme fonction de λ, de H et de H', disparaît de l'équation (3). Les droites AA', aa', définies fig. 737 par les équations $a = 0$, $a = 90$, sont rectangulaires entre elles. Il en est de même des lignes BB', bb', définies par les deux autres équations $a = b$, $a = 90 + b$. Ces quatre droites se coupent en un même point O de l'axe du cône lumineux incident. Dans une lumière homogène, chacune présente une clarté uniforme dans toute son étendue. Dans la lumière blanche, elles n'offrent aucune trace de coloration, et ce sont

les seules droites passant au point O qui jouissent de cette propriété, car en général le second membre de l'équation qui donne la valeur de O change avec λ. Ces quatre droites se réduisent à deux lorsque l'on a $b=0$, ou $b=90$. Elles sont noires dans le second cas, et dans le premier cas elles sont le plus lumineuses possible.

Anneaux. — Si par le point O on mène une droite quelconque OM différente de celle que nous venons de considérer, l'intensité de la lumière variera périodiquement d'un point à

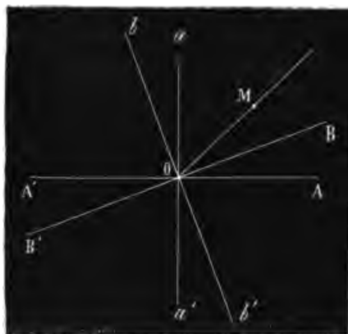


Fig. 737.

l'autre de cette droite à cause des variations périodiques du facteur $sin^2 \pi \frac{H-H'}{\lambda}$, et de là le développement de franges ayant la forme d'anneaux décrits autour du centre O.

Le facteur $sin^2 \pi \frac{H-H'}{\lambda}$ conserve la même valeur en tous les points d'une circonférence décrite du centre O avec un rayon quelconque. Mais il n'en résulte pas que dans une lumière homogène l'intensité de la lumière soit en général la même en tous les points de cette circonférence : en général l'intensité varie avec a; et en effet, si b est inférieur à 90, $sin\,2a\,sin\,2(a-b)$ sera négatif pour toutes les valeurs de a comprises entre 0 et b, positif lorsque a sera compris entre b et 90, redeviendra négatif dès que a dépassera 90,... etc.

Enfin il est bon de remarquer encore que le second membre de l'équation (3) n'est indépendant de a que quand il se réduit à $cos^2 b$; c'est-à-dire quand la longueur du trajet de la lumière

dans la lame est tel que l'on ait $\frac{H-H'}{\lambda}=n$, n étant un nombre entier quelconque. Les points qui satisfont à cette condition

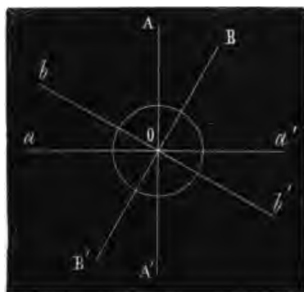


Fig. 738.

forment dans la lumière homogène une série d'anneaux qui ont même intensité dans toute leur étendue.

Lorsque $\frac{H-H'}{\lambda}$ est égal à $\frac{2n+1}{2}$, l'intensité lumineuse est donnée par l'expression

$$\cos^2 b - \sin 2a \sin 2(a - b);$$

remplaçons $\cos^2 b$ par $\cos^2[(b-a)+a]$, et l'expression deviendra

$$[\cos a \cos(a-b) - \sin a \sin(a-b)]^2$$

ou encore :

$$\cos(2a-b)^2.$$

b restant constant, cette valeur de O varie avec a. Si $b=0$, elle est nulle pour $a=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, et égale 1 lorsque $a=0, \frac{2\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$. C'est précisément le contraire qui a lieu lorsque $b=90°$.

Si la lumière qui produit le phénomène est blanche, l'anneau sera coloré et sa teinte ne sera pas la même dans toute son étendue. Les quatre droites définies par les équations $a=0$, $a=90$, $a=b$, $a=b+90$, divisent chaque anneau en 8 parties égales

4 à 4. La teinte est la même dans chacun des secteurs égaux, mais sa vivacité n'y est pas constante. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si l'on a une série de termes de la forme

$$\mathrm{R}\left[\cos^2 b - \sin 2a \sin 2(a - b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H} - \mathrm{H}'}{\lambda}\right],$$

$$\mathrm{O}\left[\cos^2 b - \sin 2a \sin 2(a - b) \sin^2 \pi \frac{\mathrm{H} - \mathrm{H}'}{\lambda'}\right],$$

etc., etc.....,

la somme des termes $\mathrm{R}\cos^2 b + \mathrm{O}\cos^2 b + \ldots\ldots$ reproduit du blanc, et que la teinte représentée par les autres est à l'intensité près celle qui répondrait au rayon complexe

$$\mathrm{R}\sin^2 \pi \frac{\mathrm{H} - \mathrm{H}'}{\lambda} + \mathrm{O}\sin^2 \pi \frac{\mathrm{H} - \mathrm{H}'}{\lambda'} + \text{etc., etc.....}$$

Les anneaux dont nous venons d'expliquer le développement acquièrent leur plus grand degré de vivacité quand on a $b = 0$ ou 90.

Ce sont les cas qui se trouvent réalisés dans les figures 734, 735 et 736, lesquelles sont la reproduction de photographies direc-

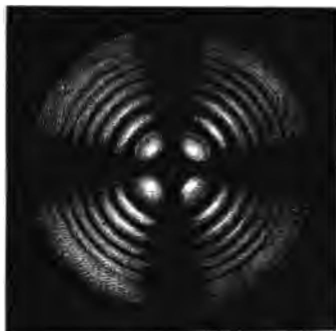


Fig. 739.

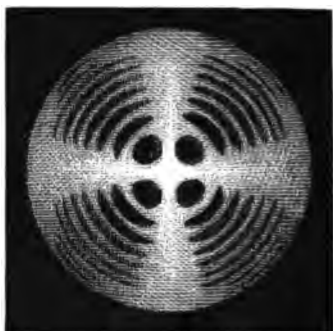


Fig. 740.

tement obtenues dans des expériences de projection; l'une (740) est relative au cas où $b = 0$, l'autre (739) à celui où $b = 90°$.

Nous n'avons parlé ici que des phénomènes fournis par une des images; mais en réalité la discussion est complète, puisque les images se changent l'une dans l'autre quand b croît de 90°.

Pince à tourmalines. — On observe commodément les phé-

nomènes que nous venons de décrire à l'aide de l'appareil connu sous le nom de *pince à tourmalines*. Cet appareil consiste, ainsi que son nom l'indique, en une pince portant à l'extrémité de chacune de ses branches une rondelle de liége dans laquelle est fixée une plaque de tourmaline parallèle à l'axe. Entre ces deux plaques on place la lame de spath qui se trouve naturellement soutenue par la pression élastique en vertu de laquelle se ferme la pince. Quand les axes des tourmalines sont croisés, on obtient le système d'anneaux traversé par une croix noire. — La croix est blanche si les axes sont parallèles, et quand ces axes font entre eux un angle quelconque, on obtient alors les deux systèmes de croix incolores, mais plus ou moins lumineuses, qui, dans le cas général, divisent le champ de la vision en 8 parties égales 4 à 4.

Dans l'expérience que nous décrivons, on dirige l'axe optique de l'œil suivant la direction de la droite AE perpendiculaire à la fois aux plaques de tourmaline T et T' et à la lame de spath S (fig. 741).

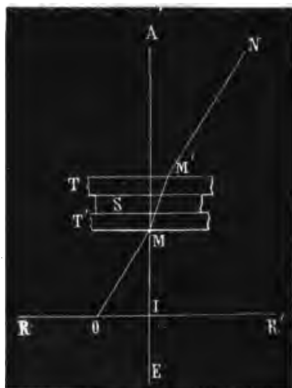


Fig. 741.

L'image qui se forme sur la rétine RR' est symétrique par rapport au point I, rencontre des lignes RR' et AE; et les apparences produites en O sont celles qui répondent à une inclinaison donnée des rayons sur la lame de spath.

Pour appliquer les formules (3) et (4) à l'explication des anneaux donnés par le spath perpendiculaire, nous avons étendu au cas d'incidences obliques certaines propositions de double réfraction ou de polarisation que nous avions établies ou légitimées en supposant toujours l'incidence normale. Des expériences directes peuvent montrer aisément que dans les conditions où nous l'avons fait cette extension est ou rigoureuse ou suffisamment approchée.

Que l'on répète en effet la première des expériences décrites p. 431 en prenant soin de polariser le faisceau incident avant son passage à travers la lentille de convergence, et l'on obtiendra le phénomène représenté fig. 742 d'après une photographie obtenue directement.

Les deux anneaux présenteront des intensités variables d'un azimut à l'autre, mais toujours la somme des intensités relatives à un même azimut paraît constante; et, en effet, lorsque les anneaux sont assez larges pour se recouvrir partiellement, la bande circulaire résultant de leur superposition a une clarté uniforme.



Fig. 742.

L'image ordinaire atteint son maximum dans le plan de polarisation primitif; à 90 de ce plan, son intensité se réduit à zéro; à 45 de ce plan, les deux images sont égales.

En un mot, tout se passe comme si les intensités des deux rayons ordinaires et extraordinaires provenant du faisceau incident dans l'azimut P 0 A $= a$ (fig. 736) étaient en effet proportionnelles à $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$.

De plus, lorsqu'à l'aide d'un écran convenablement percé on isole dans les deux bandes circulaires deux portions répondant au même azimut moyen, si on les reçoit sur un spath servant d'analyseur, on reconnaîtra que les images ordinaires fournies par ces deux rayons seront égales en intensité lorsque la section principale du spath analyseur sera perpendiculaire au plan de polarisation primitif, ce qui doit précisément avoir lieu si elles sont proportionnelles aux carrés du cosinus et du sinus de l'angle ω que le plan d'incidence fait avec la section de l'analyseur. Alors en effet on a

$$\sin\alpha = \cos\omega, \qquad \cos\alpha = \sin\omega,$$

et les deux images ont pour intensité commune :

$$\cos^2\alpha \cos^2\omega$$
$$\sin^2\alpha \sin^2\omega.$$

Appareil de Noremberg. — Pour observer par vision directe les phénomènes produits par la lumière parallèle, on peut employer l'appareil de M. Noremberg représenté en coupe fig. 743.

Une glace GG′ reçoit la lumière extérieure L′LL″ sous un angle d'environ 35°,25 et la polarise en la réfléchissant vers un miroir horizontal MM′. Une portion de cette lumière polarisée est réfléchie par le miroir MM′, vient passer par l'ouverture O de la plaque horizontale PP′, et ce qui tombe sur l'analy-

seur A peut être regardé comme un faisceau de rayons parallèles.

La lame mince se place en O; elle est portée par une alidade dont le mouvement angulaire se mesure sur un cercle dont le centre est sur l'axe vertical XX'. L'analyseur A est également porté par une alidade mobile autour d'un centre situé sur l'axe XX'. E est un écran qui empêche la lumière extérieure de venir tomber directement sur la lame mince placée en O.

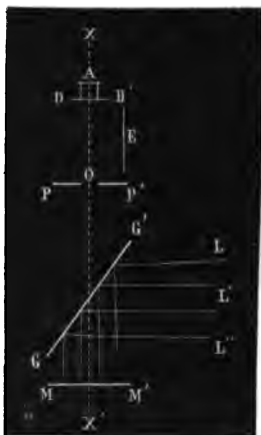


Fig. 743.

Polariscope d'Arago. — En mettant à profit la coloration que la lumière blanche polarisée prend dans les circonstances que nous venons de décrire, on peut réaliser des polariscopes plus sensibles que ceux dont nous avons donné la description, page 448.

Ainsi, que devant un spath on place une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, de 4 ou 5 millimètres d'épaisseur, et que l'on analyse, avec ce système, un rayon dans lequel on cherche à reconnaître la présence de la lumière polarisée; si, en effet, le faisceau n'est pas complétement naturel, les deux images qu'il donnera présenteront quelque différence de teinte plus facile à apprécier qu'une simple différence d'intensité.

Ou encore, que devant un prisme de Nicol, ou une tourmaline, on fixe une lame de spath taillée perpendiculairement à l'axe, tout rayon partiellement polarisé qui sera transmis à travers l'appareil donnera une série d'anneaux concentriques traversés par deux ou quatre diamétrales incolores, rectangulaires deux à deux, et quand le système de diamétrales se réduira à une croix unique le plus noire possible, on sera sûr que le plan de polarisation de la partie polarisée du rayon incident sera parallèle à l'une des branches de la croix et perpendiculaire à l'autre.

Cristaux à deux axes. — Dans tout ce que nous avons dit antérieurement sur la double réfraction, nous nous sommes bornés au cas des cristaux du système rhomboédrique et du système prismatique droit à base carrée. Les phénomènes se compliquent lorsqu'il s'agit des cristaux appartenant aux trois derniers systèmes, et notre but n'est pas ici d'en aborder l'étude : nous voulons seulement décrire quelques-uns des effets curieux que

l'on remarque lorsqu'on oberve dans une pince à tourmalines ou tout autre appareil équivalent une lame d'un cristal de cette espèce dont les faces parallèles entre elles sont convenablement orientées par rapport aux axes cristallographiques.

Dans un cristal des trois derniers systèmes, on n'observe plus en général de réfraction régulière, c'est-à-dire que les deux rayons réfractés suivent ordinairement des lois autres que celles de Descartes.

Toutefois, dans ces cristaux il existe deux directions jouissant de propriétés analogues à celles de l'axe optique unique du spath, en ce sens que, si une lame est taillée de manière à avoir ses faces parallèles entre elles et perpendiculaires à l'une de ces directions, un rayon incident normal semble la traverser sans se bifurquer. Ces directions portent le nom d'*axes optiques*, et l'on appelle *ligne moyenne* du cristal la droite qui bissecte l'angle aigu de ces axes.

Ceci posé, lorsqu'on met dans une pince à tourmalines une



Fig. 744.



Fig. 745.

lame perpendiculaire à l'un de ces axes, si les tourmalines sont croisées, on obtient un système d'anneaux tel que l'indique la fig. 744. Ces anneaux sont sensiblement circulaires; ils sont traversés par une bande noirâtre, qui est rectiligne et parallèle au plan des axes du cristal quand ce plan est perpendiculaire ou parallèle à l'axe de la tourmaline polarisante.

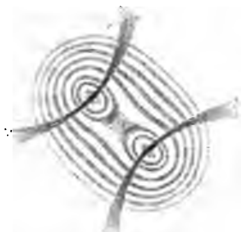


Fig. 746.

Le phénomène se développe quand le cristal est taillé perpendiculairement à la ligne moyenne.

La fig. 745 le représente tel qu'on l'obtient avec le nitrate de potasse dans les conditions définies à la phrase précédente.

Les axes des tourmalines étant toujours croisés, si l'on tourne la lame de nitrate sur elle-même, l'espèce de croix qui partageait la fig. 745 en quatre parties symétriques se résout en deux

branches de courbe séparées et passant chacune par un des deux centres autour desquels les anneaux se développent.

La fig. 746 est relative au cas où le plan des deux axes du cristal est incliné à 45° sur les sections principales des tourmalines.

Nous ne cherchons pas à rendre compte de ces effets brillants : nous les indiquons parce qu'ils peuvent servir à reconnaître si une lame cristalline appartient à un cristal à un axe ou à un cristal à deux axes.

M. Soleil a construit des appareils à l'aide desquels on les rend aisément visibles en projection.

Une lentille fait converger sur la lame cristalline un faisceau primitivement polarisé et amène le point de concours sur la face postérieure du cristal. Une autre lentille projette sur un écran l'image du cristal : si les rayons à la sortie de cette seconde lentille traversent un analyseur, tous les phénomènes précédemment décrits se reproduisent avec éclat sur le tableau.



Fig. 747.

L'appareil de M. Soleil est indiqué dans ce qu'il y a d'essentiel fig. 747; l'analyseur A est formé d'un prisme de Nicol et d'une ou plusieurs lentilles. Cet appareil peut aussi servir à mesurer l'angle des axes du cristal, pourvu toutefois que cet angle ne soit pas trop considérable. Il est en effet disposé de manière que la lame cristalline soit portée sur une alidade LL' mobile autour du centre d'un cercle gradué MP parallèle à l'axe commun BB' de la lentille O et des prismes de Nicol qui servent de polariseur et d'analyseur. Cette lame est taillée perpendiculairement à la ligne moyenne; on la fixe sur l'alidade, normalement au cercle divisé, et on l'oriente de façon que le plan de ses axes soit parallèle au cercle MP. Alors, en faisant tourner l'alidade on peut amener successivement la direction de chacun des axes optiques du cristal à coïncider avec celle que suit dans la lame l'axe de figure du faisceau conique incident. Quand la coïncidence est obtenue pour l'un des axes, on obtient l'apparence de la figure 744, et le centre de l'anneau intérieur se trouve sur la ligne BB'. On lit alors sur le cercle la position de l'alidade, puis on tourne

celle-ci jusqu'à ce que le second axe du cristal vienne à son tour coïncider avec BB'. L'arc de rotation serait celui que l'on cherche s'il n'y avait pas de réfraction dans la lame. En réalité, pour obtenir l'angle des axes il faut multiplier l'arc de rotation par le rapport des angles que forment avec la normale à la plaque : 1° la direction de l'un ou l'autre de ses axes, 2° celle du rayon incident qui se réfracte suivant cet axe.

CHAPITRE XXIII.

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE SUR LE VERRE ET SES ANALOGUES.

§. 1. — LUMIÈRE POLARISÉE. — FORMULES DE FRESNEL. VÉRIFICATIONS.

Formules de Fresnel. — Lorsqu'un rayon de lumière polarisée tombe sur un miroir, la portion réfléchie reste polarisée rectilignement et conserve son plan de polarisation primitif, toutes les fois que ce plan est parallèle ou perpendiculaire au plan de réflexion; mais, quand la direction de la vibration incidente fait avec le plan de réflexion un angle différent de 0 ou de 90°, il arrive très-souvent que le rayon réfléchi n'est plus polarisé rectilignement, c'est-à-dire qu'il ne peut plus être éteint complétement par un prisme de Nicol. Ce fait s'observe dans la réflexion sur les métaux, le diamant, etc. Toutefois il est aussi des substances, le verre, l'eau, la ménilite, etc., qui, en réfléchissant un rayon polarisé, lui laissent, en général, une polarisation rectiligne. Pour ces substances, Fresnel a résolu complétement le problème de la réflexion. Il a donné des formules qui permettent de calculer *à priori* et pour une incidence quelconque l'intensité de la lumière réfléchie, lorsqu'à l'incidence cette lumière se trouve polarisée dans le plan d'incidence ou dans un plan perpendiculaire; et il a fait voir que ces mêmes formules donnent encore la solution de la question lorsque le plan de polarisation à l'incidence est quelconque ou même quand le rayon incident est naturel. La seule constante qui entre dans les formules de Fresnel est l'indice de réfraction du miroir auquel elles se rapportent.

Soit n l'indice de réfraction de la substance dont un miroir est formé, i l'angle d'incidence d'un rayon lumineux sur ce miroir, r l'angle de réfraction correspondant. Si le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence et a un coefficient de vibration

égal à 1, le coefficient de vibration du rayon réfléchi sera $-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$, et, par conséquent, l'intensité de ce rayon sera $\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$.

Si le rayon incident était polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, le coefficient de vibration du rayon réfléchi serait $-\frac{tg(i-r)}{tg(i+r)}$ et l'intensité $\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}$.

Les mémoires dans lesquels Fresnel a fait connaître ces formules fondamentales sont insérés aux Annales, série 2, t. XVII. On y trouve l'exposé des raisonnements à l'aide desquels il les déduit de quelques hypothèses très-simples sur la répartition du mouvement incident entre les mouvements réfléchis et réfractés.

Nous nous attacherons surtout à faire connaître les différentes vérifications expérimentales qui en ont été faites; et avant tout, pour bien montrer la marche qu'elles assignent au phénomène, nous allons transcrire les résultats auxquels elles conduisent dans l'hypothèse ou $n = 1,52$.

TABLEAU DONNANT POUR DIFFÉRENTES INCIDENCES LE POUVOIR RÉFLECTEUR DU VERRE POUR LA LUMIÈRE POLARISÉE SOIT DANS LE PLAN D'INCIDENCE, SOIT DANS UN PLAN PERPENDICULAIRE.

ANGLES D'INCIDENCE.	LUMIÈRE polarisée dans le plan d'incidence.	LUMIÈRE polarisée dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.
0	4,2	4,2
10	5	3,25
20	5,6	2,9
30	6,1	2,8
35	7,1	2,1
40	8,1	1,7
50	11,7	0,56
56° 45′	15,9	0,0
60	18,3	0,64
70	30,8	4,15
75	40,8	10,6
80	54,6	23,6
90	100	100

Discussion, vérifications expérimentales. — L'inspection de ces nombres montre que, quand la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, l'intensité de la réflexion croît avec l'incidence. Au contraire, quand la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi devient nulle lorsque $i + r$ est égal à 90°; dans ce cas, la direction du rayon réfracté est perpendiculaire à celle du rayon réfléchi, et si l'on désigne par n l'indice de réfraction du miroir, on a

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\cos i},$$

et par suite

$$tg\, i = n.$$

Au reste, pour suivre algébriquement la marche de ces formules, il est quelquefois commode d'en éliminer l'angle r, en se fondant sur la relation

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i.$$

La première devient :

$$I = \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i} \right\}^2;$$

en effet, on a :

$$\begin{aligned} \sin(i - r) &= \sin i \cos r - \sin r \cos i, \\ &= \sin i \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} - \frac{\sin i}{n} \cos i; \\ &= \frac{\sin i}{n} \left\{ \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i \right\}; \end{aligned}$$

et

$$\sin(i + r) = \frac{\sin i}{n} \left\{ \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i \right\}.$$

La seconde devient :

$$I' = \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \cos i} \right\}^2.$$

Pour $i = 0$, on a :

$$I = I' = \left\{ \frac{n - 1}{n + 1} \right\}^2.$$

Pour $i = 90$, I et I' deviennent égaux entre eux et à l'unité.

En effet, si, après avoir bifurqué par un spath un rayon de lumière naturelle, on fait tomber presque tangentiellement sur un miroir de verre noir le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire venant de cette bifurcation, on ne pourra pas saisir à l'œil des différences d'intensités entre les deux images qu'ils donneront à la réflexion.

On a également vérifié l'exactitude de la proposition formulée par la relation $tg\, i = n$ en constatant que, sur un grand nombre de substances transparentes, un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence cesse de se réfléchir en proportion sensible quand la condition $tg\, i = n$ se trouve satisfaite.

Cas où la lumière incidente est polarisée dans un plan quelconque. — Rotation du plan de polarisation. — Lorsque le rayon incident est polarisé dans un plan quelconque, l'expérience montre que la réflexion change la direction des vibrations tout en la laissant rectiligne, et les formules de Fresnel permettent de calculer la grandeur de cette déviation du plan de polarisation. Soit α l'angle que le plan de polarisation primitif fait avec le plan d'incidence, et 1 le coefficient de vibration primitif; le mouvement incident se décompose à la réflexion en deux autres : l'un, d'intensité I, est polarisé dans le plan de réflexion; son coefficient de vibration a pour valeur absolue celle de l'expression :

$$\cos\alpha \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)};$$

l'autre, d'intensité I', est polarisé dans un plan perpendiculaire; son coefficient de vibration a pour valeur absolue celle de l'expression :

$$\sin\alpha \frac{tg(i-r)}{tg(i+r)}.$$

Ces deux mouvements ont même période, leurs phases sont identiques tant que l'on n'a pas $i + r = 90°$; au delà de ce terme elles diffèrent de 180°, puisque les signes de leurs coefficients de vibration sont alors contraires. Dans un cas comme dans l'autre, ils se composent en un mouvement vibratoire polarisé rectilignement, et l'angle α' que fait avec le plan d'incidence celui de polarisation du rayon résultant est donné par la relation :

$$tg\,\alpha' = tg\,\alpha \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} = \sqrt{\frac{I'}{I}}.$$

L'expérience vérifie les indications de cette formule. Elle montre que le plan de polarisation s'approche du plan de réflexion à mesure que $i+r$ s'approche d'être égal à 90°; il coïncide avec lui dans ce cas particulier, et puis il s'en écarte de l'autre côté à mesure que $i+r$ augmente. Elle montre enfin que les valeurs de α' calculées par cette formule coïncident avec celles que donne l'expérience.

§ 2. — Lumière naturelle. — Théorie de Fresnel. Expériences d'Arago.

Après ces vérifications déduites de l'étude de la réflexion de la lumière polarisée, nous en citerons d'autres obtenues dans l'étude de la réflexion de la lumière naturelle.

Pouvoir réflecteur d'un miroir de verre pour la lumière naturelle. — Les formules de Fresnel permettent, en effet, de calculer dans quelles proportions un faisceau lumineux non polarisé se trouve, sous toutes les incidences, réfléchi par un miroir de verre; et encore, dans quelles proportions il est, soit réfléchi, soit transmis par une lame de verre à faces parallèles. Si donc on a quelque moyen de vérifier les conséquences auxquelles on est conduit en cherchant à résoudre ces nouveaux problèmes, on aura par cela même de nouvelles preuves de l'exactitude des formules qui auront servi de point de départ.

Pendant la durée de l'action sur l'œil, une molécule d'éther prise sur le trajet d'un rayon de lumière naturelle exécute d'innombrables groupes de vibrations, distincts les uns des autres par la forme, l'orientation, les dimensions de la trajectoire, et aussi par la durée du temps de chacun d'eux. Mais, quelles que soient ces variations, si l'on décompose tous ces mouvements successifs suivant deux directions rectangulaires quelconques ox et oy, il arrivera toujours que l'impression totale produite sur l'œil par l'une de ces séries de composantes, sera égale à celle que l'autre produit dans le même temps; sans quoi l'on ne pourrait concevoir comment un spath décompose toujours en deux parties égales un faisceau de lumière qui le traverse.

Supposons maintenant qu'un rayon naturel d'intensité 1 tombe sur un miroir de verre, et prenons l'axe ox perpendiculaire au plan de réflexion. Toutes les composantes élémentaires dirigées parallèlement à cet axe seront, par la réflexion, réduites dans le rapport de 1 à $\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$; toutes celles qui sont dirigées pa-

rallèlement à oy seront réduites dans le rapport de 1 à $\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}$ et le rayon réfléchi total aura pour intensité :

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}+\frac{1}{2}\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}.$$

Une première conséquence de ces idées, c'est que, pour l'incidence qui satisfait à la relation $i+r=90$, ou encore $tg\,i=n$, le faisceau réfléchi est exclusivement composé de lumière polarisée dans le plan de réflexion : cet angle est donc un angle de la polarisation complète. Et en effet, Brewster a reconnu que, pour un assez grand nombre de substances analogues au verre, la lumière réfléchie est complétement ou presque complétement polarisée dans le plan d'incidence lorsque l'angle i satisfait à la relation précédente.

Une deuxième conséquence c'est que de l'incidence zéro à l'incidence 90° la réflexion sur le verre d'indice 1,52 varie comme l'indique le tableau suivant :

QUANTITÉ DE LUMIÈRE RÉFLÉCHIE SOUS DIFFÉRENTES INCIDENCES PAR UNE GLACE DE VERRE NOIR AYANT POUR INDICE 1,52.

ANGLES D'INCIDENCE.	QUANTITÉS de lumière réfléchie.	ANGLES D'INCIDENCE.	QUANTITÉS de lumière réfléchie.
0............	4,[illegible]	70............	16,267
20............	4,341	75............	25,756
40............	4,910	80............	39,170
50............	6,136	85............	61,628
60............	9,331	90............	100,000

Nous n'avons pas à citer de vérifications expérimentales directes de l'exactitude de ce tableau ; mais on les obtiendrait sans grande difficulté en appliquant les méthodes photométriques que nous avons développées antérieurement (p. 450 et suiv.).

Réflexion par une lame de verre à faces parallèles. — Lorsqu'il s'agit de la réflexion ou de la transmission par une lame à faces parallèles, il faut, pour obtenir l'effet total, tenir compte

des réflexions en nombre infini qui se font entre les deux faces de la lame. Il faut de plus admettre avec Fresnel que le rayon réfracté conserve son plan de polarisation primitif lorsqu'à l'incidence ce plan coïncide avec le plan d'incidence ou lui est perpendiculaire; dans les autres cas, le plan de polarisation du rayon réfracté éprouve une rotation que l'on peut déterminer par des calculs analogues à ceux de la page 509.

Si un rayon incident d'intensité 1 est polarisé dans le plan d'incidence, il donnera, à la première surface, une proportion de lumière réfléchie égale à $\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$. Représentons cette fraction par R. La quantité de lumière qui pénétrera dans la plaque sera $1-R$. Cette lumière, arrivant à la face de sortie, sera en partie transmise à l'extérieur et en partie réfléchie à l'intérieur; la proportion réfléchie intérieurement sera :

$$(1-R)\frac{\sin^2(r-i)}{\sin^2(r+i)}$$

ou simplement :

$$(1-R)R,$$

et le rayon transmis :

$$(1-R)^2.$$

La quantité réfléchie $(1-R)R$ revient à la première surface; il en émerge une partie $(1-R)^2R$ qui se joint à ce qui a été immédiatement réfléchi avant toute réfraction. Une autre partie $(1-R)R^2$ est réfléchie et va rencontrer de nouveau la deuxième surface, et ainsi de suite.

En faisant la somme des rayons en nombre infini réfléchis par la lame, on trouve :

$$R+(1-R)^2R(1+R^2+R^4+\ldots)=\frac{2R}{1+R}.$$

On verrait de même qu'il sort de la lame des rayons dont la somme est $\frac{1-R}{1+R}$, bien entendu en négligeant l'absorption. Ces deux faisceaux, l'un réfléchi, $\frac{2R}{1+R}$, l'autre transmis, $\frac{1-R}{1+R}$, sont tous deux complétement polarisés dans le plan d'incidence, l'expérience le prouve, et R a pour valeur $\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$.

Si le rayon primitif eût été polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, les expressions $\frac{2R}{1+R}$ et $\frac{1-R}{1+R}$ donneraient encore les valeurs des faisceaux réfléchis et transmis; mais R serait alors égal à $\frac{tg^2\,(i-r)}{tg^2\,(i+r)}$, et les faisceaux seraient polarisés dans un plan perpendiculaire à celui d'incidence.

D'après cela, si un rayon de lumière naturelle d'intensité 1, tombant sur une lame de verre, peut être assimilé à l'ensemble de deux rayons d'intensité $\frac{1}{2}$ polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre dans un plan perpendiculaire, il en résulte que sous l'angle i un pareil rayon donnera à la réflexion une quantité de lumière Q égale à

$$\frac{R}{1+R}+\frac{R'}{1+R'}.$$

Il donnera à la transmission une quantité de lumière Q' égale à

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1-R}{1+R}+\frac{1-R'}{1+R'}\right\},$$

les valeurs de R et R' dans ces formules étant définies par les relations suivantes :

$$R=\frac{sin^2(i-r)}{sin^2(i+r)} \qquad R'=\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}.$$

Expériences d'Arago. — Or, par des expériences dont nous allons donner la description, Arago s'est assuré que sous les angles

4°,32' 7°,1' 11°,8' 17°,17' 26°,28',

les rapports des proportions de lumière réfléchie et transmise par une lame de verre sont respectivement :

$$4 \qquad 2 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4},$$

et ces résultats sont en effet d'accord avec les déductions numériques de nos formules.

Voici comment Arago exécutait ses expériences :

Supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver l'angle sous lequel le rayon réfléchi est égal au rayon transmis. Une bande de papier

blanc, tendue sur un cadre vertical, est éclairée par transmission : il suffit pour cela de la placer en face d'une fenêtre. Parallèlement à cette lame on place un écran opaque AB percé d'ouvertures étroites B et D qui ont la forme de fentes verticales. Soit AB (fig. 746) la trace de l'écran sur le plan de la figure que nous supposerons horizontal; perpendiculairement à AB on place en CH une lame de verre verticale. Les ouvertures B et D sont placées à peu près symétriquement par rapport à CH; en sorte que l'œil placé quelque part, en G, voit presque en contact l'image transmise de l'une et l'image réfléchie de l'autre. On les regarde à travers un tube de lunette, destiné seulement à fixer la direction des rayons par lesquels on les voit. On constate que ces deux images sont égales quand les rayons font avec la surface du verre un angle de 11°,8'.

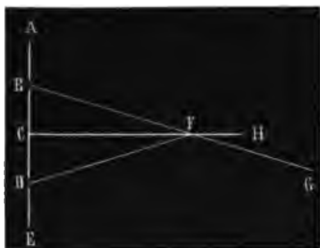


Fig. 746.



Fig. 746 *bis*.

Pour trouver l'angle sous lequel la quantité de lumière réfléchie est double de la quantité transmise, Arago mettait devant l'orifice du tube de lunette qui lui servait à mesurer les angles une lame de quartz à faces parallèles et construite de deux pièces tellement disposées que vers ses bords la lame, quoique biréfringente, ne séparait pas les images des mires, tandis que vers son milieu elle en opérait le dédoublement. Pour satisfaire à cette condition, il suffisait que la lame totale ADEF (fig. 746 *bis*) fût formée de la juxtaposition de deux autres ABDC, BCFE se rajustant à l'aide d'un peu de baume de Canada sur toute l'étendue de leurs faces obliques BC. Les arêtes B et C de ces deux lames n'étaient pas orientées de la même façon par rapport à l'axe de double réfraction du quartz, et cela suffisait pour que dans la région BB_1 CC_1 la lame pût dédoubler nettement les images, en leur laissant une parfaite égalité si la lumière des mires était bien naturelle. (Voir p. 550.)

Arago plaçait donc cette lame dans le tube de lunette, et faisait en sorte que l'image de l'une des mires, celle qu'il observait par réflexion, par exemple, traversât la partie inactive de la lame, tandis que l'autre se dédoublait en traversant la portion centrale. Comme chacune des images des mires était partiellement polarisée, il prenait soin de tourner la lame de quartz de manière que les deux faisceaux ordinaires et extraordinaires, dans lesquels elle dédoublait la lumière qui la traversait, fussent égaux en intensité ; et, après avoir pris cette précaution, il cherchait sous quel angle l'image réfléchie était égale en intensité à chacune des deux images égales que la partie centrale de la lame de quartz donnait de la mire vue par transmission à travers le verre. C'est en opérant ainsi que M. Arago a constaté que sous l'angle 17°,17' l'image transmise est double de l'autre, etc., etc. (Voir Œuvres d'Arago, *Mém. scient.*, t. I.)

PILES DE GLACES POLARIMÈTRES D'ARAGO.

De la connaissance des lois suivant lesquelles la lumière polarisée se réfléchit sur le verre on déduit la théorie d'un appareil très-utile, imaginé par Arago et connu sous le nom de polarimètre. — La partie essentielle d'un polarimètre est un faisceau de lames de glaces minces, à faces parallèles et assemblées les unes sur les autres dans un cadre oblong CD (fig. 747); de petites bandes

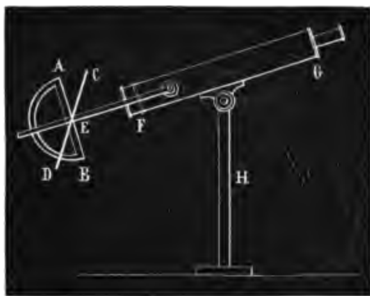


Fig. 747.

de papier, collées sur les bords des lames, empêchent qu'elles ne se touchent ; le cadre est en métal ; il peut pivoter autour d'un axe compris dans le plan des lames et perpendiculaire à leur grande longueur. Tout ce système est placé à l'une des extrémités d'un

tube FG monté sur un pied à genou. A l'autre bout du tube on peut fixer, dans des bagues disposées exprès, 1° une lame de quartz perpendiculaire à l'axe; 2° une lame de spath portée dans une monture à division, de telle sorte qu'on puisse assigner la direction de la section principale du cristal.

Lorsqu'on redresse la pile de glaces de façon à rendre sa surface perpendiculaire à l'axe du tube, la lumière qui, après l'avoir traversée, arrive à l'analyseur, n'offre pas de signe de polarisation. Il en est tout autrement quand la pile est oblique. Si le nombre des lames est un peu considérable, 8, 10, par exemple, et si l'inclinaison est suffisante, la lumière qui arrive au spath est fortement polarisée dans un plan perpendiculaire à celui de la réflexion.

Enfin, si l'on fait tomber sur la pile un faisceau complexe, formé du mélange d'un faisceau naturel et d'un faisceau polarisé dans le plan de réflexion, on pourra, si la proportion de lumière polarisée qui existe dans le faisceau incident n'est pas trop grande, arriver à obtenir un faisceau transmis complétement naturel, c'est-à-dire donnant à travers le polariscope d'Arago, deux images incolores.

Théorie des piles de glaces. — Pour montrer comment toutes ces propriétés des piles de glace sont des conséquences nécessaires des formules de Fresnel, nous rappellerons d'abord que nous avons déjà établi, en nous appuyant sur ces formules, que la quantité de lumière réfléchie par une lame de verre à faces parallèles est $\frac{2R}{1+R}$ lorsque les rayons incidents sont complétement polarisés dans le plan d'incidence ou dans un plan perpendiculaire. Seulement, dans le premier cas,

$$R = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

et dans le second

$$R = \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}.$$

La quantité de lumière transmise est de même représentée par l'expression $\frac{1-R}{1+R}$. Enfin, dans les deux cas, la lumière réfléchie et la lumière transmise restent polarisées complétement dans leur plan de polarisation primitif.

Dans les cas que nous précisons ici, cette persistance du plan de polarisation se vérifie aisément par l'expérience. Nous l'avons déjà énoncé. Elle est, du reste, une conséquence des idées de

Fresnel, idées que nous n'avons point cherché à établir théoriquement.

Il est facile d'établir que si l'on a n lames au lieu d'une seule, la proportion du rayon incident qui sera réfléchie aura pour valeur $\frac{2n\,R}{1+(2n-1)\,R}$, et celle qui sera transmise $\frac{1-R}{1+(2n-1)\,R}$.

Quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, la valeur ρ que prend R sous une incidence quelconque est plus grande que la valeur ρ', relative à la même incidence lorsque le rayon est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. On en déduit immédiatement que si l'on fait tomber sur une pile de glaces deux faisceaux lumineux égaux polarisés, l'un dans le plan de réflexion, l'autre dans le plan perpendiculaire, la lumière polarisée dans le plan de réflexion prédominera dans le rayon réfléchi. Dans le rayon transmis, la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence sera en proportion plus forte que l'autre.

Cela revient à dire que l'expression $\frac{2n}{\frac{1}{R}+(2n-1)}$ croît avec R

et que l'inverse a lieu pour l'expression $\frac{1-R}{1+(2n-1)\,R}$; ce qui est evident. Si les intensités des deux faisceaux incidents étaient inégales, Q pour le premier et Q′ pour le second, Q étant plus grand que Q′, les deux rayons transmis seraient respectivement

$$Q\frac{1-R}{1+(2n-1)R} \qquad \text{et} \qquad Q'\frac{1-R'}{1+(2n-1)R'}.$$

Pour les très-petites incidences, le premier est originairement plus grand que le second, mais il décroît plus rapidement quand l'incidence augmente (v. p. 507). On conçoit donc qu'il puisse lui devenir égal pour une incidence et un nombre de glaces suffisant, et alors la lumière émergente paraît dépolarisée. Soit i l'incidence pour laquelle cet effet a lieu; sous une inclinaison $i-\delta$, la lumière émergente sera polarisée dans le plan d'incidence, elle sera polarisée dans un plan perpendiculaire lorsque l'incidence deviendra $i+\delta$. Les images vues avec l'analyseur d'Arago passeront alors d'une teinte à sa complémentaire.

Les formules qui donnent la proportion dans laquelle la lumière est réfléchie ou transmise par une pile de n glaces ont été établies dans un mémoire inséré aux *Ann.*, sér. III, tom. XXX, sous le titre : *Recherches sur la polarisation de la chaleur*, par

F. de la Provostaye et P. Desains. Nous en avons donné des vérifications directes; ici je vais exposer rapidement le calcul général.

J'admettrai que les formules sont vraies pour une pile de $(n-1)$ glaces, et je démontrerai qu'elles le sont encore pour n, et cela suffira pour prouver leur généralité, car nous les avons établies page 512 pour le cas d'une glace.

Soit un rayon d'intensité 1 tombant sur une pile que je considère comme formée de deux portions : 1° une première pile de $(n-1)$ lames, 2° une lame seule.

Les $(n-1)$ premières lames réfléchissent à l'extérieur une portion A et transmettent B. Cette quantité B tombe sur la lame isolée qui en réfléchit $B\frac{2R}{1+R}$; de cette lumière une portion $B\frac{2R}{1+R}B$ émerge à travers le paquet des $n-1$ lames supérieures et va se joindre à A dans le faisceau réfléchi définitif; mais une autre portion $B.\frac{2R}{1+R}.A$ revient à la lame unique inférieure; celle-ci en réfléchit une portion

$$B.\frac{2R}{1+R}.A.\frac{2R}{1+R},$$

dont il émerge à travers les $(n-1)$ premières lames

$$B.\frac{2R}{1+R}.A.\frac{2R}{1+R}.B\,..$$

Aussi le faisceau réfléchi total est

$$A+B^2\frac{2R}{1+R}+B^2A\left(\frac{2R}{1+R}\right)^2\ldots$$

$$A+\frac{2R.B^2}{1+R}\left[1+\frac{2AR}{1+R}+\left(\frac{2AR}{1+R}\right)^2\ldots\right]$$

$$A+\frac{2R\,B^2}{1+R}\left(\frac{1}{1-\frac{2AR}{1+R}}\right)$$

$$A+2RB^2\frac{1}{1+R-2AR}$$

ou, comme $A=1-B$,

$$\frac{(1-B)(1+R-2R+2BR)+2B^2R}{1+R-2R+2BR}$$

$$\frac{1-R-B+3BR}{1-R+2BR}$$

Or,

$$B = \frac{1 - R}{1 + (2n - 3)R}.$$

Portons cette valeur dans l'expression précédente, elle deviendra

$$\frac{(1 - R)[1 + (2n - 3)R] + (1 - R)(3R - 1)}{(1 - R)[1 + (2n - 3)R] + 2(1 - R)R}$$

ou

$$\frac{2nR}{1 + (2n - 1)R}.$$

On en déduit pour expression de la lumière transmise :

$$1 - \frac{2nR}{1 + (2n - 1)R} = \frac{1 - R}{1 + (2n - 1)R}.$$

Pour déduire de ces formules les lois suivant lesquelles un rayon de lumière naturelle est, soit réfléchi, soit transmis par une pile de glaces, il suffit de se reporter aux considérations développées page 510. En les appliquant au cas qui nous occupe on voit immédiatement que si l'intensité de la lumière incidente est égale à l'unité, le rayon réfléchi résultera de la superposition de deux autres, l'un polarisé dans le plan de réflexion et ayant pour intensité $\frac{1}{2}\frac{2nR}{1+(2n-1)R}$; l'autre polarisé, dans un plan perpendiculaire et ayant pour intensité $\frac{1}{2}\frac{2n-R'}{1+(2n-1)R'}$. Ces deux rayons presentent au même point des différences de phase sans cesse variables, et par suite ils ne peuvent se combiner pour former un rayon polarisé rectilignement unique.

De même le mouvement transmis pourra être considéré comme résultant de la superposition de deux autres mouvements indépendants l'un de l'autre; l'un est polarisé dans le plan de réflexion, et il a pour intensité

$$\frac{1}{2}\frac{1 - R}{1 + (2n - 1)R};$$

l'autre est polarisé dans un plan perpendiculaire et a pour intensité

$$\frac{1}{2}\frac{1 - R'}{1 + (2n - 1)R'}.$$

La seconde de ces deux dernières expressions est plus grande

que la première; le mouvement ou, si l'on aime mieux, le faisceau transmis est partiellement polarisé dans un plan perpendiculaire à celui de la réflexion et la différence

$$(d) \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{1-R'}{1+(2n-1)R'}-\frac{1-R}{1+(2n-1)R}\right\}$$

mesure ce qu'on appelle *la quantité absolue* de lumière polarisée renfermée dans le rayon transmis, et

$$\frac{\dfrac{1-R'}{1+(2n-1)R'}-\dfrac{1-R}{1+(2n-1)R}}{\dfrac{1-R'}{1+(2n-1)R'}+\dfrac{1-R}{1+(2n-1)R}}$$

représente la *proportion* de lumière polarisée contenue dans le rayon émergent.

De même

$$(c) \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{2nR}{1+(2n-1)R}-\frac{2nR'}{1+(2n-1)R'}\right\}$$

est la *quantité absolue* de lumière polarisée contenue dans le faisceau réfléchi, et

$$\frac{\dfrac{2nR}{1+(2n-1)R}-\dfrac{2nR'}{1+(2n-1)R'}}{\dfrac{2nR}{1+(2n-1)R}+\dfrac{2nR'}{1+(2n-1)R'}}$$

la *proportion* de lumière polarisée contenue dans ce faisceau.

D'après les expressions (c) et (d), on voit que quand un rayon naturel tombe sur une pile de glaces, les quantités absolues de lumière polarisée qui sont contenues dans les faisceaux réfléchis et réfractés sont égales.

Arago avait trouvé expérimentalement cette égalité pour le cas où la pile se réduit à une lame unique. Les calculs que nous venons de citer font voir que le théorème est général.

Ces calculs, au reste, renferment la théorie complète des piles de glaces. Je transcrirai encore quelques conséquences que nous en avons déduites (voir le mémoire déjà cité) :

1° Quand la pile se réduit à une lame, la proportion de lumière polarisée, contenue dans le rayon transmis, va en croissant jusqu'à $i = 90$, compté à partir de la normale; en appelant l l'indice elle est alors $\frac{l^2-1}{l^2+1} = 0,396$ pour $l = 1,52$.

2° Cette proportion est toujours la même pour $i = 90$ quel que soit le nombre des lames.

3° Dès qu'on emploie une pile formée de plusieurs lames, la proportion de lumière polarisée, contenue dans le rayon transmis, a un véritable maximum. Ce maximum, lorsqu'on emploie

deux lames, a lieu pour	$i = 77° 51'$
trois lames	$74° 41'$
dix lames	$64° 52'$

Quand on augmente de plus en plus le nombre des lames, l'angle pour lequel a lieu la proportion polarisée maxima se rapproche de plus en plus de l'angle de polarisation, et le maximum se rapproche de plus en plus de l'unité.

D'après ce que nous venons de dire, on conçoit que les piles de glaces peuvent être employées avantageusement comme polariseurs et analyseurs, dans les expériences où l'on cherche à projeter les phénomènes de la polarisation colorée. Mais c'est surtout dans le polarimètre d'Arago qu'elles ont reçu leur plus utile application. Nous allons revenir sur l'usage de cet appareil.

Graduation du polarimètre d'Arago. — Dans une même direction cheminent deux faisceaux de lumière, polarisés à angle droit et d'intensités inégales. Il s'agit de connaître le rapport de ces intensités.

Pour y arriver, on fait coïncider le plan de réflexion sur la pile avec le plan de polarisation du plus intense des deux faisceaux. On incline la pile sur la direction du rayon jusqu'à ce que la lumière transmise donne des images blanches au polariscope, et on observe l'angle d'inclinaison. Cela fait, on polarise complétement un faisceau incident, et avant de le recevoir sur la pile, on le transmet normalement à travers une lame de quartz parallèle à l'axe. L'axe de cette lame est contenu dans le plan de réflexion du rayon sur la pile. Lorsqu'en outre il est contenu dans le plan de polarisation du rayon, ce dernier passe tout entier à l'état ordinaire; mais si l'axe de la lame et le plan de réflexion font un angle φ avec le plan de polarisation, il tombe sur la pile un ensemble de deux rayons polarisés à angle droit, l'un $\cos^2\varphi$ dans le plan de réflexion, l'autre $\sin^2\varphi$ perpendiculairement à ce plan. On cherche la valeur qu'il faut donner à φ pour que la pile dépolarise la lumière incidente sous un angle égal à celui pour lequel la dépolarisation avait été obtenue dans l'expérience précédente, et le problème est résolu.

Pour cette valeur de φ en effet la fraction $\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$ est égale au rapport cherché.

La connaissance de l'angle φ permet aussi de calculer la va-

leur numérique de l'expresion $\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$. Or, d'après les définitions de la page précédente, cette expression ou son égale $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ est la proportion de lumière polarisée contenue dans le rayon émergent de la lame.

Ainsi donc, à l'aide d'une pile de glaces, on peut arriver à connaître la proportion de lumière polarisée qui se trouve dans un rayon donné. Ordinairement, lorsqu'on veut employer une pile de glaces à cet usage, on la gradue une fois pour toutes en cherchant pour une série de valeurs de l'angle φ celles des inclinaisons i qui répondent à la dépolarisation complète. Cette graduation faite, pour analyser un rayon partiellement polarisé, on le fait tomber sur la pile en ayant soin que le plan dans lequel il paraît partiellement polarisé coïncide avec celui de la réflexion, on incline alors la pile jusqu'à ce que la lumière transmise soit dépolarisée, et l'on cherche dans la table la valeur de φ qui répond à l'inclinaison i pour laquelle la dépolarisation a eu lieu.

Nous ajouterons que toute cette méthode polarimétrique est complétement indépendante de la théorie de Fresnel sur la réflexion. La possibilité de dépolariser avec une pile de glaces un rayon partiellement polarisé dans le plan d'incidence est un fait d'expérience; et la graduation repose exclusivement sur la loi de Malus.

Recherches de M. Ed. Desains. — Dans un travail publié en novembre 1850 et inséré aux *Ann.*, série III, tom. XXXI, M. Ed. Desains a montré que l'on peut, à l'aide d'un polarimètre, vérifier très-exactement l'exactitude des formules fondamentales de la page 506, formules qui résument les idées de Fresnel touchant la réflexion sur le verre et ses analogues.

D'après tout ce qui a été dit précédemment, si ces formules sont exactes, lorsqu'un rayon naturel d'intensité 1 tombe sur un miroir de verre noir, l'incidence étant i, le rayon réfléchi résulte de la superposition de deux autres, l'un polarisé dans le plan de réflexion et ayant pour intensité $\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$, l'autre polarisé dans un plan perpendiculaire et ayant pour intensité $\frac{1}{2}\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}$. Et dès lors la proportion de lumière polarisée qui se trouve dans ce rayon réfléchi doit être égale à

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{1}{2}\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}}{\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{1}{2}\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}}$$

ou encore à

$$\frac{\cos^2(i-r)-\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)+\cos^2(i+r)}.$$

Pour chercher si ces conséquences sont exactes on faisait tomber sur un miroir de verre noir un rayon de lumière blanche et bien naturelle, et l'on déterminait à l'aide du polarimètre la proportion de lumière polarisée qui se trouvait dans le rayon réfléchi. Les résultats de nombreuses expériences faites sous des incidences très-différentes ont établi qu'en effet, pour chacune de ces incidences, la proportion de lumière polarisée contenue dans le faisceau réfléchie est donnée par l'expression :

$$\frac{\cos^2(i-r)-\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)+\cos^2(i+r)}$$

Ainsi, il y a accord entre les résultats qu'indique la formule de Fresnel, et ceux que l'expérience donne touchant la composition d'un rayon de lumière réfléchi sur le verre, et comme la graduation de la pile ne suppose pas ces formules, l'accord dont nous parlons établit la légitimité de ces dernières.

Nous extrayons du Mémoire de M. Ed. Desains deux tableaux qui donnent l'un les éléments de la graduation de son polarimètre, l'autre les nombres desquels résulte la vérification de la formule de Fresnel.

TABLEAU RELATIF A LA GRADUATION DU POLARIMÈTRE.

ANGLE φ.	VALEURS de $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.	ANGLE i du rayon incident avec la normale à la pile quand il y a dépolarisation.
20	0,766	51° 39′
25	0,643	46° 2′
30	0,500	40° 18′
35	0,342	33° 32′
40	0,174	24° 26′

COMPARAISON DES DONNÉES DU CALCUL ET DE L'EXPÉRIENCE TOUCHANT LA PROPORTION DE LA LUMIÈRE POLARISÉE CONTENUE DANS LE RAYON RÉFLÉCHI SOUS L'ANGLE i.

ANGLE i.	RAPPORT calculé.	RAPPORT observé.	DIFFÉRENCES.
30	0,413	0,420	— 0,007
35	0,563	0,555	+ 0,008
40	0,719	0,707	+ 0,012
70	0,708	0,698	+ 0,010
75	0,536	0,539	— 0,003

Dans le calcul des expériences que nous venons de citer, la valeur de l'indice du miroir de verre noir employé avait été déduit de la recherche directe de l'angle sous lequel le miroir polarisait complétement la lumière par réflexion. — D'après la la loi de Brewster on a, comme nous l'avons déjà dit, $tg i = n$, cette méthode permet de déterminer la valeur de la constante sur le miroir même que l'on emploie, et elle donne des résultats qui doivent être indépendants des altérations superficielles du miroir, altérations qui, d'après des recherches spéciales de M. Seebeck, ont une influence sensible sur les phénomènes de la réflexion.

CHAPITRE XXIV.

POLARISATION CIRCULAIRE ET ELLIPTIQUE. RÉFLEXION TOTALE. — RÉFLEXION MÉTALLIQUE.

§ 1. — Réflexion totale. — Théorie de Fresnel.

Les formules de Fresnel permettent de calculer l'intensité de la réflexion intérieure aussi bien que celle de la réflexion extérieure. Toutefois, quand il s'agit de la réflexion intérieure, leur

application cesse d'être possible au moment où l'angle d'incidence devient égal à celui pour lequel la réflexion commence à être totale. A partir de cette limite, il n'y a plus d'angle d'émergence r qui soit lié à l'angle d'incidence par la relation $\sin i = n \sin r$, parce que $\frac{\sin i}{n}$ est plus grand que 1. Aussi quand on élimine des formules l'angle r en vertu de la relation $\sin i = n \sin r$, la forme qu'elles prennent devient imaginaire au moment où l'angle i atteint la valeur définie par la relation précédente. A partir de cette limite (Fresnel, *Ann.*, série II, tom. XXIX), « les rayons réfléchis éprouvent en général une dépolarisation partielle, surtout si le plan de réflexion est dans un azimut de 45° relativement au plan de polarisation. La lumière ainsi modifiée peut toujours être représentée par la réunion de deux faisceaux polarisés l'un suivant le plan de réflexion, l'autre suivant une direction perpendiculaire, et différant d'ailleurs dans leur marche d'une certaine fraction d'ondulation. Quand cette différence est nulle, la lumière reste complétement polarisée d'après les règles d'interférence. C'est ce qui a lieu au commencement de la réflexion totale et à sa seconde limite, c'est-à-dire quand les rayons incidents deviennent parallèles à la surface; mais entre ces deux limites il y a toujours entre les deux faisceaux une différence de marche qui croît avec l'angle d'incidence...

« En interprétant de la manière qui m'a paru la plus probable ce que l'analyse voulait indiquer par la forme imaginaire que prennent alors les expressions représentatives de l'intensité des rayons réfléchis, j'ai été conduit à penser que si l'on représente par une circonférence entière la longueur de l'ondulation lumineuse, la différence de marche qui nous occupe devait être représentée par un angle ayant pour *cosinus*

$$\frac{2n^2 \sin^4 i - (n^2 + 1) \sin^2 i + 1}{(n^2 + 1) \sin^2 i - 1}.$$

« Lorsque la lumière est entièrement polarisée suivant le plan de réflexion ou suivant un plan perpendiculaire, elle ne donne qu'un système d'ondes qui conserve le même plan de polarisation et se trouve seulement réfléchi à des profondeurs un peu différentes, selon que son plan de polarisation est parallèle ou perpendiculaire au plan de réflexion. Mais quand les ondes incidentes sont polarisées dans tout autre azimut, on peut alors décomposer leurs mouvements vibratoires parallèlement et per-

pendiculairement au plan d'incidence; et les amplitudes de ces vibrations composantes sont représentées par le *sinus* et le *cosinus* de l'angle que le plan de polarisation fait avec le plan d'incidence. — Leur différence de marche après la réflexion se calculera par la formule ci-dessus... D'après cela, il sera facile de calculer les intensités des images ordinaire et extraordinaire que la lumière totale réfléchie produira en traversant un spath calcaire d'après l'azimut de sa section principale en suivant une méthode analogue à celle que j'ai donnée pour les lames minces cristallisées (voir p. 490), *n* varie un peu avec la nature des rayons; les images se colorent donc surtout dans le voisinage de l'angle pour lequel commence la réflexion totale. — Le calcul des teintes permettrait de vérifier la formule..., mais je me suis particulièrement attaché à la vérifier par des expériences susceptibles d'une plus grande exactitude...

« Dans cette vérification, je me suis proposé d'obtenir une différence de 1/4 d'onde par deux ou un plus grand nombre de réflexions totales. En dirigeant bien exactement le plan de la polarisation primitive dans un azimut de 45° par rapport au plan de réflexion, afin que les deux faisceaux fussent de même intensité, leur réunion devait présenter à travers un spath les apparences d'une lumière complétement dépolarisée et tous les caractères de la polarisation circulaire. — L'espèce de verre que j'ai employée était le crown de St-Gobain dont l'indice est 1,51. — En mettant ce nombre à la place de *n*, on trouve, d'après la formule, que les incidences qui doivent donner rigoureusement une différence de marche de 1/4 d'onde, après deux réflexions intérieures, sont 48,37 et 54,37'; entre ces deux limites la différence varie très-peu. — D'après cela j'ai fait tailler un parallélipipède de verre dont les faces d'entrée et de sortie étaient inclinées de 54° 1/2 sur les surfaces réfléchissantes, afin que les rayons réfléchis sous l'angle 54° 1/2 fussent perpendiculaires aux faces d'entrée et de sortie, et j'ai proportionné la longueur de ce parallélipipède de telle sorte que les rayons entrés par le milieu de la première face sortissent par le milieu de la seconde, et l'expérience m'a fait voir que, sous cet angle de 54° 1/2, deux réflexions successives dépolarisent complétement la lumière polarisée dans l'azimut 45°.

« Le calcul et l'expérience s'accordent également à prouver que sous l'incidence 69° 12' trois réflexions totales dépolarisent complétement la lumière. — Enfin, pour obtenir le même effet par quatre réflexions successives, il faudrait opérer sous l'angle de 74° 42'... »

Nous avons cité textuellement ce passage remarquable de Fresnel, parce que c'est dans ce passage qu'il fait voir comment la réflexion peut imprimer aux deux composantes principales d'un rayon polarisé des différences de marche variables avec l'incidence, et comment, par un nombre suffisant de réflexions opérées dans le même plan et sous le même angle, on peut donner à cette différence des valeurs assignées à l'avance.

Ce passage peut être regardé comme le point de départ des recherches expérimentales et des travaux théoriques qui, depuis Fresnel, ont été exécutés sur le phénomène si important de la réflexion lumineuse à la surface des corps polis.

§ 2. — Réflexion métallique.

Recherches de Brewster, Biot, Neumann, de Senarmont. — Les phénomènes que l'on observe en étudiant la réflexion de la lumière à la surface des métaux diffèrent beaucoup de ceux qui se manifestent lorsque le corps réfléchissant est un miroir de verre ou de substance analogue. D'une part, en effet, si la lumière incidente est naturelle, le faisceau réfléchi ne présente, sous aucune incidence, les caractères d'un rayon polarisé rectilignement d'une manière complète, car il donne toujours deux images en traversant un spath. D'autre part, si le faisceau incident est polarisé rectilignement d'une manière complète, le faisceau réfléchi donne généralement encore deux images en traversant un prisme de spath quelle que soit la direction de la section principale de celui-ci. Il n'y a d'exception que dans les cas où le plan de polarisation primitif est parallèle ou perpendiculaire à celui dans lequel la réflexion s'opère; alors seulement le rayon réfléchi conserve sa polarisation primitive. Ces lois fondamentales de la réflexion métallique ont été découvertes par M. Brewster; la première en 1813, l'autre vers 1830.

En rapprochant ces phénomènes de ceux que Fresnel avait découverts et expliqués dans ses recherches sur la réflexion totale, les physiciens qui, après Brewster, se sont occupés de la réflexion métallique ont pensé que, dans l'acte de la réflexion à la surface d'un métal, la phase de vibration des rayons était modifiée différemment selon que ce mouvement était polarisé perpendiculairement ou parallèlement au plan de réflexion. Ainsi, lorsqu'un rayon dont le plan de polarisation faisant un angle α avec le plan d'incidence viendrait à se réfléchir sur un miroir de métal, les composantes qu'il donnerait dans les deux plans

principaux, c'est-à-dire dans le plan d'incidence et dans le plan perpendiculaire, éprouveraient en se réfléchissant des modifications inégales dans leurs phases aussi bien que dans leurs intensités; et, après la réflexion, ces deux composantes ne pourraient plus donner, en se combinant, naissance à une vibration rectiligne; la vibration serait elliptique (p. 130) et ne pourrait plus être éteinte par un prisme de nicol. Plusieurs conséquences immédiates de cette manière de voir sont vérifiées par l'expérience: que l'on dispose deux miroirs métalliques parallèlement entre eux et qu'on fasse réfléchir plusieurs fois de suite entre ces deux miroirs un rayon polarisé rectilignement dans un plan qui ne soit ni celui d'incidence ni son perpendiculaire; à chaque réflexion la différence de phase des deux composantes du rayon réfléchi se trouvera accrue d'une quantité constante. Par conséquent si, pour une incidence déterminée i, la différence produite par une seule réflexion est une partie aliquote $\frac{1}{p}$ un peu notable d'une demi-circonférence, un petit nombre p de réflexions rendra au rayon la polarisation rectiligne, et alors k étant quelconque, kp réflexions successives sous l'angle i rendront également au rayon sa polarisation rectiligne.

M. Biot est le premier qui ait vu ainsi la polarisation rectiligne rétablie par plusieurs réflexions successives, opérées sous le même angle; et plus tard, en répétant ces expériences sous des incidences variables, M. Brewster a vu que pour beaucoup de métaux deux réflexions successives, dans le même plan, sous un angle voisin de 70°, rendent au rayon sa polarisation rectiligne. Alors, pour un nombre pair de réflexions, le rayon émergent se retrouve toujours polarisé rectilignement, et il en a légitimement conclu que sous cet angle particulier, la différence établie par la réflexion entre les phases des deux composantes principales du rayon réfléchi était de 1/4 d'onde.

Dans ces expériences, on constate aisément que le plan dans lequel le rayon se trouve de nouveau polarisé, ou en d'autres termes, que le plan de polarisation rétablie s'incline tantôt à droite et tantôt à gauche du plan de réflexion. Ce qui doit évidemment arriver dans l'hypothèse adoptée. Chaque fois, en effet, que la différence de phase des deux rayons croît de 1/2 vibration, les choses se passent comme si une des deux composantes changeait de signe, sans que l'autre éprouvât de modification analogue.

Si le faisceau incident est polarisé dans un plan incliné de 45° sur le plan d'incidence, les deux composantes qu'il donne

dans les deux plans principaux sont originairement égales ; mais, comme en général, pour une même incidence, la réflexion ne se fait pas avec la même intensité dans ces deux plans, ces composantes, primitivement égales, deviendront successivement

$$m,\ m^2,\ m^3, \ldots$$
$$n,\ n^2,\ n^3,$$

m et n étant, pour l'incidence considérée, les pouvoirs réflecteurs du métal pour la lumière : 1° dans le plan d'incidence ; 2° dans le plan perpendiculaire.

Si, comme nous le supposons, on opère sous l'incidence qui établit une différence de phase de 1/4 d'onde entre les deux composantes polarisées dans les plans principaux, lorsque la polarisation rectiligne sera rétablie après 1, 2, 3 *couples* de réflexions, le rapport des intensités des deux composantes du rayon polarisé sera :

$$\frac{m^2}{n^2},\ \frac{m^4}{n^4},\ \frac{m^6}{n^6} \ldots$$

Par conséquent, le plan de polarisation de ce rayon devra faire, avec celui de réflexion, des angles dont les tangentes auront successivement pour valeurs (v. p. 509) :

$$\frac{n}{m},\ \frac{n^2}{m^2},\ \frac{n^3}{m^3} \ldots$$

dans le cas où le plan primitif de polarisation ferait un angle α avec le plan de réflexion, les composantes premières seraient $\cos^2 \alpha$ et $\sin^2 \alpha$, et les valeurs des tangentes que nous venons de calculer devraient toutes être multipliées par $tg\alpha$. Enfin, dans le cas plus général où l'incidence serait telle qu'il fallût p réflexions pour rétablir la polarisation, le plan de polarisation rétablie ferait avec le plan d'incidence un angle β donné par la formule

$$\frac{\sin^2 \alpha\, n^p}{\cos^2 \alpha\, m^p} = tg^2 \beta,$$

ou

$$\left(\frac{n}{m}\right)^p tg^2 \alpha = tg^2 \beta.$$

L'expérience vérifie très-rigoureusement ces conséquences ; par conséquent on ne peut se refuser à admettre que la réflexion à la surface d'un miroir métallique donne la polarisation elliptique à tout rayon qui, à l'incidence, est polarisé rectilignement dans

un plan qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan d'incidence.

De plus, les méthodes d'observation que nous venons d'indiquer font connaître les intensités relatives et la différence de phase des deux composantes principales qui se combinent pour donner le mouvement elliptique. Par suite, en se reportant aux calculs de la page 131, on voit que l'on est en mesure de déterminer complétement et les grandeurs relatives des axes de ces ellipses et leur orientation. Les mots *composantes principales* sont souvent employés, comme nous le faisons ici, pour désigner les composantes polarisées dans le plan d'incidence et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

CHAPITRE XXV.

SUITE DE LA POLARISATION ELLIPTIQUE. — RECHERCHES DE M. JAMIN SUR LA RÉFLEXION A LA SURFACE DES CORPS POLIS.

Dans une série de recherches dont les résultats ont été imprimés aux *Ann.*, sér. III, tom. XIX, XXIV, XXIX, XXX, M. Jamin a repris, dans son ensemble, la question de la réflexion lumineuse à la surface de tous les corps polis non cristallisés, et il a fait voir que l'expérience s'accorde très-bien avec les formules auxquelles M. Cauchy était arrivé en cherchant analytiquement l'explication de ce phénomène.

Les déterminations que M. Jamin a dû faire dans cet ensemble de travaux sont nécessairement des mesures photométriques et des mesures de différences de phases. Il a exécuté les unes et les autres, quelquefois en ayant recours aux méthodes de M. Brewster et de M. de Sernarmont, mais le plus souvent en employant des procédés ou des appareils qui lui sont propres.

§ 1. — DÉTERMINATIONS PHOTOMÉTRIQUES.

Voici d'abord en quoi consiste la méthode photométrique nouvelle employée par M. Jamin :

Pour trouver le pouvoir réflecteur absolu d'un métal dans des circonstances déterminées, M. Jamin le compare à celui du verre

dans les mêmes circonstances et, comme ce dernier est connu d'après les formules de Fresnel, le résultat de la comparaison conduit immédiatement à la solution du problème.

Les expériences se font de la manière suivante : On assemble un miroir de verre et un miroir du métal à étudier, en prenant soin qu'ils se raccordent par une ligne bien droite, et que leurs surfaces polies soient dans le même plan. Sur ce miroir double, on fait tomber un rayon polarisé dans l'un des deux plans principaux, soit le plan d'incidence, et l'on fait en sorte que le plan d'incidence soit perpendiculaire à la ligne de séparation du métal et du verre. Si l'on désigne par 1 l'intensité commune des rayons qui tombent sur des étendues égales des miroirs, les portions de ces rayons égaux qui se trouveront réfléchies par les deux miroirs seront a pour le verre et x pour le métal, a étant égal à $\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$.

Recevons normalement ces deux rayons réfléchis sur un spath dont la section principale fasse un angle α avec le plan de ré-

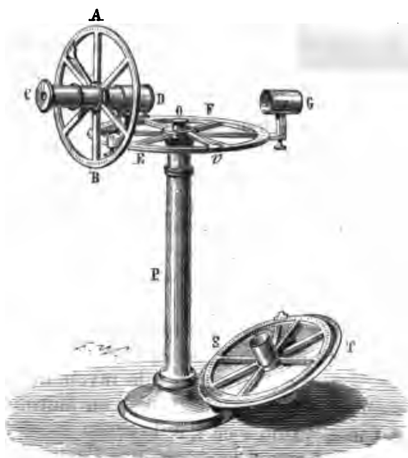


Fig. 748.

flexion; l'image réfléchie par le verre en donnera deux autres dont les intensités seront $a\cos^2\alpha$ et $a\sin^2\alpha$. Il en sera de même pour x. Or, en faisant varier convenablement α, on pourra toujours arriver à rendre l'image ordinaire $a\cos^2\alpha$ égale à l'image

extraordinaire $x\, sin^2 \alpha$ du rayon réfléchi par le métal; pour cette valeur de α on aura donc $a\, cos^2 \alpha = x\, sin^2 \alpha$,

$$cos^2 \alpha \frac{sin^2(i - r)}{sin^2(i + r)} = x$$

Pour que cette méthode conduise à des résultats certains, il faut déterminer la valeur de l'indice qui convient au miroir de verre que l'on emploie. Une série d'expériences directes a conduit M. Jamin à prendre 1,4925 pour valeur de cet indice.

L'appareil employé par M. Jamin dans ses expériences est représenté fig. 748. EFv est un cercle divisé horizontal porté à la partie supérieure d'une colonne solide P, et sur le centre O duquel est assujettie une pièce servant de support aux miroirs. A l'aide de l'alidade Ov on peut faire tourner cette pièce sur elle-même et en mesurer le mouvement. G est un tube fixé au cercle, parallèle à sa surface et destiné à recevoir un prisme de Nicol. CD est un second tube semblable à G mais porté sur un alidade mobile. C'est dans ce tube que l'on engage le prisme de spath achromatisé à l'aide duquel se font les mesures photométriques. Les axes des tubes CD et G sont tous deux horizontaux quand le plan du cercle EFv l'est lui-même; ils viennent se rencontrer en un point de la normale menée à ce plan par le centre o. Enfin les positions relatives du polariseur et de l'analyseur sont déterminées à l'aide de cercles gradués AB et ST qui se fixent en même temps qu'eux sur les tubes IG et CD.



Fig. 749.

Dans la fig. 749, P est le tube qui reçoit le polariseur, MM' le miroir, A le tube qui reçoit l'analyseur.

Pour régler l'appareil, on polarise le rayon incident dans un plan très-sensiblement horizontal; puis, on tourne l'alidade sur laquelle CD est fixé, jusqu'à ce que le rayon incident tombe sur l'analyseur, on éteint rigoureusement une des images et à l'aide d'une petite vis de pression on rend impossible toute rotation de l'analyseur autour de l'axe de CD; alors on installe le miroir, et après avoir fait pivoter tout l'équipage mobile ABCD jusqu'à ce que l'angle compris entre les axes des tubes CD et IG soit double de celui sous lequel on veut étudier la réflexion, on règle le miroir de telle sorte que l'analyseur reçoive le rayon réfléchi. Si

l'image éteinte avant la réflexion ne l'est plus complétement on la fait de nouveau disparaître en tournant légèrement et de quantités égales le polariseur et l'analyseur, et on est alors assuré que la lumière incidente est polarisée dans le plan de réflexion. Ce point de départ obtenu, on procède aux mesures décrites page 531.

On peut éclairer le nicol polariseur soit avec la lumière d'une lampe transmise par un verre rouge, soit avec la lumière très-homogène, mais faible de l'alcool salé, soit enfin avec les rayons prismatiques. M. Jamin a successivement employé toutes ces différentes sources. Nous transcrirons d'abord une série de résultats obtenus par cette première méthode et extraits de ses mémoires; ils donneront une idée de la partie exclusivement photométrique de ses recherches.

TABLEAU DONNANT SOUS TOUTES LES INCIDENCES LES RACINES CARRÉES DES POUVOIRS RÉFLECTEURS DU MÉTAL DES MIROIRS POUR LA LUMIÈRE ROUGE POLARISÉE.

INCIDENCES.	Lumière polarisée dans le plan de réflexion.	Lumière polarisée dans un plan perpendiculaire au plan de réflexion.
86	0,968	0,754
82	0,987	0,688
80	0,959	0,651
78	0,944	0,683
76	0,950	0,696
74	0,940	0,626
72	0,926	0,630
70	. . .	0,637
68	0,906	0,646
50	0,880	0,730
40	0,832	0,761
30	0,849	0,781

TABLEAU DONNANT SOUS TOUTES LES INCIDENCES LES RACINES CARRÉES DU POUVOIR RÉFLECTEUR DE L'ACIER POUR LA LUMIÈRE ROUGE POLARISÉE.

INCIDENCES.	Lumière polarisée dans le plan de réflexion.	Lumière polarisée dans le plan perpendiculaire au plan de réflexion.
85	0,951	0,719
80	0,945	0,547
75	0,946	0,566
70	0,915	0,545
65	0,898	0,627
60	0,897	0,680
55	0,869	...
50	0,828	0,666
45	0,818	0,689
40	...	0,688
35	0,800	0,741
30	0,790	0,760
25	0,791	0,769
20	0,780	0,770

Dans leurs recherches sur la réflexion métallique, M. Brewster et M. de Sénarmont estimaient le rapport des intensités des deux composantes principales du rayon réfléchi, en mesurant l'azimut du plan dans lequel le rayon était polarisé, lorsqu'un nombre suffisant et connu des réflexions sous le même angle lui avaient rendu sa polarisation rectiligne. M. Jamin a souvent employé le même procédé, et son appareil est très-commode pour ce genre d'observation.

Il suffit, en effet, de fixer sur le centre du cercle divisé, non plus un miroir unique, mais une pièce pouvant porter deux miroirs bien parallèles et situés à une distance que l'on pouvait faire varier à volonté. On prend pour analyseur un prisme de nicol que l'on fixe dans le tube CD (fig. 748). Le cercle divisé AB sert à mesurer l'azimut de la polarisation rétablie, et l'on peut aisément, d'après la valeur de l'incidence et la distance des miroirs, estimer le nombre des réflexions que le rayon a subies entre eux.

Lorsqu'on connaît : 1° l'incidence pour laquelle la polarisation est rétablie après deux réflexions sur des miroirs parallèles ; 2° l'azimut du plan dans lequel est polarisé le rayon réfléchi sous cette incidence, quand l'azimut du plan primitif de polarisation est égal à 45°, on peut à l'aide des formules de M. Cauchy, calculer, dans tous les cas possibles, l'intensité de la lumière réfléchie par le métal dont sont faits les miroirs employés. En employant l'appareil que nous venons de décrire, M. Jamin a pour un grand nombre de métaux déterminé ces constantes fondamentales, et il en a déduit les résultats suivants :

TABLEAU DES INTENSITÉS DE LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE SOUS L'INCIDENCE NORMALE PAR DIFFÉRENTS MÉTAUX.

	ARGENT.		MÉTAL DES MIROIRS.	
	Une réflexion.	Dix réflexions.	Une réflexion.	Dix réflexions.
Rouge	0,929	0,478	0,692	0,035
Orangé	0,909	0,388	0,654	0,014
Jaune	0,905	0,359	0,632	0,010
Vert	0,902	0,357	0,625	0,009
Bleu	0,878	0,273	0,606	0,006
Indigo	0,875	0,264	0,599	0,005
Violet	0,867	0,242	0,599	0,006

	ACIER.		ZINC.	
	Une réflexion.	Dix réflexions.	Une réflexion.	Dix réflexions.
Rouge	0,609	0,007	0,576	0,004
Orangé	0,600	0,006	0,594	0,005
Jaune	0,599	0,006	0,602	0,006
Vert	0,593	0,005	0,616	0,008
Bleu	0,608	0,007	0,628	0,009
Indigo	0,604	0,006	0,635	0,010
Violet	0,599	0,006	0,636	0,011

§ 2. — MESURE DES DIFFÉRENCES DE PHASE. COMPENSATEUR.

Dans ses études sur la polarisation elliptique, M. Jamin a souvent estimé la différence de phase des deux composantes du mouvement lumineux à l'aide d'un procédé différent de celui de Brewster (voir p. 528) et susceptible d'être commodément employé dans des circonstances où l'on ne pourrait plus adopter celui-ci. Pour estimer la différence de phase de deux rayons, M. Jamin la fait disparaître à l'aide d'un compensateur d'une sorte particulière, imaginé par M. Babinet. Puis, comme à l'aide de dispositions spéciales il peut mesurer exactement le retard produit par le compensateur seul dans son expérience, il en conclut immédiatement la grandeur de la différence de phase primitive qui lui est égale.

Compensateur. — Imaginons que l'on taille en forme de prisme très-aigu une lame de cristal de roche parallèle à l'axe, et supposons que la direction de cet axe soit celle de l'arête réfringente, si l'on prend ce prisme comme lame mince dans les expériences décrites et discutées pp. 490 et suiv., on obtiendra, dans chacune des deux images données par l'analyseur, une série de franges parallèles à l'arête réfringente. Occupons-nous de l'image ordinaire. La frange correspondante à l'arête sera brillante, lorsque la section principale de l'analyseur fera, avec le plan de polarisation primitif, un angle b peu considérable. Supposons b égal à zéro.

En reprenant la notation de la page 492 l'intensité de l'image ordinaire aux points qui correspondent à l'épaisseur e de la lame de quartz sera, pour chaque couleur, proportionnelle à

$$1 - \sin^2 2a \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}.$$

Elle sera maximum pour les valeurs successives de e qui rendront nulle l'expression $\sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda}$, c'est-à-dire toutes les fois qu'on aura $H - H' = 2n\frac{\lambda}{2}$, n étant un nombre entier quelconque. Elle sera minimum lorsque l'on aura $H - H' = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, et cette valeur minimum sera zéro lorsque a sera égal à $45°$.

En un mot, les franges se produisent ici comme dans l'expérience des disques concaves. Dans la lumière blanche, ces franges seront irisées, parce que la position du minimum et du maximum successifs varie avec λ. Quant à la vivacité de leur teinte, elle est au maximum pour $a = 45$.

Si le prisme de quartz parallèle que nous venons de considérer avait son arête perpendiculaire à l'axe, et si l'on représentait toujours par a l'angle de l'arête avec le plan primitif de polarisation, l'intensité de l'image ordinaire aurait pour expression :

$$1 - \sin^2 2(a + 90) \sin^2 \pi \frac{H - H'}{\lambda};$$

mais cette substitution de $a + 90$ à a ne change absolument rien à la valeur du second terme de l'expression précédente : le phénomène reste identique à lui-même. Ainsi, que l'on prenne les deux prismes, qu'on les juxtapose l'un au bout de l'autre par leurs arêtes réfringentes, on obtiendra un système de franges parfaitement symétrique de part et d'autre, d'une frange centrale, correspondant au point de raccordement des prismes. Cette frange sera blanche dans l'image ordinaire, si l'on opère avec la lumière solaire complexe; elle serait noire dans l'image extraordinaire. Dans tous les cas, les franges ont leur netteté maximum pour $a = 45$.

Au lieu de fixer ainsi les deux prismes l'un contre l'autre par leur arête réfringente, imaginons qu'on les superpose comme ils le sont dans le compensateur d'interférence p. 352, ou dans le compensateur de MM. Soleil et Duboscq, p. 481, c'est-à-dire de telle sorte que la partie la plus épaisse de l'un réponde à la plus mince de l'autre. Supposons que leur monture tienne le premier dans une position fixe et permette à l'autre de glisser lentement contre lui sous l'action d'une vis micrométrique à tête graduée. Les deux prismes étant taillés sous le même angle, si on leur donne même longueur, il arrivera nécessairement qu'au milieu de la lame formée par leur ensemble ils auront tous deux même épaisseur lorsque leurs extrémités coïncideront; partout ailleurs ils auront des épaisseurs inégales. La différence croîtra à mesure qu'on s'éloignera du milieu, et la prédominance de l'un des prismes ira croissant dans l'un des deux sens; celle de l'autre dans le sens opposé. Or de ce que les axes des deux prismes sont rectangulaires entre eux il résulte que la composante du rayon incident qui traverse le premier prisme à l'état de rayon ordinaire, traverse le deuxième à l'état de rayon extraordinaire, et

réciproquement. Si donc, dans le premier prisme, elle a march plus vite que la deuxième composante, elle se meut au contraire plus lentement dans le second, et l'on en conclut qu'en chaque point le système des deux prismes agit comme une lame simple dont l'épaisseur serait égale à la différence de celle des prismes, et dont l'axe serait tourné comme celui du prisme prédominant.

Ainsi, plaçons la lame double, le compensateur dont nous venons de décrire la construction, entre un polariseur et un analyseur dont les sections principales sont parallèles; tournons-le de manière que les arêtes réfringentes des prismes qui le forment soient à 45° du plan de polarisation primitif, et l'image ordinaire présentera ce système de franges à centre blanc, dont nous avons analysé la production à la page précédente.

Ceci posé, admettons que l'on prenne une lame de quartz, toujours parallèle à l'axe, très-mince, ayant une largeur égale à la moitié de celle de nos prismes. Fixons-la sur le premier d'entre eux de façon à le recouvrir dans toute sa longueur, mais seulement dans la moitié de sa largeur, et admettons que son axe soit parallèle à celui du prisme sur lequel elle se trouve maintenant placée. L'image ordinaire donnée par l'analyseur va maintenant se trouver formée de deux systèmes de franges juxtaposés, mais dont les franges centrales ne se correspondront plus. L'un de ces systèmes est le reste du système primitif; sa frange centrale est toujours au centre de l'image. Elle n'a pas changé de place.

La frange centrale de l'autre système répond toujours au point où les rayons ont traversé des épaisseurs égales des deux quartz croisés; mais ce point se trouve maintenant rapproché du sommet du prisme antérieur. Si l'épaisseur de la lame additionnelle est telle que pour elle $\frac{H_1 - H'_1}{\lambda}$ soit égal à n, la frange centrale déplacée viendra se placer au point où se formait tout à l'heure la frange brillante de rang n, le rang de la frange centrale primitive étant représenté par zéro. La figure 750 représente le système des franges d'un compensateur ainsi déplacé dans sa partie centrale par l'action d'une lame mince. Dans l'expérience que nous venons de décrire, la frange centrale s'est déplacée vers le sommet du prisme antérieur

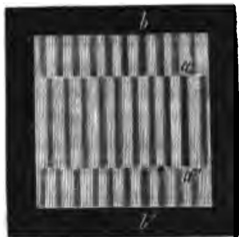


Fig. 750.

parce que la lame agissait sur les deux composantes du mouvement comme le prisme antérieur lui-même; si la lame additionnelle avait eu son axe incliné de 90° à la direction que nous lui avons supposée, elle aurait agi comme le prisme postérieur, retardé le rayon auquel elle donnait de l'avance, et la frange centrale eût rétrogradé vers la base du prisme antérieur. Une lame additionnelle en spath aurait produit des déplacements de la frange centrale inverses de ceux qu'on obtient avec le quartz dans les mêmes conditions : cela tient à ce que, dans le spath, le rayon ordinaire marche moins vite que l'autre. (Voy. p. 424.)

Tout ce qui précède étant entendu, il est évident que l'on arrivera toujours à compenser l'effet de la lame additionnelle, c'est-à-dire à ramener à leur position première les franges déplacées, en faisant mouvoir la base du prisme postérieur dans le sens où la frange centrale a marché, et, comme pour chaque tour de vis on fait varier d'une même quantité la différence des épaisseurs que possèdent les deux prismes en chacun des points où les rayons les percent, on voit que la marche de la vis qui produira la compensation sera exactement proportionnelle au déplacement de la frange et pourra lui servir de mesure.

Dans les expériences de M. Jamin, le compensateur est employé à mesurer des différences de phase qui ne dépassent pas 2π, les franges sont très-dilatées; le champ de la vision contient la frange centrale, les deux qui la bordent à droite et à gauche et le commencement des suivantes; sur le prisme fixe, au milieu du champ de la vision, on a tracé deux lignes voisines, parallèles entre elles et aux arêtes réfringentes des deux prismes; c'est entre ces deux lignes fixes qu'on ramène toujours le milieu de la frange centrale. La figure 751 représente la disposition adoptée par M. Jamin. H est le système des deux prismes, I la vis micrométrique.

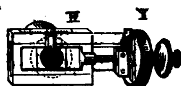


Fig. 751.

Pour graduer l'appareil, on voit combien il faut faire faire de tours à la vis pour amener entre les lignes de repère les milieux des franges qui bordent la frange centrale à droite et à gauche. Ce nombre correspond à une variation de phase égale à 2π.

M. Jamin a montré tout le parti que l'on peut tirer du compensateur pour étudier la différence de phase que la réflexion établit entre les deux composantes principales d'un rayon polarisé à l'incidence dans un azimut quelconque, l'azimut 45° par exemple. On prend l'appareil décrit page 532, et, après avoir fixé le com-

pensateur à la partie antérieure D du tube qui porte l'analyseur, on fait en sorte que l'axe optique du prisme de quartz, tourné vers le rayon incident soit vertical; puis on dirige parallèlement entre elles les sections principales du polariseur et de l'analyseur, en les inclinant toutes deux de 45° sur le plan horizontal. Alors, le rayon arrivant directement du polariseur à l'analyseur, on amène le milieu de la frange centrale entre les deux lignes de repère. L'appareil ainsi réglé, on met le miroir en place, et, par un déplacement convenable des alidades, on fait tomber le rayon réfléchi sur le système formé du compensateur et de l'analyseur. Si la différence de phase est nulle, la frange centrale reste en place; si la frange centrale marche vers le sommet du prisme antérieur, la composante polarisée dans le plan d'incidence a pris de l'avance sur l'autre, du retard si la frange s'est déplacée en sens inverse : dans les deux cas, par le mouvement de la vis, on ramène son milieu entre les deux lignes de repère, et la marche de la vis donne le déplacement.

L'énoncé des principaux résultats obtenus par M. Jamin dans ses recherches relatives aux différences de phase que la réflexion imprime aux rayons polarisés, se trouve résumé dans une page du mémoire relatif à la réflexion sur les corps transparents, imp. aux *Ann.* 1850. Nous le reproduisons textuellement.

« Les nombreuses expériences que j'ai exécutées sur des substances très-différentes par leur nature et par leur indice m'autorisent à exprimer d'une manière générale l'action qu'elles exercent sur la lumière. Si on les suppose classées d'après la valeur décroissante de leur indice de réfraction, on trouve à la tête de la liste les métaux où la polarisation du rayon réfléchi est elliptique depuis l'incidence normale jusqu'à l'incidence rasante; c'est-à-dire que la différence de marche croît d'une manière continue entre ces limites depuis $\frac{\lambda}{2}$ jusqu'à λ. Arrivant aux substances transparentes, on trouve que la différence de marche varie encore d'une manière continue de $\frac{\lambda}{2}$ à λ entre deux incidences, la première plus petite, la seconde plus grande que l'angle de polarisation maxima, tandis qu'elle reste constante et égale à $\frac{\lambda}{2}$ ou à λ pour les incidences inférieures ou supérieures; par conséquent la polarisation est rectiligne après la réflexion en dehors de ces limites, et elliptique entre elles. A mesure que l'indice de réfraction diminue, ces limites se rapprochent généralement, diffèrent de moins en moins l'une de l'autre et finissent par se con-

fondre entre elles et avec l'incidence principale (celle pour laquelle la différence de phase est $\frac{3\lambda}{4}$).

« Ce cas est réalisé par une valeur de l'indice à peu près égale à 1,46 ; alors le changement de phase de $\frac{\lambda}{2}$ à λ se fait brusquement. C'est le cas des formules de Fresnel. Toutes les substances dont l'indice est supérieur à 1,46 sont à réflexion positive, c'est-à-dire que la réflexion à leur surface fait croître plus rapidement la phase de vibration du rayon polarisé dans le plan d'incidence. Les substances dont l'indice est inférieur à 1,46 paraissent être à réflexion négative... » J. JAMIN, *Ann.*, tom. XLIX.

Application du compensateur à l'étude de la réflexion totale. — Nous avons indiqué, page 525, de quelle manière Fresnel, en étudiant la réflexion totale, avait été conduit à découvrir la transformation de la polarisation rectiligne du faisceau incident en une polarisation elliptique ou circulaire, et nous avons vu qu'il avait donné une formule propre à représenter sous toutes les incidences possibles la différence de phase que prennent, en se réfléchissant totalement à la surface intérieure d'une plaque de verre poli, les deux composantes principales du rayon réfléchi. Fresnel avait vérifié cette formule dans trois cas particuliers.

M. Jamin a employé le compensateur à l'étude complète de la question. En opérant comme nous l'avons indiqué à propos de la réflexion métallique, il a, sous toutes les incidences pour lesquelles le phénomène se présente, déterminé les valeurs numériques des différences de phases qui se trouvent établies entre les deux composantes principales du rayon totalement réfléchi. Dans ses expériences, le rayon incident était polarisé à 45° du plan de réflexion; et toutes les précautions étaient prises pour que l'exactitude des résultats ne fût pas compromise par l'action de causes autres que la réflexion totale, et qui auraient pu, chacune pour sa part, amener aussi des retards de l'un des rayons sur l'autre. Ces causes peuvent s'indiquer aisément.

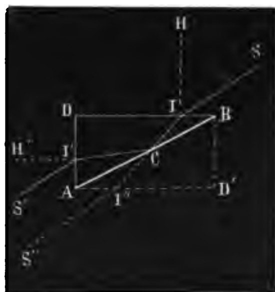


Fig. 752.

Le rayon qui éprouvait la réflexion totale en C (fig. 752), sur l'hypoténuse du prisme rectangle DAB, pénétrait obliquement en I, et émergeait obliquement en I'. — Les plans d'incidence en I, C,

I' coïncidaient, et aux réfractions d'entrée et de sortie des différences de phase pouvaient se développer entre les composantes principales. Pour tenir compte de cette influence perturbatrice, M. Jamin opérait de la manière suivante : le prisme ADB avait été obtenu en bissectant suivant le plan diagonal AB un parallélipipède rectangle, DBD'A, de verre bien homogène. Or, lorsque, sous une série d'incidences HIS différentes et nombreuses, M. Jamin eut déterminé les différences de marche développées dans le parcours total SICI'S', il recolla avec un peu de baume le prisme AD'B contre l'autre. Alors la réflexion totale cessa d'avoir lieu en C. Pour chaque rayon incident IS, il y avait un rayon émergent parallèle I''S''. La différence de marche observée au compensateur, entre les deux composantes principales de ce rayon émergent, donnait la grandeur absolue de la correction qu'il fallait faire subir aux nombres correspondants de la première série pour les ramener à être l'expression vraie de la différence de phase établie par la seule réflexion totale. La rigueur de la correction tient à l'identité des retards qui se produisaient en I' et I'' dans les déterminations correspondantes.

Les nombres obtenus par M. Jamin s'accordent avec la formule de Fresnel et avec celle que M. Cauchy a donnée depuis pour représenter le phénomène de la réflexion totale; ces deux formules sont pourtant très-différentes en théorie, mais en pratique et dans le cas du verre, la différence se traduit par un terme si petit qu'il est de l'ordre des erreurs d'observation.

CHAPITRE XXVI

SUITE DE L'ÉTUDE DE LA POLARISATION CIRCULAIRE ET ELLIPTIQUE.

§ 1. — Compensateur a teintes plates. — Caractères distinctifs de la polarisation circulaire et elliptique.

Le compensateur que nous avons employé jusqu'ici peut être assimilé à l'ensemble de deux prismes de quartz d'angles égaux et très-aigus ABC, AB'C', dont les faces AC, AC' seraient dans un

même plan; dans l'un d'eux, l'arête est parallèle à l'axe; elle lui est perpendiculaire dans l'autre (fig. 753). Que l'on fixe ce compensateur contre un prisme de nicol, en ayant soin que l'arête commune des deux prismes qui le forme soit à 45° de la section principale du nicol, et l'ensemble formera un analyseur qui, introduit dans un rayon polarisé rectilignement, déterminera en général la production de franges irisées dans la lumière blanche.

Compensateur de M. H. Soleil. — M. Henri Soleil a construit un compensateur qui donne des teintes plates en ces circonstances. Le compensateur de M. Henri Soleil peut être, en effet, assimilé à une lame mince, parallèle à l'axe, et dont l'épaisseur



Fig. 753.

constante en tous ses points peut prendre telle valeur que l'on veut entre des limites un peu étendues.

A première vue, on pourrait le confondre avec le compensateur saccharimétrique. Il se compose en effet de trois lames de quartz : l'une AA' (fig. 753) est à faces parallèles, les deux autres BB', CC' sont des prismes très-aigus de même angle, tournés en sens inverse; AA' est fixe, BB' et CC' peuvent se mouvoir l'un sur l'autre, de façon à constituer par leur ensemble une lame double, à faces parallèles, dont l'épaisseur totale est égale à celle de AA', quand ils sont exactement superposés; plus petite ou plus grande lorsque, après un glissement plus ou moins considérable, ils débordent l'un par rapport à l'autre.

Ces trois lames sont taillées parallèlement à l'axe du cristal. Seulement, dans les deux prismes, l'axe est parallèle à l'arête réfringente. — Dans AA' il est perpendiculaire à la direction de ces arêtes.

D'après cela, il est évident que, suivant la position relative des deux prismes, le système des trois lames pourra, ou bien être exactement neutre, c'est-à-dire représenter une lame d'épaisseur nulle, ou bien équivaloir à une lame de quartz ayant son axe parallèle aux arêtes du prisme, ou enfin à une lame ayant son axe dirigé suivant AA'. Il n'est pas inutile de rappeler que dans le compensateur décrit p. 536 les deux prismes de quartz

avaient leurs axes optiques non plus parallèles comme ici, mais tout au contraire dirigés rectangulairement entre eux, et alors l'ensemble des deux prismes était équivalent à une lame d'épaisseur variable et égale en chaque point à la différence des épaisseurs des deux prismes.

Caractère distinctif des rayons polarisés circulairement. — Les lames minces, parallèles à l'axe et d'épaisseur connue, sont d'un emploi très-avantageux dans l'étude de la polarisation circulaire et elliptique. Elles peuvent servir à distinguer aisément un rayon polarisé circulairement d'un rayon de lumière naturelle. Elles peuvent servir à distinguer un rayon polarisé elliptiquement d'un rayon partiellement doué de la polarisation rectiligne.

Lorsqu'un rayon polarisé circulairement tombe normalement sur un spath, il s'y divise en deux autres d'intensités égales, polarisés, l'un dans la section principale, l'autre dans la section perpendulaire, et qui ont entre eux une différence de phase de 1/4 d'ondulation. Le spath les sépare, et à l'émergence ils restent polarisés dans les deux plans dont il vient d'être question; cela a lieu quelle que soit la direction de la section du spath. Le rayon circulaire se comporte donc ici comme un rayon de lumière naturelle. Mais les phénomènes changent si l'on place devant le spath une lame de quartz d'une épaisseur telle qu'elle détermine une différence de marche de 1/4 d'onde entre deux rayons ayant primitivement même phase et qui la traversent, l'un à l'état de rayon ordinaire, l'autre à l'état de rayon extraordinaire. Cette lame détruit la différence de phase des deux composantes dans lesquelles se résout la vibration circulaire en pénétrant dans son intérieur, ou bien elle porte cette différence de phase à une demi-vibration. Dans un cas comme dans l'autre, le rayon émergent est polarisé rectilignement, et son plan de polarisation fait un angle de 45° avec la section principale de la lame mince. Pour vérifier l'exactitude de cette proposition, il suffit de mettre la section principale du spath à 45° de l'axe de la lame mince. Une des images disparaît. — Quand cet effet est obtenu, la position que la section principale du prisme occupe, par rapport à l'axe de la lame mince, fait connaître le sens dans lequel s'opère le mouvement de la molécule d'éther dans le rayon circulaire que l'on étudie. Soit en effet, au moment où le rayon extraordinaire est éteint, AA' la section principale du spath, SS' étant celle de la lame mince.

Dire que le rayon extraordinaire est éteint, c'est dire que le mouvement dans le rayon qui tombe sur l'analyseur a lieu sui-

vant la ligne KOK′, perpendiculaire à AA′. Prenons le moment où la molécule lumineuse part de K et descend vers K′, et supprimons la lame mince. Comme cette lame retarde le mouvement qui s'opère suivant SS′, en l'enlevant, nous mettrons les choses dans l'état où elles seraient si la molécule était animée de deux mouvements, l'une la portant à pleine vitesse de haut en bas suivant KY, et l'autre la poussant lentement, parallèlement à KX, d'où résulte une rotation dirigée de droite à gauche à la partie supérieure.

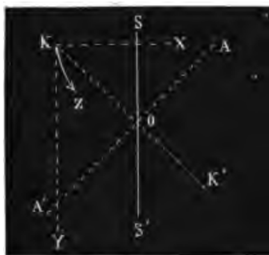


Fig. 754.

Ainsi lorsque, pour éteindre l'image extraordinaire, il faut, après l'action de la lame de 1/4 d'onde, incliner l'analyseur vers la droite de la section de la lame mince à la partie supérieure, la rotation est dirigée de droite à gauche à la partie supérieure de la courbe.

On verrait aisément que l'inverse aurait lieu si, pour éteindre le rayon extraordinaire, il avait fallu diriger la section du spath suivant KK′. — La rotation de la molécule d'éther serait alors de sens opposé.

Caractères distinctifs d'un rayon polarisé elliptiquement. — Deux mouvements vibratoires de même période, dirigés suivant des droites OX et OY, rectangulaires entre elles, ayant des intensités différentes, A^2 et A'^2, et une différence de phase d'un quart d'onde, donnent en se combinant une vibration elliptique; en effet, des équations

$$v = \frac{dy}{dt} = -A \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

$$v' = \frac{dx}{dt} = A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{4}\right) = A' \cos 2\pi \frac{t}{\tau},$$

on déduit

$$y = \frac{A\tau}{2\pi} \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + c,$$

$$x = \frac{A'\tau}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} + c'.$$

Si l'on veut que x soit nul pour $t = 0$, et y pour $t = \frac{\tau}{4}$, il faut poser $c = c' = 0$.

Et alors l'équation de la trajectoire devient

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{A'^2} = \frac{\tau^2}{4\pi^2}.$$

Si l'on reçoit le rayon polarisé elliptiquement sur un spath dont la section principale soit parallèle à l'axe des x, la composante $v = -A \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ passe toute entière à l'état de rayon ordinaire, l'autre à l'état de rayon extraordinaire, et les intensités des deux images sont proportionnelles à A^2 et à A'^2.

Si la section principale fait un angle α avec l'axe des x, l'intensité de l'image ordinaire résultera de la combinaison des deux vibrations :

$$v = -\cos\alpha\, A \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

$$v' = \sin\alpha\, A' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{4}\right).$$

Elle sera donc donnée par l'équation

$$V^2 = A^2 \cos^2\alpha + A'^2 \sin^2\alpha. \quad \text{(Voir p. 61.)}$$

Pour le rayon extraordinaire, les composantes seraient :

$$u = -\sin\alpha\, A \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

$$u' = \cos\alpha\, A' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{4}\right),$$

et l'intensité serait donnée par l'équation

$$U^2 = A^2 \sin^2\alpha + A'^2 \cos^2\alpha.$$

Lorsque A' est moindre que A, V^2 est plus petit que A^2, et U^2 plus grand que A'^2, hors toutefois le cas où l'on a $\alpha = 0$. Alors $V^2 = A^2$ et $U^2 = A'^2$. Ainsi, l'image ordinaire donnée par le spath aura son maximum d'éclat quand la section du spath sera perpendulaire à la direction de la plus intense des deux composantes du mouvement elliptique.

V^2 et U^2 deviennent égales entre elles lorsque $\alpha = 45$, et alors

$$V^2 + U^2 = A^2 + A'^2.$$

Pour toute autre valeur de α l'égalité ne peut avoir lieu. On a en effet :

$$V^2 - U^2 = (A^2 - A'^2)\cos^2\alpha - (A^2 - A'^2)\sin^2\alpha$$
$$= (A^2 - A'^2)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

ce qui ne peut être zéro que pour $\alpha = 45°$.

On peut donc toujours, quand un rayon est polarisé elliptiquement, trouver la direction des axes de l'ellipse d'oscillation.

Pour trouver le sens du mouvement on opère comme dans le cas examiné p. 545 : on reçoit le rayon sur une lame de 1/4 d'onde, dont la section principale contienne le petit axe de l'ellipse d'oscillation. La différence de marche des deux rayons est détruite, et la lumière émergente se trouve polarisée rectilignement. On la reçoit sur un prisme de nicol que l'on tourne jusqu'à obtenir l'extinction. Quand on est arrivé à ce résultat, la tangente de l'angle, que la section principale de ce prisme fait avec le grand axe de l'ellipse, est égale au rapport qui existe entre le coefficient de vibration de la plus grande des deux composantes du mouvement et celui de la plus petite.

Dans ses recherches sur la réflexion M. Jamin suivit souvent une marche un peu différente pour la détermination des éléments de l'ellipse d'oscillation. Il décomposait le mouvement elliptique suivant deux directions rectangulaires entre elles, mais autres que les axes de cette ellipse; ces deux directions étaient toujours perpendiculaires au rayon réfléchi, et l'une était en outre parallèle au miroir; c'était alors par la marche du compensateur que M. Jamin appréciait, comme nous l'avons vu, la différence de marche de ces deux composantes. Il déterminait, d'ailleurs, le rapport de leurs intensités. Avec ces données, la connaissance de l'ellipse était complète, et l'on pouvait calculer le rapport des axes principaux, et leurs positions par rapport à ceux qu'il avait choisis.

L'emploi d'une lame de 1/4 d'onde permet donc de distingu très-aisément un rayon elliptique d'un rayon partiellement polarisé, puisque jamais un rayon de cette dernière espèce ne pourrait être ramené à la polarisation rectiligne par sa transmission à travers une pareille lame. Au reste, des modifications toutes spéciales que prennent les anneaux décrits page 497, quand on les produit avec de la lumière polarisée elliptiquement, fournissent encore le moyen de distinguer cette lumière de celle qui serait douée partiellement de la polarisation rectiligne. La figure 755



Fig. 755.

est la reproduction d'anneaux ainsi modifiés. La lumière qui tombait sur le spath avait d'abord été polarisée rectilignement, puis transmise à travers une lame mince de $1/4$ d'onde, dont l'axe était à 45° du plan de polarisation primitif. La section principale de l'analyseur coïncidait avec ce dernier.

Lorsqu'un faisceau de lumière blanche polarisé rectilignement tombe sur un miroir métallique dont le plan de réflexion ne coïncide pas avec le plan de polarisation primitif, chacun des faisceaux élémentaires homogènes R qui composent la lumière incidente se partage en deux autres polarisés dans les deux plans principaux, et ayant une différence de marche déterminée. Soit pour l'un de ces faisceaux élémentaires $(R \times I)$ et $(R \times I')$ les intensités de ces composantes, et δ leur différence de marche, I étant relatif à la composante polarisée dans le plan de réflexion.

Le rapport $\frac{I}{I'}$ de ces deux composantes est égal à celui qui existerait entre les intensités des composantes ordinaires et extraordinaires dans lesquelles une lame mince partagerait un rayon polarisé rectilignement dans un plan incliné sur sa section principale d'un angle α donné par la relation $tang^2 \alpha = \frac{I'}{I}$.

Si on reçoit leur ensemble sur un analyseur dont la section fasse un angle b avec ce plan, l'intensité de l'image ordinaire et celle de l'image extraordinaire, données par le spath analyseur, auront les valeurs connues (voir page 490) :

$$O = R[\cos^2 b - \sin 2a \cos 2(a - b) \sin^2 \pi\delta]$$

et

$$= R[\sin^2 b + \sin 2a \sin 2(a - b) \sin^2 \pi\delta].$$

Si pour tous les faisceaux élémentaires a et δ étaient les mêmes, les images complètes O_1 et E_1, vues à travers l'analyseur, seraient blanches ; mais d'un rayon simple à l'autre varie le rapport $\frac{I}{I'}$, et par suite a ; δ change aussi avec la couleur ; et par suite un faisceau blanc, primitivement polarisé, peut être, par la réflexion métallique, modifié de façon à donner des teintes aux images ordinaires et extraordinaires, dans lesquelles il se dédouble en traversant un analyseur. Seulement ces teintes seront faibles toutes les fois que a et δ varieront peu avec λ.

§ 2. — Action du quartz pour transformer un rayon polarisé rectilignement en deux autres polarisés circulairement ou elliptiquement.

La réflexion à la surface des corps polis, la transmission à travers les lames minces ne sont pas les seuls moyens que l'on puisse employer pour transformer en polarisation elliptique la polarisation primitivement rectiligne d'un rayon lumineux.

Recherches de Fresnel. — Fresnel a fait voir que si l'on transmet normalement à travers une plaque de quartz taillée perpendiculairement à l'axe un faisceau de lumière, polarisé d'abord rectilignement, ce faisceau se dédouble en deux autres de même intensité, polarisés circulairement, tournant en sens inverse, et qui traversent le cristal avec des vitesses inégales. Pour établir cette proposition, Fresnel fit tailler aux deux bouts d'une aiguille de cristal de roche deux faces planes fortement inclinées sur l'axe, de manière à transformer l'aiguille en un prisme très-ouvert, sous la condition, toutefois, que l'émergence fût possible. Le prisme fut achromatisé avec du verre, et un rayon polarisé transmis parallèlement à l'axe donna à la sortie deux rayons distincts polarisés circulairement en sens inverse, ainsi que Fresnel put le constater à l'aide d'une lame mince faisant fonction de compensateur (voir p. 545). Au lieu d'achromatiser le prisme de quartz avec deux demi-prismes de verre, il vaut mieux employer à cet usage deux demi-prismes de quartz perpendiculaires à l'axe, mais doués d'un pouvoir rotatoire inverse de celui du prisme principal. Cela se conçoit dans les idées de Fresnel. Comme nous allons le voir en effet à la page suivante, la différence des substances lævogyres et dextrogyres tient à ce qu'un même faisceau lumineux polarisé circulairement traverse les unes plus vite, les autres plus lentement, et dès lors, « puisque le faisceau le moins refracté dans le « prisme du milieu est le plus refracté dans les demi-prismes « extrêmes, et que d'ailleurs les angles de ceux-ci sont tournés « en sens inverse, on conçoit que les petites divergences « qu'ils produisent s'ajoutent à celle du prisme intermédiaire « au lieu de s'en retrancher, comme cela arriverait si les trois « prismes étaient pris dans la même aiguille. » (Fresnel, *Ann.*, IIe série, t. XXIX.)

La transformation mise en évidence par cette belle expérience de Fresnel explique le phénomène de rotation trouvé par Arago.

Supposons en effet que deux molécules lumineuses accomplis-

sent dans le même temps et en sens inverse des vibrations circulaires *anbm, a'n'b'm'* (fig. 756); si les molécules partent en

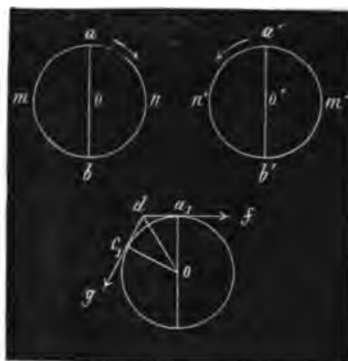


Fig. 756.

même temps des deux extrémités a et a' de deux diamètres parallèles, elles y reviendront après des temps égaux, et elles auront aussi à une même époque passé aux points b et b'; à chacun de ces moments, leurs vitesses seront égales et de signes contraires. A toute autre époque, les vitesses de ces deux molécules seront toujours égales, mais elles seront inclinées l'une sur l'autre; et, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles donneront une résultante parallèle à ab. Au contraire, si l'on combine de même la vitesse que possède la molécule a après un certain nombre de vibrations avec celle que possède l'autre après un nombre de vibrations égal au précédent, accru ou diminué d'une fraction, on obtiendra une résultante qui ne sera plus parallèle à ab. Par exemple, supposons que l'on combine la vitesse $a_1 f$ que possède l'une des molécules au moment où elle achève une révolution avec celle $c_1 g$ que possède l'autre au moment où elle a parcouru, outre un nombre entier de circonférences, l'arc $a_1 c_1$; la résultante que l'on obtiendra sera dirigée suivant do et bissectera l'arc $a_1 c_1$.

Dans l'hypothèse de Fresnel, puisque les deux mouvements circulaires inverses dans lesquels s'est résolue la vibration rectiligne primitive se propagent avec des vitesses différentes dans le quartz, il en résulte que si l'un arrive à la molécule d'éther située à la surface de sortie, après avoir fait un nombre de révo-

lutions égal à $n + \frac{1}{z}$, n et z étant entiers, l'autre la rencontrera après en avoir fait un nombre $n' + \frac{1}{z'}$. Leurs vitesses seront dirigées, comme les tangentes, en deux points de la circonférence, distants de l'origine a de nombres de degrés égaux à $\frac{360}{z}$ et $\frac{360}{z'}$. La résultante fera avec ab un angle égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{360}{z} + \frac{360}{z'}\right)$. Si l'épaisseur du milieu traversé double, n et n' doublent. Il en est de même de $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z'}$, et par suite enfin de l'angle de rotation, car à la sortie du quartz le mouvement résultant dirigé suivant dc subsiste seul dans le milieu extérieur.

Ainsi un rayon polarisé rectilignement, en pénétrant normalement dans une plaque de quartz perpendiculaire, à l'axe se dédouble en deux rayons égaux qui sont polarisés circulairement en sens inverse, et qui se propagent suivant l'axe du cristal, mais avec des vitesses de propagation différentes. La rotation produite par le cristal est de même sens que celui du rayon qui marche le plus vite.

Recherches de M. Airy. — Si le rayon incident est plus ou moins oblique, il éprouve encore de la part du quartz une action spéciale, car en sortant de la plaque il ne paraît plus polarisé rectilignement, on ne peut plus l'éteindre avec une tourmaline ou un prisme de nicol. Aussi lorsqu'on observe dans une pince à tourmalines une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, on obtient des phénomènes notablement différents de ceux qui ont été exposés et expliqués p. 490 et suiv.

Les tourmalines étant croisées, on voit toujours des anneaux; mais si la lame a 2 ou 3 millimètres, toute apparence de croix manque dans la partie centrale qui présente l'aspect d'un cercle inégalement éclairé dans la lumière homogène, et coloré dans la lumière blanche. On aperçoit des rudiments de croix vers les bords du champ de la vision. Si le quartz est plus mince, la croix redevient plus visible, mais ne va jamais jusqu'au centre.

Pour expliquer ces phénomènes et d'autres semblables, M. Airy a admis que dans cette transmission oblique à travers une lame de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe, un rayon polarisé rectilignement avant son incidence se résout en deux rayons polarisés elliptiquement et qui traversent la lame mince sans se séparer au moins sensiblement. Les mouvements sont de

sens inverse, et les ellipses suivant lesquelles ils s'accomplissent ont leurs grands axes rectangulaires entre eux. Elles s'allongent à mesure que l'inclinaison du rayon incident sur l'axe est plus considérable.

Grâce à cette hypothèse, M. Airy a pu rendre compte de l'ensemble des effets chromatiques que l'on obtient avec le quartz, et cet accord est devenu une démonstration de l'exactitude de l'hypothèse elle-même.

Pour compléter le travail de M. Airy, il fallait « déterminer le rapport des axes dans ces ellipses des rayons réfractés et la différence de leur vitesse de propagation. » C'est ce qu'a fait M. Jamin dans un travail inséré aux *Ann.*, série 3, t. XXX.

Recherches de M. Jamin. — M. Jamin faisait tomber obliquement sur une lame de quartz perpendiculaire à l'axe un rayon polarisé rectilignement; à la sortie de la lame, il recevait le rayon sur le compensateur décrit p. 536. Il constatait que ce rayon était polarisé elliptiquement, et il déterminait les éléments de la trajectoire lumineuse. Ces éléments sont liés à ceux des deux ellipses dans lesquelles, suivant M. Airy, se résout la vibration rectiligne incidente. M. Jamin a trouvé les relations qui existent entre ces quantités, et il en a déduit la solution du problème qu'il s'était proposé. Nous empruntons textuellement les calculs suivants au mémoire de M. Jamin :

« Soient xx', yy' deux axes de coordonnées rectangulaires représentant les plans parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence du rayon sur une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe. Polarisons la lumière dans le plan d'incidence, la vibration dirigée suivant yy', sera

$$y = (\mathrm{K} + \mathrm{K}')\sin\xi.$$

« Nous la décomposerons en deux rayons oscillant en sens inverse, suivant deux ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les plans principaux, K et K' représentant dans chacune d'elles les rapports de ces axes. Les équations de ces deux mouvements seront :

$$x = \cos\xi \qquad x' = -\cos\xi$$
$$y = \mathrm{K}\sin\xi \qquad y' = \mathrm{K}'\sin\xi$$

« A l'émergence, ces deux rayons auront une différence de marche, δ, variable avec l'épaisseur du cristal, et deviendront :

$$x = \cos\xi \qquad x' = -\cos(\xi + \delta)$$
$$y = \mathrm{K}\sin\xi \qquad y' = \mathrm{K}'\sin(\xi + \delta)$$

« Tous les phénomènes présentés par le quartz dépendront uniquement des valeurs que prendront, sous diverses incidences, K, K' et δ. Ce sont les inconnues que nous allons déterminer, et pour cela exprimons d'abord les vibrations du rayon émergent. Elles seront :

$$
\begin{aligned}
x + x' &= \cos \xi - \cos(\xi + \delta) \\
&= \cos \xi \, (1 - \cos \delta) + \sin \xi \sin \delta = A \sin(\xi + \varphi), \\
y + y' &= K \sin \xi + K' \sin(\xi + \delta) \\
&= \cos \xi \, (K' \sin \delta) + \sin \xi \, (K + K' \cos \delta) = B \sin(\xi + \varphi').
\end{aligned}
$$

« En posant

$$A^2 = (1 - \cos \delta)^2 + \sin^2 \delta = 4 \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

$$B^2 = K^2 \sin^2 \delta + (K + K' \cos \delta)^2 = (K + K')^2 - 4 KK' \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

$$tg\, \varphi = \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} = tg \frac{\delta}{2}$$

$$tg\, \varphi' = \frac{K' \sin \delta}{K + K' \cos \delta} = \frac{2 K' \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{K + K' - 2 K' \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

ces deux rayons polarisés à angle droit auront une différence de marche $\varphi - \varphi'$ et un rapport d'intensité $\frac{B^2}{A^2}$, dont les valeurs seront données par les équations :

$$(1) \qquad tg(\varphi' - \varphi) = tg \frac{\delta}{2} \frac{K' - K}{K' + K} = N$$

$$(2) \qquad \frac{B^2}{A^2} = \frac{(K + K')^2}{4 \sin^2 \frac{\delta}{2}} - KK' = M^2. \text{»}$$

Les quantités M et N sont celles que M. Jamin mesure. Le rayon incident est, comme nous l'avons dit, polarisé dans le plan d'incidence; à l'émergence M. Jamin le reçoit sur son compensateur, après avoir orienté ce dernier de manière que les axes des deux prismes qui le forment soient l'un parallèle, l'autre perpendiculaire au plan d'incidence. La frange centrale est déplacée; par le jeu de la vis micrométrique, on la ramène entre les fils, et cette première détermination fait connaître $\varphi' - \varphi$.

Quand ce premier résultat est obtenu, on tourne le prisme de nicol de manière que la frange centrale ait son maximum de vi-

vacité. L'angle que la section principale du prisme fait avec l'axe des x a M pour tangente.

M et N sont donc déterminés. Mais les équations (1) et (2) renferment encore trois inconnues : K, K' et δ.

Des expériences et une discussion que nous ne reproduirons pas ici ont conduit M. Jamin à admettre que l'on a toujours $K = \frac{1}{K'}$. « Ainsi les deux ellipses composantes sont semblables entre elles, et placées à 90° l'une de l'autre. » Nous admettrons ce fait comme complément des hypothèses de M. Airy, et alors à la place des équations (1) et (2) nous poserons les suivantes qui suffisent à déterminer K et δ :

$$tg\,(\varphi - \varphi') = tg\,\frac{\delta}{2}\,\frac{K - \frac{1}{K}}{K + \frac{1}{K}} = N$$

$$\frac{B^2}{A^2} = M^2 = \frac{\left(K + \frac{1}{K}\right)^2}{4\,sin^2\,\frac{\delta}{2}} - 1$$

K et δ varient avec l'incidence. M. Cauchy a déduit de la théorie les lois de ces variations, et ces lois, dans le cas des petites incidences, conduisent aux mêmes résultats que les expériences de M. Jamin. Le cas des grandes incidences n'a pas encore été traité.

§ 3. — Analyse des modifications qu'un rayon de lumière blanche polarisée éprouve en traversant normalement une plaque de spath ou de quartz parallèle a l'axe. — Recherches de MM. Fiseau et Foucault.

Avant de terminer ce que nous pouvons dire de la polarisation circulaire et elliptique, nous décrirons encore deux séries de phénomènes curieux et qui se rattachent au même sujet.

Lorsqu'on fait tomber normalement un faisceau de lumière blanche polarisée sur une lame de quartz taillée parallèlement à l'axe et un peu épaisse, la lumière émergente paraît complétement dépolarisée si la section principale de la lame est à 45° du plan de polarisation primitif.

Dans ce cas, en effet, le faisceau émergent, reçu sur un analyseur, s'y résout en deux autres dont les intensités sont tou-

jours égales, quel que soit l'angle compris entre la section de l'analyseur et le plan de polarisation primitif. Mais, en réalité, ce faisceau a une composition fort complexe. Pour le prouver, il suffit de le faire tomber à la sortie de la lame sur un prisme bien pur et d'analyser au point de vue polariscopique le spectre produit. Chacun des faisceaux élémentaires dont il est composé présente en général les propriétés qui caractérisent la polarisation elliptique. Seulement cette polarisation elliptique passe périodiquement à la polarisation rectiligne et à la polarisation circulaire à mesure que change la longueur d'onde du rayon que l'on considère. Cela se conçoit :

Lorsque le faisceau primitif tombe sur la lame de quartz, chacun des rayons simples qui le composent se résout en deux autres polarisés rectangulairement entre eux, et dont les intensités sont égales.

Ces deux composantes du rayon primitif prennent entre elles une différence de marche qui dépend de l'épaisseur de la lame et de la longueur d'onde de la lumière homogène dont il s'agit, et, à la sortie de la lame, elles reconstituent un rayon unique polarisé elliptiquement. L'ellipse deviendra une ligne droite lorsque la différence de marche sera égale à un nombre entier de demi-longueur d'ondes, c'est-à-dire quand le quotient $\frac{E - E'}{\frac{1}{2}\lambda}$, déjà considéré pages 490 et suivantes, sera un nombre entier, ou quand on aura $E - E' = \frac{N\lambda}{2}$. Enfin, comme ici les composantes sont de même intensité, la polarisation sera circulaire lorsqu'on aura $E - E' = (2N + 1)\frac{\lambda}{4}$.

Or, si la lame est assez épaisse pour que le quotient $\frac{E - E'}{\frac{1}{2}\lambda}$ soit déjà considérable, quand λ est relatif au rouge extrême, il arrivera que ce quotient prendra un grand nombre de valeurs entières successives, lorsqu'on y substituera à λ toutes les valeurs successives des longueurs d'ondes lumineuses. Tous les rayons répondant à ces valeurs de λ sortiront donc de la lame polarisés rectilignement, et les rayons d'indice intermédiaire seront polarisés elliptiquement ; les ellipses seront fort voisines de se confondre avec des lignes droites pour les valeurs de λ voisines de celles qui répondent à la polarisation rectiligne ; elles deviendront des cercles pour les valeurs de λ intermédiaires entre

celles qui répondent rigoureusement à la polarisation rectiligne.

Tous ces mouvements elliptiques différents sont superposés au sortir de la lame, mais le prisme les sépare et rend l'analyse possible. On peut aussi, et cela même est très-commode, recevoir le faisceau émergent sur un nicol avant de le disperser par le prisme. Si la section du nicol concorde avec le plan de polarisation primitif, tous les rayons auxquels la lame aura laissé leur polarisation rectiligne primitive seront éteints, et, lorsqu'à la sortie du nicol le faisceau total tombera sur le prisme, on verra de nombreuses bandes noires parallèles aux raies de Frauenhoffer, mais beaucoup plus larges qu'elles, apparaître dans le spath à la place des rayons arrêtés par l'analyseur.

Le phénomène qui en résulte est très-beau; il a été observé pour la première fois par MM. Fiseau et Foucault, qui en ont donné l'analyse complète. (*Ann.*, sér. 3, t. xxx.)

§ 4. — Étude des anneaux colorés de Newton dans la lumière polarisée. — Observations d'Arago. — Recherches de M. Jamin.

L'étude du développement des anneaux colorés de Newton dans la lumière polarisée a fait découvrir à M. Jamin des phénomènes nouveaux et qui confirment pleinement un des résultats auxquels il avait été antérieurement conduit par ses recherches sur la réflexion, à savoir que, dans le voisinage de l'angle de polarisation, le verre donne une polarisation elliptique sensible à un rayon primitivement polarisé et qui se réfléchit à sa surface.

Lorsqu'on observe les anneaux de Newton en éclairant les verres par un faisceau lumineux polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, on devrait s'attendre à voir tout phénomène lumineux disparaître complétement lorsque l'angle d'incidence est de 90° — 35° 25'. Il n'en est rien : la lumière réfléchie par les verres est alors très-faible sans doute, mais elle n'est pas nulle dans toute l'étendue du champ des anneaux, et de plus, si les verres se touchent en leur centre, la tache centrale, au lieu d'être noire, devient blanche. Enfin des particularités curieuses s'observent dans l'ensemble de ces anneaux, lorsque l'incidence varie entre deux limites ω et ω', la première un peu inférieure, l'autre un peu supérieure à l'angle de polarisation complète.

Depuis l'incidence nulle jusqu'à l'incidence ω, les carrés des diamètres des anneaux avaient augmenté proportionnellement à

la sécante de l'angle d'incidence. A cette limite ω, ils restent un instant stationnaires, puis décroissent rapidement. Le premier anneau brillant se resserre et la tache noire disparaît complétement. On est alors sous l'angle de polarisation; l'incidence continuant à croître, l'anneau noir qui entoure la tache centrale devenue lumineuse se contracte à son tour et vient former une nouvelle tache centrale noire; à partir de l'incidence ω', pour laquelle le centre est ainsi redevenu noir, les diamètres des anneaux recommencent à croître avec l'angle d'incidence.

Ces faits ne seraient pas explicables si l'expression $\frac{tg\,(i-r)}{tg\,(i+r)}$ (voir page 508) représentait exactement la vitesse de vibration du rayon réfléchi dans le cas où ce rayon est primitivement polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.

En effet, d'une part, cette expression devient nulle, quand $i+r=90$, ce qui a lieu pour $i=90-35°\,25'$; d'autre part, elle n'éprouve qu'un simple changement de signe lorsqu'on y change i en r et r en i. Et par suite, elle indique que les réflexions aux deux surfaces de la lame mince amènent, entre les deux rayons réfléchis qui concourent à la formation de l'anneau, une différence de marche égale rigoureusement à une demi-vibration, aussi bien dans le voisinage de l'angle de polarisation qu'à une certaine distance, et rien alors ne peut indiquer pourquoi les anneaux se déplacent dans le voisinage de cet angle.

Les résultats obtenus par M. Jamin s'expliquent, au contraire, très-naturellement lorsque l'on admet la théorie de la réflexion donnée par Cauchy. D'après cet illustre géomètre, lorsque la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi sous l'incidence i est donnée par la formule

$$V^2=\frac{sin^2\,(i-r)\,[cos^2\,(i-r)+E^2\,sin^2\,i\,sin^2\,(i+r)]}{sin^2\,(i+r)\,[cos^2\,(i-r)+E^2\,sin^2\,i\,sin^2\,(i-r)]}$$

dans laquelle r est l'angle de réfraction qui correspond à l'incidence i, et E une très-petite quantité à laquelle on donne le nom de coefficient d'ellipticité.

Cette formule assigne à V^2 une valeur très-petite, il est vrai, mais différente de zéro lorsque $i+r=90$, et, par conséquent, elle montre qu'il n'est pas impossible d'obtenir des anneaux sous l'incidence de $90-35°\,25'$.

Seulement, pour que la tache centrale soit blanche, il ne faut pas que les rayons réfléchis aux deux surfaces de la lame mince

conservent dans le voisinage de l'angle de polarisation une différence de phase égale à π, ou, en d'autres termes, un retard réciproque égal à $\frac{1}{2}\lambda$; il faut que ce retard, quoique sensiblement égal à $\frac{1}{2}\lambda$, à des distances un peu grandes de l'angle que nous considérons, devienne, sous cet angle, nul ou multiple de λ, et varie, de part et d'autre, d'une façon continue et rapide; c'est en effet ce qu'indiquent les formules de Cauchy.

Quand la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, rien de particulier ne se présente; les formules de Cauchy et celles de Fresnel coïncident, en effet, dans ce cas.

Quand la lumière est polarisée dans un azimut quelconque, on obtient à la fois deux systèmes d'anneaux, les uns formés par la composante polarisée dans le plan de réflexion, les autres par la deuxième. Ces deux systèmes ont, en général, des intensités inégales et qui dépendent de l'angle γ compris entre le plan de polarisation primitif et celui de réflexion; ils se séparent dans le voisinage de l'angle de polarisation ; sous une incidence précisément égale à cet angle, l'un est à centre noir, l'autre à centre blanc. Si l'angle γ n'est pas très-voisin de 90, la première composante l'emporte sur l'autre; mais si on observe le phénomène avec un nicol, on peut éteindre cette composante prédominante. Alors on ne voit que les anneaux à centre blanc. En faisant tourner d'une façon continue l'analyseur, on voit donc le centre des anneaux passer d'une façon continue du noir au blanc et tout l'ensemble du phénomène se modifier périodiquement dans le voisinage de ce centre.

Observations d'Arago. — Dans les expériences de M. Jamin, la lame mince d'air est comprise entre deux verres de même nature; alors, dans le cas où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, la différence de marche provenant des réflexions aux deux surfaces de la lame mince est égale à un nombre de demi-ondulations qui est impair pour les incidences un peu inférieures et un peu supérieures à l'angle que nous considérons, et qui, au contraire, est pair pour cet angle lui-même, et il en résulte que les anneaux, généralement à centre noir, deviennent à centre blanc lorsque l'incidence est très-voisine de l'angle de polarisation. En produisant, avec de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, des anneaux colorés dans une lame d'air comprise entre une lentille de verre et un miroir métallique, Arago avait reconnu que le centre des

anneaux, noir pour les valeurs de i inférieures à $90° - 35° 25'$, devient blanc pour des incidences supérieures. Ici le changement tient à une autre cause : lorsqu'on passe des incidences un peu inférieures à $90 - 35° 25'$ aux incidences supérieures à cette limite, le signe de la vibration réfléchie sur le verre change; il n'en était pas de même pour le métal dans les conditions où Arago opérait, et de là la transformation du centre noir en centre blanc observée dans ces circonstances.

§ 5. DU DÉVELOPPEMENT DE L'ACTION BIRÉFRINGENTE DANS LE VERRE PAR LA COMPRESSION OU LA DILATATION.

L'action biréfringente des corps cristallisés résulte des inégalités que leur réaction élastique présente dans les différentes directions autour de chaque point. Des expériences directes ont constaté l'existence de ces différences dans les cristaux biréfringents, et, en particulier, Savart les a étudiées dans le quartz par les méthodes dont nous avons donné une idée en acoustique.

Mais longtemps avant les expériences de Savart, Fresnel avait mis hors de doute la proposition que nous voulons établir dans ce paragraphe. Il avait montré que l'on fait acquérir le pouvoir biréfringent à un prisme de verre ordinaire en le comprimant dans le sens de son arête réfringente. Pour obtenir des effets plus sensibles, Fresnel opérait de la manière suivante : il prenait quatre prismes *a, b, c, d,* équilatéraux, de même verre, et les juxtaposait de façon que tous eussent l'une de leurs faces dans un même plan C D, et leurs arêtes opposées sur un même plan



Fig. 757.

parallèle à C D. Ceci posé, dans les mêmes intervalles *e, f, g, h, i,* il plaçait d'autres prismes de verre un peu moins longs que les premiers; *f, g, h,* étaient équilatéraux, *e* et *i* rectangles, et l'ensemble formait un parallélipipède allongé. Les prismes *a, b, c, d,* ayant une longueur commune un peu plus grande que les autres, Fresnel pouvait les comprimer seuls; il lui suffisait de mettre tout le système dans une presse dont les mâchoires étaient parallèles entre elles et aux bases des prismes *a, b, c, d,* et de faire agir cette presse avec une énergie suffisante; alors il

constatait qu'à travers le système entier une pointe fine paraissait dédoublée.

M. le Dr Guérard a depuis constaté que si l'on trempe les prismes *a, b, c, d,* les autres restant à l'état naturel, le système est biréfringent de lui-même et sans qu'il soit besoin de recourir à la compression pour lui faire acquérir cette propriété.

Dans les expériences de Fresnel, l'action biréfringente du verre comprimé était rendue évidente par le dédoublement du rayon lumineux, mais elle se manifeste plus aisément encore par la coloration qu'elle imprime aux images. Brewster est le premier qui ait remarqué l'action chromatique du verre comprimé. Pour l'observer on met une lame de verre, épaisse de quelques millimètres et de forme carrée, dans la presse à main AB (fig. 757).

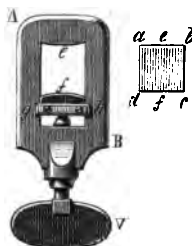


Fig. 758.

Sous l'action de la vis V la compression s'exerce dans la direction *ef*. Si l'on place la pince et la lame qu'elle comprime entre deux tournalines croisées, on voit la lame couverte de bandes ou plages colorées formant une figure symétrique par rapport à la ligne *ef*.

Si l'analyseur était un prisme de spath, les deux images seraient complémentaires l'une de l'autre, ainsi que cela arrive toujours dans tous les phénomènes de polarisation chromatique.

La presse de la figure 758 ne peut servir à développer des teintes plates dans les lames comprimées. Pour obtenir ces teintes plates il faut, à l'aide d'une disposition particulière, exercer simultanément des actions égales en tous les points des deux côtés opposés *a b, c d* de la lame sur laquelle on opère. — En ces circonstances elle se comporte comme une lame d'un cristal à un axe, dont l'axe serait précisément parallèle à la direction *ef,* suivant laquelle la compression s'opère, et dont l'épaisseur entre des limites assez étendues croîtrait proportionnellement à l'éner-

gie de la pression. Ces résultats importants sont dus à M. Wertheim qui les a fait connaître dans un travail imprimé aux *Annales,* sér. III, t. 40. On peut encore énoncer le résultat des observations de M. Wertheim en disant qu'entre les deux rayons dans lesquels la lame, devenue biréfringente, sépare la lumière incidente, il s'établit une différence de marche qui reste proportionnelle à l'accroissement de pression au moins dans des limites assez étendues.

Ce second énoncé est celui que l'auteur adopte dans son mémoire. Nous donnons ici le tableau dans lequel il compare les pressions exercées sur la lame de verre et les différences de marche correspondantes.

TABLEAU COMPARATIF DES PRESSIONS EXERCÉES SUR UNE LAME DE BORO-SILICATE DE ZINC ET DES DIFFÉRENCES DE MARCHE CORRESPONDANTES.

	$\frac{\lambda}{2}$	$2\frac{\lambda}{2}$	Différences.	$3\frac{\lambda}{2}$	Différences.	$4\frac{\lambda}{2}$	Différences.	$5\frac{\lambda}{2}$	Différences.	$6\frac{\lambda}{2}$	Différences.
Avec la lumière blanche	68	142	74	216	74	290	74	365	75	440	75
Avec la flamme de l'alcool salé.	74	153	79	233	80	313	80	394	81	475	81

Ce tableau vérifie la proposition énoncée, et il montre en même temps que la charge qui produit la première différence de marche $\frac{\lambda}{2}$ est notablement moindre que celles qui suivent. Toutes les charges ou pressions inscrites dans ce tableau sont exprimées en kilogrammes.

LIVRE VIII

CHALEUR RAYONNANTE

— - —

CHAPITRE PREMIER

RÉSUMÉ HISTORIQUE DES PRINCIPALES RECHERCHES FAITES SUR LA CHALEUR RAYONNANTE AVANT L'EMPLOI DU THERMO-MULTIPLICATEUR. — PRINCIPES DE LA THÉORIE DES ÉCHANGES DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT.

§ 1. — IDÉES DE NEWTON. RECHERCHES D'HERSCHELL.

Les anciens connaissaient les verres et les miroirs ardents; ils savaient donc que la chaleur du soleil accompagne la lumière de cet astre non-seulement dans sa propagation rectiligne à travers l'air et l'espace planétaire, mais aussi dans les réflexions ou les réfractions que nous pouvons lui faire subir.

Transmission de la chaleur. Idées de Newton. — La transmission directe de la chaleur, venue des sources non lumineuses, n'a fixé que plus tard l'attention des physiciens; mais Newton s'en préoccupait fortement, ainsi qu'on le peut voir dans le texte suivant. (*Opt.*, liv. III, quest. 18.)

« Si, après avoir suspendu dans deux larges et longs vases de verre cylindriques deux petits thermomètres, de sorte qu'ils ne touchent point les vases, on fait le vide dans l'un des vases, et si on les transporte ensuite tous deux d'un lieu froid dans un lieu chaud, le thermomètre qui est dans le vide deviendra aussi chaud et presque aussitôt que l'autre thermomètre. La chaleur du lieu chaud n'est-elle pas communiquée à travers le vide par les vibrations d'un milieu beaucoup plus subtil que l'air, lequel milieu reste dans le vide après qu'on en a pompé l'air, et ce

milieu n'est-il pas le même que celui qui rompt et réfléchit la lumière, et par les *vibrations* duquel la lumière échauffe les corps?... et les vibrations de ce milieu ne contribuent-elles pas à la véhémence et à la durée de la chaleur? Et les corps chauds ne communiquent-ils pas leur chaleur aux corps froids contigus, par les vibrations de ce milieu propagées des corps chauds dans les corps froids? Et ce milieu n'est-il pas excessivement plus rare et plus subtil que l'air et excessivement plus élastique et plus actif? Ne pénètre-t-il pas promptement tous les corps? Et par sa force élastique n'est-il pas répandu dans tous les cieux? »

Or, Newton ne s'occupe ici que du mode de propagation de la chaleur obscure à travers le vide; mais avant lui, Bacon, en pensant à la propagation directe de cet agent, se demandait si « la chaleur obscure et opaque comme celles des métaux ou des « pierres, qui ne sont pas rougis par le feu, peut être exaltée par « les verres aussi bien que la chaleur lumineuse et brillante. »

Réflexion de la chaleur obscure. Scheele, de Saussure, Pictet. — Les premières expériences importantes qui aient été faites touchant la concentration de la chaleur obscure sont celles de Pictet et de de Saussure. Ces physiciens plaçaient devant un miroir sphérique un cube plein d'eau chaude ou un boulet chauffé, mais non lumineux; puis ils plaçaient la boule d'un thermomètre au foyer conjugué de ces sources de chaleur; l'effet produit était instantané, et il disparaissait lorsqu'on couvrait la surface du miroir. Scheele, quelques années auparavant, avait de même concentré au foyer d'un miroir la chaleur émanée d'un poêle allumé.

Dans les expériences de de Saussure et de Pictet, la chaleur obscure était, suivant les expressions de Bacon, *exaltée* par les miroirs. Quelques années plus tard, Herschell la concentrait à l'aide de lentilles.

Recherches d'Herschell. — Le travail d'Herschell est un des plus remarquables qui aient été publiés sur la chaleur rayonnante. Nous allons énoncer les propositions qu'il a servi à vérifier ou à établir.

La chaleur, dit Herschell, qu'elle nous vienne du soleil ou des sources terrestres, est produite par des rayons qui sont soumis aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Ces rayons ont des réfrangibilités différentes, ils sont susceptibles d'être arrêtés en certaines proportions par les milieux diaphanes, ils peuvent être diffusés par les surfaces dépolies.....

Étude du spectre calorifique. — Comme source de chaleur invisible, Herschell employait quelquefois des poêles pleins de feu, mais dont la surface extérieure n'était pas portée jusqu'au

rouge, ou encore des boulets de fer chauffés aussi au-dessous du point de l'incandescence.

Mais les plus importantes de ses expériences de chaleur sont celles qui lui ont fait connaître l'existence et la propriété des rayons calorifiques invisibles qui nous viennent du soleil en même temps que les rayons lumineux ordinaires.

En plaçant un thermomètre sensible dans les différentes régions d'un beau spectre formé avec un prisme de verre bien pur, Herschell reconnut que l'action calorifique, faible dans le violet, s'accroît rapidement dans la partie la moins réfrangible du spectre lumineux, et, de plus, il la vit encore se manifester très-énergiquement dans la portion de l'espace qui prolongeait le spectre au delà du rouge. Le spectre calorifique s'étend donc en dehors du spectre lumineux, et c'était même un peu au delà du rouge et dans ce prolongement obscur du spectre solaire que le thermomètre éprouvait son maximum d'échauffement.

Dans les expériences d'Herschell, le spectre calorifique obscur avait une étendue peu différente de celle du spectre lumineux; et, dès lors, il était bien évident que les rayons calorifiques obscurs se distinguent les uns des autres par des différences de réfrangibilité analogues à celles qui les distinguent des rayons lumineux ordinaires.

La chaleur prismatique obscure peut être abondamment concentrée par des lentilles de verre; seulement, comme la position du maximum de chaleur dans le spectre ne coïncide pas avec celle du maximum de lumière, le point où a lieu la plus grande concentration de chaleur doit différer un peu du foyer lumineux, et c'est ce qu'Herschell a cherché à vérifier directement.

Composition de la chaleur. — Ces rayons de chaleur, qui se distinguent ainsi les uns des autres par leurs différences de réfrangibilité, se distinguent aussi par des aptitudes différentes à traverser divers écrans plus ou moins translucides; ainsi les rayons invisibles, moins réfrangibles que le rouge, se transmettent abondamment à travers certains verres d'un rouge très-foncé, tandis qu'ils sont presque complétement arrêtés par des verres bleuâtres.

Les phénomènes d'absorption peuvent donc, comme la réfraction, servir à distinguer entre elles les diverses espèces de chaleur. En appliquant cette méthode, Herschell trouva de grandes différences de natures entre les différentes sources de chaleur dont il faisait usage; par exemple, un écran de verre blanc arrêtait 0,75 de la chaleur émanée d'un feu peu ardent, et 0,25 seulement de la chaleur solaire.

Ainsi l'absorption de la chaleur par les lames demi-transparentes qu'employait Herschell dépendait à la fois et de la nature de la source et de la nature de la lame. On avait déjà remarqué depuis longtemps que la facilité plus ou moins grande avec laquelle les corps opaques s'échauffent sous l'action des rayons solaires dépend de l'état de leur surface, de la nature des enduits dont ils sont revêtus. Mussembroëck, au tome II de son *Traité de Physique*, cite des séries d'expériences faites sur ce point, et d'ailleurs Newton, dans son *Optique*, avait fait remarquer que « si les corps noirs sont plus aisément échauffés par la lumière que ceux de toute autre couleur, cela tient à ce que la lumière qui tombe sur ces corps n'est pas réfléchie en dehors, mais qu'elle entre dans ces corps et y est réfléchie et rompue en dedans.

§ 2. — RECHERCHES DE RUMFORD ET DE LESLIE. — POUVOIRS ÉMISSIFS, POUVOIRS RÉFLECTEURS.

Vers 1804, Rumford et Leslie établirent par des expériences directes que la nature de la surface des corps n'a pas moins d'influence sur la facilité avec laquelle ils émettent la chaleur que sur celle avec laquelle ils l'absorbent.

Influence de la nature de la surface sur l'émission. — Recherches de Rumford. — Les expériences de Rumford étaient, pour ainsi dire, les réciproques de celles qui avaient établi l'inégalité des pouvoirs absorbants des différentes surfaces. Un vase métallique rempli d'eau chaude était suspendu au milieu d'une chambre à température constante : on suivait la marche décroissante d'un thermomètre plongé au milieu de l'eau, et l'on arrivait ainsi à déterminer la perte de température que le vase subissait en une minute de temps pour un excès déterminé de température; puis on recommençait l'expérience en changeant seulement l'état de la surface du vase, et l'on constatait que, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse avec laquelle le refroidissement s'opère dépend de l'état de la surface; elle est maximum quand la surface est noircie, minimum quand elle est métallique.

Il résultait clairement de là que les substances noires émettent la chaleur plus aisément que ne le font les surfaces métalliques; mais le procédé de Rumford, bien suffisant pour mettre le fait en évidence, ne pouvait pas servir à comparer rigoureusement les pouvoirs émissifs des corps, parce que les phénomènes de refroidissement que Rumford observait sont des effets complexes, dépendant à la fois et de la facilité avec laquelle la

chaleur sort du corps par émission directe, et de la facilité avec laquelle elle passe par contact dans les couches d'air plus froides qui viennent sans cesse se renouveler contre leurs surfaces.

Mesure des pouvoirs émissifs. — Recherches de Leslie. — Les résultats de Leslie ne présentent pas ce genre de complication ; pour étudier l'influence que l'état de la surface des corps exerce sur la facilité avec laquelle ils émettent la chaleur, Leslie prit pour source un vase métallique de forme cubique, plein d'eau toujours également chaude, et dont les faces

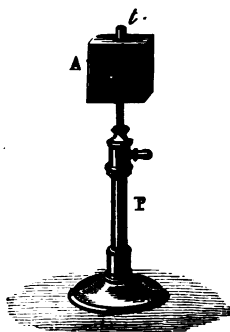


Fig. 759.

étaient recouvertes de différentes substances (fig. 759), puis, plaçant un thermomètre très-sensible à distance invariable du cube, il fit agir successivement sur lui le rayonnement de chacune des quatre faces, et il reconnut que les élévations de température produites variaient avec la nature de l'enduit qui recouvrait la face par laquelle se faisait l'émission calorifique, et il comparait ces élévations de température. Seulement, comme en ces conditions les effets d'échauffement eussent été très-faibles, Leslie les accrut dans une forte proportion en plaçant derrière le thermomètre un réflecteur sphérique dans une position telle, que la source et le thermomètre fussent foyers conjugés par rapport au miroir.

En ces circonstances, la température de l'eau du vase et celle de la pièce où se faisait l'expérience restant constantes, l'échauffement du thermomètre variait beaucoup avec la nature de la face rayonnante ; les quantités de chaleur émises vers le miroir ét ient donc différentes, et Leslie a admis que l'échauffement était proportionnel aux quantités de chaleur émises dans le

même temps par des surfaces égales des corps qui recouvraient la source de chaleur.

Nous reviendrons sur la démonstration de ce principe.

Leslie résuma l'ensemble de ses recherches sur l'influence des surfaces dans l'émission de la chaleur en un tableau bien connu, et reproduit partout sous le nom de tableau des *pouvoirs émissifs* des corps pour la chaleur.

Comme nous venons de le dire, les nombres qui le composent sont, d'après Leslie, proportionnels aux quantités de chaleur émises normalement par des surfaces planes égales entre elles, de natures différentes, et portées à la température de l'eau bouillante. Aucune substance, toutes choses égales d'ailleurs, n'émet plus de chaleur que le noir de fumée. La plupart en émettent moins; on a pour ce motif pris pour unité le pouvoir émissif du noir; et le pouvoir émissif d'un corps quelconque, dans des conditions déterminées, est le rapport entre la quantité de chaleur qu'il émet et celle que le noir émet dans ces mêmes conditions.

TABLEAU DES POUVOIRS ÉMISSIFS D'APRÈS LESLIE.

Noir de fumée	1,00	Minium	0,80
Eau	1,00	Plombagine	0,75
Papier à écrire	0,98	Plomb terne	0,45
Cire à cacheter	0,95	Plomb brillant	0,19
Verre	0,90	Fer poli	0,15
Encre de Chine	0,88	Étain, argent, cuivre et or	0,12
Glace	0,85		

Thermomètre différentiel. — L'appareil thermoscopique que Leslie employait dans ses expériences était, non pas un thermomètre à mercure ordinaire, mais un thermomètre différentiel à air qui lui faisait connaître immédiatement l'excès de la température de la boule focale sur celle de l'enceinte où l'on opérait. Le thermomètre différentiel de Leslie est représenté fig. 760.

Il se compose d'un tube capillaire deux fois recourbé, et communiquant à ses deux extrémités avec deux boules de 2 à 3 centimètres de diamètre environ, servant de réservoir à air.

Avant de fermer l'appareil on y a introduit de l'acide sulfurique coloré, en quantité assez grande pour remplir le tube jusqu'au milieu des branches verticales, ou à peu près; et l'on peut toujours, quand l'appareil est fermé, faire passer un peu d'air d'une des boules dans l'autre, de manière à amener les deux niveaux à peu près à même distance du tube horizontal inférieur.

Si l'on chauffe légèrement une des boules, la colonne corres-

pondante s'abaisse, l'autre s'élève, et les effets sont porportionnels aux échauffements produits. Soient V et V' les volumes des deux boules, ω la section du tube, l la longueur de tube primitivement occupée par l'air dans chacune des deux branches, $l+h$ et $l-h$ les longueurs finales de ces deux colonnes d'air, d la densité de ce fluide à la température 0 et à la pression 0,76; soit enfin p la pression finale dans la boule froide, d', le rapport de la densité de l'acide sulfurique à celle du mercure, et θ l'excès de température finale de la boule A sur l'autre. Comme pendant l'expérience il ne passe pas d'air d'une boule dans l'autre, on

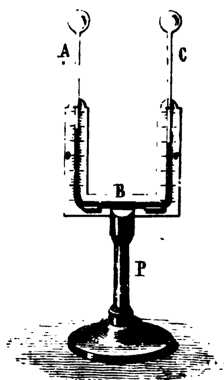


Fig. 760.

peut écrire qu'à la fin de l'expérience la différence de poids des quantités de ce fluide contenues dans les deux portions de l'appareil conserve la valeur Q qu'elle avait originairement. Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$Q = \frac{d[V + (l-h)\omega]}{1+\alpha t}\frac{p}{0,76} - \frac{d[V' + (l+h)\omega]}{1+\alpha(t+\theta)}\frac{(p+2hd')}{0,76}.$$

On en déduit, en négligeant dans le second membre la différence qui existe entre V et V',

$$\frac{Q}{d}[1+\alpha(t+\theta)] = \frac{p}{0,76}\left\{-2h\omega + \frac{[V+(l-h)\omega]\alpha\theta}{1+\alpha t}\right\} - \frac{2hd'}{0,76}[V+(l+h)\omega].$$

$\frac{Q}{d}$ est la différence de volume des deux boules, elle est très-petite par rapport à V, et il en est de même des quantités qui ont

ω en facteur dans le second membre. Si on néglige ces quantités très-petites, l'équation se réduit à

$$\frac{p}{0,76}\,\frac{\mathrm{V}\alpha\theta}{1+\alpha t}=\frac{2hd'}{0,76}\mathrm{V}$$

ou simplement

$$h=\mu\theta,$$

ce qui est la proposition.

Influence de la direction de l'émission sur son intensité. Lambert, Leslie. — Leslie chercha à appliquer à la solution d'autres questions le procédé de mesure qu'il avait imaginé. — Ainsi, il chercha à prouver expérimentalement que, conformément aux idées de Lambert, la section droite ou une section oblique quelconque d'un cylindre émettent à même temps une même quantité absolue de chaleur dans une direction parallèle aux génératrices. Pour y arriver il plaçait entre le cube chaud et le réflecteur deux écrans percés d'ouvertures égales; carrées ou circulaires, ayant leur centre sur l'axe du miroir, et de dimensions notablement moindres que celles du cube. Puis, faisant rayonner le cube vers le miroir, à travers ces deux ouvertures, il constatait que l'effet thermométrique produit était indépendant de l'angle dont il inclinait le cube sur la direction des rayons.

Pouvoirs réflecteurs. — Le pouvoir réflecteur absolu d'un corps pour un faisceau calorifique donné de nature et de direction est le rapport qui existe entre l'intensité de la portion de ce faisceau qui se réfléchit régulièrement sur ce corps et l'intensité de la chaleur incidente totale. Leslie chercha à comparer ces pouvoirs dans différents corps. Dans ce but, à l'aide d'une source convenable et d'un réflecteur sphérique, il formait comme à l'ordinaire un faisceau calorifique convergent d'une intensité constante et assez grande pour que les observations fussent possibles. Puis, en avant du point de concours et toujours dans la même position, il plaçait successivement différents miroirs plans, qui tous rejetaient le faisceau au même point, sur la boule du thermomètre focal. Ici les variations des effets produits dépendaient des différences qui existaient entre les pouvoirs réflecteurs des différents miroirs. Leslie admit qu'il y avait proportionnalité entre ces pouvoirs et les excès stationnaires de température; et, comme résultats de ses recherches, il donna les valeurs numériques des rapports qui existent entre les pouvoirs réflecteurs de différents miroirs, et celui du cuivre jaune pris pour unité.

TABLEAU DES POUVOIRS RÉFLECTEURS D'APRÈS LESLIE.

Laiton	1,00	Plomb	0,60
Argent	0,90	Étain amalgamé	,100
Étain en feuilles	0,85	Verre	0,10
Étain plané	0,80	Verre couvert d'huile	0,05
Acier	0,70	Noir de fumée	0,00

Leslie se proposa encore de comparer les actions absorbantes que les corps opaques exercent sur la chaleur. Il concentrait les rayons d'une source constante sur la boule d'un thermomètre qu'il recouvrait successivement des différentes substances à essayer, et il admettait que les excès définitifs de sa température sur celle de l'enceinte étaient proportionnels aux pouvoirs absorbants cherchés. Cette méthode ne différait pas en principe de celle de Mussembroëck dont nous parlions page 565, et en général elle est fautive ; nous en indiquerons bientôt la raison ; toutefois et comme renseignement historique, nous dirons que dans les expériences de Leslie l'action exercée par un cube plein d'eau bouillante sur le thermomètre focal était environ cinq fois plus forte quand la surface de celui-ci était nue que quand elle était couverte d'une feuille d'étain.

§ 3. — THÉORIE DES ÉCHANGES DE CHALEUR.

Échanges de chaleur. Théorie de P. Prévost. — Quel que soit le degré d'incertitude qui existait sur ces nombres, on pouvait remarquer que les différentes substances se trouvaient dans le tableau des pouvoirs absorbants rangées dans le même ordre que dans celui où sont consignées les valeurs des pouvoirs émissifs, et en ordre inverse de celui où ils figurent dans le tableau des pouvoirs réflecteurs. Ce fait indiquait que la faculté d'émettre la chaleur et celle de l'absorber ne sont pas indépendantes l'une de l'autre ; et, en effet, à l'époque des travaux d'Herschell, de Rumford et de Leslie, un principe nouveau dans la science, celui de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants, se formulait comme conséquence des idées posées en 1792, par Prévost de Genève, touchant la manière dont s'opèrent les échanges de chaleur entre les corps.

Lorsque des corps différents sont placés dans une enceinte dont la température est partout la même et constante, ils finissent par prendre tous cette température, quel qu'ait été leur degré d'échauffement primitif ; on admet volontiers ce fait sans

démonstration; mais, du reste, on trouve dans les anciens traités de physique le récit d'expériences faites directement pour en constater l'exactitude.

Quand l'équilibre est atteint, il subsiste non par une sorte de stagnation de la chaleur dans les corps, mais par une série d'échanges réciproques, et tels qu'il y ait exacte compensation entre les pertes et les gains éprouvés à chaque instant par chacun d'eux, tel est le principe de l'équilibre mobile de température posé par Prévost. Voici comment, au temps de Leslie, on déduisait de ces premières idées la loi de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants.

Principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants[1]. — Concevons d'abord deux corps A et B, dont le pouvoir réfléchissant soit nul, en sorte que toute la chaleur rayonnante qu'ils lancent l'un vers l'autre provienne de leur intérieur. Concevons de plus que ces corps, étant en présence l'un de l'autre, la température de A soit plus élevée que celle de B; ils s'enverront, comme par échange, une portion de leur chaleur sous forme rayonnante. Mais comme A est plus chaud que B, il lui en enverra plus dans un temps donné qu'il n'en recevra de lui, en sorte que la quantité de chaleur perdue par B sera plus que compensée; au lieu que, relativement au corps A, il n'y aura pas de compensation, la température de B s'élèvera, tandis que celle de A s'abaissera. A mesure que les échanges se multiplieront, la différence entre les deux températures diminuera, et au terme où les quantités échangées seront devenues égales, il y aura égalité entre les températures elles-mêmes, et alors chaque corps continuera d'envoyer à l'autre autant de chaleur qu'il en recevra, et cette uniformité d'échanges persistera tant que le système restera à même température.

Imaginons, pour fixer nos idées, que la quantité de chaleur rayonnant envoyée ou reçue dans cet état d'équilibre étant composée de 400 rayons, la surface A acquière tout à coup la faculté de réfléchir à l'extérieur 200 rayons parmi les 400 qui lui arrivent. *Le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant devront être diminués d'autant*, en sorte qu'au lieu de 400 rayons qui étaient émis ou absorbés par le corps A dans un temps donné, il n'y en aura plus que 200; aussi les deux corps continueront de s'envoyer l'un à l'autre 400 rayons. Mais, par rapport à B, tout sera émis ou absorbé, et, par rapport à A, une moitié sera réfléchie, et l'autre sera émise ou absorbée; d'où l'on voit que l'uniformité

1. Hauy, *Traité de Physique* (1806).

de température continuera d'avoir lieu dans chacun des corps.

Nous ne discuterons pas les détails de la démonstration, mais quant au principe, il est très-nettement posé ; et c'est ainsi qu'il est présenté dans les travaux où Fourier et Poisson donnèrent une forme analytique aux considérations précédentes et étudièrent par le calcul ces échanges incessants qui se font entre les différents points d'une enceinte et des corps qu'elle peut renfermer.

Applications de la théorie des échanges de chaleur. — Dans les expériences dont nous avons cité les résultats aux pages précédentes, Leslie admettait que l'excès final de température du thermomètre focal était proportionnel soit au pouvoir émissif des faces de la source de chaleur, soit aux pouvoirs réflecteurs des miroirs plans, à l'aide desquels il rejetait sur le thermomètre le faisceau de chaleur rendu convergent par une première réflexion sur un miroir concave.

La discussion des échanges de chaleur qui se font en ces circonstances prouve que, dans les conditions où Leslie opérait, la méthode à laquelle il avait recours pour déterminer les pouvoirs émissifs devait le conduire à des résultats exacts. Nous allons montrer comment cette discussion peut se faire dans quelques cas principaux et de généralisation facile. L'un d'eux sera spécialement relatif à l'expérience de Leslie.

Cas où la source et le thermomètre n'ont pas de pouvoir réflecteur. — Soit dans une enceinte noircie entretenue à température constante t, un thermomètre sphérique, également noirci, et que nous supposerons réduit à son réservoir. Soit $f(t)$ la quantité de chaleur émise par le thermomètre dans un temps τ, $f(t)$ sera aussi ce que l'enceinte lui renvoie dans le même temps, sans quoi l'équilibre ne subsisterait pas. Soit mis dans l'enceinte un nouveau corps, également noirci, et à la température t. Ce corps cachera au thermomètre une partie de l'enceinte. Soit $\omega f(t)$ la fraction de la chaleur émise par le thermomètre et qui tombe sur le corps, $(1-\omega) f(t)$ sera celle qui tombe sur l'enceinte, $\omega f(t)$ et $(1-\omega) f(t)$ seront ce que renvoient au thermomètre 1° le corps, 2° la portion de l'enceinte qui n'est pas cachée par lui.

Si la température du corps s'élève et devient T, le thermomètre s'élèvera à une température finale θ ; et au moment où l'équilibre sera atteint, on aura la relation :

$$(1) \qquad \omega[f(T) - f(\theta)] = (1-\omega)[f(\theta) - f(t)],$$

ou bien

$$\omega[f(T) - f(t)] - \omega[f(\theta) - f(t)] = (1 - \omega)[f(\theta) - f(t)];$$

ou

$$\omega[f(T)-f(t)] = f(\theta) - f(t),$$

sans rien négliger. Si $\theta - t$ est petit, on peut écrire $\omega[f(T) - f(t)] = n(\theta - t)$, car alors on a $f(\theta) - f(t) = n(\theta - t)$.

Pour établir cette équation, nous ne considérons que les seuls échanges de chaleur qui se font par voie de rayonnement. Pour tenir compte de l'action de l'air, il faudrait ajouter au second membre un terme Q, fonction de la différence de température $\theta - t$, et la somme des deux termes $[f(\theta) - f(t)] + Q$ est proportionnelle à la vitesse avec laquelle le thermomètre à température θ se refroidit dans l'enceinte pleine d'air à la température t. D'après ce qu'on a vu T (1), p. 334, cette vitesse est proportionnelle à $\theta - t$ tant que $\theta - t$ est petit; donc l'équation d'équilibre devient finalement

$$f(T) - f(t) = M(\theta - t),$$

M étant une constante.

Cas où le pouvoir réflecteur de la source n'est pas nul. — Supposons maintenant que le pouvoir émissif de la source devienne E, l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad \omega E f(T) + R - \omega f(\theta) = (1 - \omega) f[(\theta) - f(t)],$$

R représentant la quantité de chaleur qui, partie de l'enceinte et du thermomètre, revient à ce dernier après réflexion régulière ou irrégulière sur la source. Soit R' la valeur que prendrait R si le thermomètre, l'enceinte et la source étaient à la température t; l'équation (2) devient dans ce cas

$$(3) \qquad \omega E f(t) + R' - \omega f(t) = 0.$$

En soustrayant cette équation de l'équation (2), on a

$$\omega E[f(T) - f(t)] + R - R' = f(\theta) - f(t).$$

Donc, quand R — R' sera négligeable vis-à-vis le premier terme, on aura

$$\omega E[(fT) - f(t)] = f(\theta) - f(t),$$

Enfin pour les petites valeurs de $\theta - t$ on aurait, en tenant compte, comme à la page précédente, de l'action de l'air sur le thermomètre,

$$E[f(T) - f(t)] = M(\theta - t);$$

d'où l'on conclut la proportionnalité entre E et $\theta - t$. En effet, avec la même source revêtue d'une substance de pouvoir émissif E' on aurait

$$E'f[(T) - f(t)] = M(\theta' - t),$$

d'où

$$\frac{E}{E'} = \frac{\theta - t}{\theta' - t},$$

car M est demeuré le même, puisque le thermomètre n'a pas changé.

La méthode de Leslie pour la détermination des pouvoirs émissifs est donc légitime.

L'emploi du miroir réflecteur n'amène aucune complication. Pour en tenir compte dans l'équation d'équilibre, il suffirait de faire croître la quantité ω dans une certaine proportion, qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour en conclure la proportionnalité des quantités E et $\theta - t$.

Forme de la fonction qui lie l'intensité de l'émission à la température. — Dans les détails que nous venons de donner sur les échanges de chaleur, nous avons laissé indéterminée la forme de la fonction qui représente le rayonnement, et cette indétermination n'avait aucune influence sur la marche des raisonnements. La détermination de cette fonction est une question compliquée. L'expérience ne donne jamais que la différence des valeurs qu'elle prend pour deux températures déterminées, et lorsque l'on a affaire à des sources un peu énergiques, l'estimation de leurs températures devient ou très-difficile ou même impossible. Delaroche avait comparé avec soin les effets produits sur un même thermomètre par un creuset de fer plein de mercure à des températures variables, ou par un lingot de cuivre inégalement échauffé. Ses expériences ont prouvé que la différence $f(T) - f(t)$ croît beaucoup plus vite que proportionnellement à l'excès $T - t$, mais on n'en avait pas tiré d'autres conséquences.

Recherches de Dulong et Petit. — MM. Dulong et Petit, dans le travail si justement célèbre qu'ils ont publié sur les lois du refroidissement, ont assigné à la fonction $f(T)$ la forme exponentielle a^T.

Entre 0 et 350° environ, le rayonnement propre du verre leur a paru varier proportionnellement à la fonction $(1,0077)^t$, ou tout au moins il s'est toujours trouvé que, pour cette substance, la différence $f(T) - f(t)$ a été représentée par l'expression $(1,0077)^T - (1,0077)^t$, ou bien par $(1,0077)^t [(1,0077)^{T-t} - 1]$.

MM. Dulong et Petit ont encore admis comme résultat de leurs expériences que le rayonnement propre de l'argent suivait la même loi de variation avec la température. Nous exposerons et nous discuterons ultérieurement le travail de MM. Dulong et Petit; mais ce que nous pouvons affirmer dès maintenant d'après nos propres expériences, c'est que, si l'on cherche par la méthode indiquée page 574, comment la fonction $f(T) - f(t)$ varie avec la température, dans le cas où le corps est noirci, on trouve que entre 0 et 200 la forme exponentielle assignée à $f(T')$ par Dulong et Petit convient en effet au phénomène; elle conduit à des résultats d'accord avec l expérience.

§ 4. — TRANSMISSION DE LA CHALEUR RAYONNANTE. — TRAVAUX DE DELAROCHE.

Recherches de Delaroche. — Dans le remarquable travail dont nous avons donné l'analyse, Herschell employait une méthode de mesure toute différente de celle à laquelle Leslie s'est postérieurement arrêté. Pour comparer les intensités de deux flux calorifiques, il les faisait agir dans une enceinte de température sensiblement constante, et beaucoup plus basse que celle de la source calorifique, sur un même thermomètre toujours placé de la même manière par rapport au flux incident. Les quantités dont le thermomètre se réchauffait dans un même temps très-court, une minute par exemple, servaient de mesure à l'énergie de la cause qui produisait le réchauffement. La première idée de cette méthode est due à Lambert.

Delaroche l'adopta dans une série de recherches fort importantes, qu'il publia en 1811, sur la théorie de la chaleur rayonnante, et pour écarter toutes les objections qu'on eût pu soulever contre elle, il en donna une vérification directe. Il disposa une source de température constante devant un réflecteur sphérique, et mesura le réchauffement qu'éprouvait en une minute un thermomètre placé au foyer du réflecteur ; puis il recommença l'observation en couvrant la moitié du miroir, et il vit qu'alors le réchauffement dans le même temps se trouvait réduit à moitié. On peut, au reste, démontrer théoriquement l'exactitude de ce procédé. Nous renvoyons sur ce point à notre

Mémoire sur la *Détermination des pouvoirs absorbants* (*Ann. de Ch. et Phys.*, série 3, t. XXVII).

La méthode d'Herschell étant légitimée, Delaroche l'employa ainsi qu'il suit dans l'étude des phénomènes de la transmission de la chaleur à travers les écrans diathermanes.

Pour mesurer la proportion dans laquelle la chaleur d'une source déterminée se transmettait à travers un écran de verre, il plaçait à une certaine distance d'un réflecteur la source dont il voulait étudier le rayonnement, et il disposait un thermomètre au point où venait se concentrer la chaleur réfléchie, il mesurait le réchauffement produit en un temps très-court. Puis il arrêtait l'action de la source, et quand le thermomètre était revenu à son point de départ, il recommençait l'expérience après avoir mis entre le thermomètre et le miroir l'écran à travers lequel la chaleur devait se transmettre. Seulement il fallait tenir compte de la légère action que l'écran lui-même pouvait produire après s'être un peu échauffé sous l'action du flux incident. Pour y arriver, Delaroche recommençait l'expérience de transmission après avoir noirci l'écran. L'effet produit était alors presque annulé, mais enfin, quel qu'il fût, on le retranchait de celui qu'on avait primitivement obtenu, et l'on était sûr que la différence ne représentait rien de plus que l'effet produit par les rayons directement transmis à travers l'écran transparent.

En appliquant cette méthode, Delaroche démontra d'abord d'une façon complète l'exactitude d'une proposition déjà formulée par Lambert, à savoir que :

Les rayons calorifiques qui ont déjà traversé un écran de verre éprouvent, en traversant un second écran semblable, une déperdition proportionnellement beaucoup moins considérable que dans leur passage à travers le premier.

Il établit ensuite que :

La quantité de chaleur rayonnante qui traverse immédiatement le verre est d'autant plus grande, relativement à la totalité de celle qui est émise dans la même direction, que la température de la source qui l'émet est plus élevée. Puis, et comme conséquence de ces propositions, il reproduisit cette vérité fondamentale, formulée et démontrée antérieurement par Herschell et Prévost de Genève, à savoir que la chaleur est composée de plusieurs radiations différentes, dont les intensités ont entre elles des rapports qui diffèrent suivant la température de la source qui l'émet.

Les deux tableaux suivants extraits du Mémoire de Delaroche confirment ces propositions.

TABLEAU FAISANT CONNAÎTRE LES PROPORTIONS DANS LESQUELLES UN MÊME FLUX DE CHALEUR SE TROUVE TRANSMIS SOIT PAR UN SEUL ECRAN DE VERRE, SOIT PAR L'ENSEMBLE DE CET ÉCRAN ET D'UN AUTRE QUI LUI EST IDENTIQUE.

Nos des expériences.	ASCENSION DU THERMOMÈTRE			PROPORTION de chaleur transmise.
	Pas d'écran.	Écran transparent.	Écran noirci.	
1	33,94	5,13	0,36	
2	33,30	4,43	0,30	
3		4,54	0,33	
Moyenne	33,62	4,70	0,33	0,13
	Pas d'écran.	Double écran.		
1	33,94	2,41		
2	33,30	2,15		
3		2,75		
Moyenne	33,62	2,43		0,062

Ainsi tandis que le premier écran ne laisse passer que les 0,13 de la chaleur de la source, le second transmet environ la moitié de celle qui lui arrive par transmission à travers l'autre.

TABLEAU FAISANT CONNAÎTRE LES PROPORTIONS DANS LESQUELLES UNE MÊME LAME DE VERRE LAISSE PASSER LA CHALEUR VENUE DE DIFFÉRENTES SOURCES.

SOURCES DE CHALEUR.	ASCENSION DU THERMOMÈTRE			PROPORTION dans laquelle la chaleur est transmise.
	Point d'écran.	Écran de verre transparent.	Écran noirci.	
Creuset plein de mercure à 182°..	3°,94	0°,22	0°,07	$\frac{10}{263}$
Creuset plein de mercure à 346°..	16°,33	1°,36	0°,17	$\frac{10}{139}$
Lingot de fer à 427°............	32°,8	4°,70	0°,30	$\frac{10}{75}$
Lampe d'Argand sans cheminée........	21°,12	7°,29	0°,21	$\frac{10}{29}$
Lampe d'Argand avec sa cheminée.. ..	23°,44	12°,82	0°,23	$\frac{10}{18}$

La chaleur traverse donc le verre d'autant plus aisément qu'elle vient d'une source à température plus élevée. C'est après avoir prouvé cette proposition que Delaroche ajoute « qu'on ne peut s'empêcher de voir dans ce phénomène un motif assez puissant à joindre à ceux d'après lesquels plusieurs physiciens s'accordent à regarder le calorique comme une modification de la lumière ou plutôt la lumière comme un état particulier du calorique. »

§ 5. — DÉCOUVERTE DE LA POLARISATION DE LA CHALEUR. — RECHERCHES DE M. BÉRARD.

Quelques années après les travaux de Delaroche, en 1813, une découverte très-importante, due à M. Bérard de Montpellier, donnait de la ressemblance parfaite des deux agents calorifiques et lumineux une preuve bien plus puissante encore.

A cette époque, en effet, M. Bérard démontrait par les expé-

riences les plus nettes que la chaleur qui accompagne la lumière solaire se polarise comme cette dernière par la réflexion sur une glace noire lorsqu'elle en rencontre la surface sous l'angle de 35° 25', et il faisait voir aussi que la chaleur obscure peut, dans les mêmes conditions, éprouver une modification semblable. Nous reviendrons longuement sur cette importante découverte, mais avant de continuer l'exposition de la théorie de la chaleur rayonnante, il faut faire connaître un thermoscope d'une extrême sensibilité que l'on doit à MM. Nobili et Melloni, et dont l'emploi a puissamment contribué aux progrès de la branche de science qui nous occupe actuellement.

CHAPITRE II

DE L'APPAREIL THERMOSCOPIQUE DE MM. NOBILI ET MELLONI.

Découverte d'Œrsted. — En 1820, Œrsted avait reconnu qu'un fil de cuivre traversé par un courant électrique possède la proprieté d'agir sur les aiguilles aimantées. Il tend à les diriger perpendiculairement à sa propre direction.

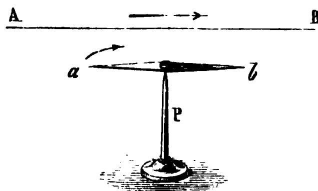


Fig. 761.

Ainsi, qu'une aiguille aimantée (fig. 761) soit supportée par un pivot comme celle d'une boussole ordinaire; si l'on place au-dessus de cette aiguille un fil de cuivre réunissant deux sources A et B d'électricité de noms contraires, l'aiguille se placera dans une direction plus ou moins inclinée sur celle du conducteur. Elle se mettrait en croix avec lui si l'on parvenait à annuler l'action

directrice que la terre exerce sur elle. Dans ce dernier cas, si l'on intervertissait la position des sources A et B, l'aiguille pivoterait de 180°, le pôle austral prenant la place du pôle boréal, et réciproquement.

Multiplicateur de Schweiger. — On peut accroître beaucoup l'effet du courant sur l'aiguille, à l'aide d'une disposition imaginée par M. Schweiger. Le conducteur est un fil de cuivre que l'on a entouré de soie pour l'isoler aussi complétement que possible; il est enroulé un certain nombre de fois sur un cadre vertical; l'aiguille est mobile sur un pivot vertical lui-même, contenu dans le plan du cadre, et passant par son centre. Elle reçoit en même temps les actions de toutes les parties de cette sorte d'hélice très-aplatie; ces actions concordent (voir plus loin, *Action des courants sur les aimants*), et, par suite, la déviation de l'aiguille est accrue; enfin, comme nous l'avons déjà indiqué, on arrive encore à de meilleurs résultats si l'on neutralise, non pas complétement, mais en grande partie, l'action directrice de la terre sur l'aiguille; il suffit pour cela de fixer à l'axe de mouvement une seconde aiguille parallèle à la première, ayant sensiblement même force qu'elle et ses pôles tournés en sens inverse (fig. B).

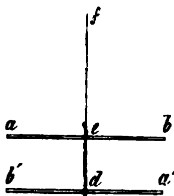


Fig. 762.

L'aiguille supérieure doit être hors de l'hélice et se meut au-dessus d'un cercle divisé; des déviations d'un quart de degré sont appréciables à l'œil.

Découverte de Seebeck. — Le rhéomètre multiplicateur de Schweiger est une des deux parties essentielles de l'appareil thermoscopique de Nobili; la seconde est une pile thermo-électrique. En 1821, M. Seebeck avait reconnu que lorsqu'un circuit fermé est formé de deux fils ou barres métalliques de nature différentes, de manière à présenter deux soudures, il suffit d'établir entre ces soudures une différence de température, pour qu'aussitôt le conducteur total se trouve traversé par un

courant électrique. Si le circuit est formé de plusieurs groupes de fils de fer et de fils de cuivre, et présente en conséquence un nombre pair de soudures, on constate aisément que l'échauffement de plusieurs soudures de même ordre de parité produit un courant plus intense que celui qui provient de l'échauffement

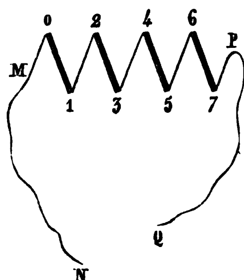


Fig. 763.

de l'une d'elles seulement. La figure C représente une chaîne ainsi composée : 0, 2, 4 sont les soudures paires, 1, 3, 5 les soudures impaires, MN et PQ' les fils destinés à fermer le circuit.

Du reste, dans les circonstances ordinaires, l'intensité de ce courant croît aussi avec la différence de température des soudures, et sa direction est intervertie quand cette différence change de signe.

Pile de Nobili. — La pile de Nobili est un assemblage de 25 couples thermo-électriques, formés chacun d'un barreau de bismuth et d'un barreau d'antimoine; la longueur que l'on donne le plus souvent à ces barreaux est d'environ 25 millim. Ils sont disposés parallèlement entre eux, isolés, et leur ensemble forme une sorte de parallélipipède rectangle, présentant sur une de ses bases toutes les soudures paires du système et toutes les soudures impaires sur l'autre. Lorsqu'on établit la communication entre les deux extrémités d'une pareille chaîne et celles du fil d'un rhéomètre, il suffit d'exposer quelques instants l'un des systèmes de soudures à l'action d'une source de chaleur même très-faible, pour qu'aussitôt l'aiguille indicatrice accuse un courant fort sensible.

Pour régulariser les indications de l'appareil délicat dont nous venons d'indiquer la construction, il faut préserver les faces de la pile de l'action des courants d'air, et en général les abriter

contre tout rayonnement différent de celui dont on veut mesurer les effets. Dans ce but, M. Melloni imagina d'enfermer la pile dans une sorte d'étui métallique notablement plus long qu'elle, et qui peut être fermé à ses deux extrémités par deux petites portes métalliques. On tient ordinairement fermée celle de ces deux cloisons qui répond à la face de la pile sur laquelle ne doit pas tomber le rayonnement de la source.

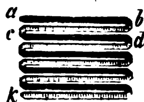


Fig. 764.



Fig. 765.

Les figures 764 et 765 représentent la pile des appareils thermo-électriques qui sortent des ateliers de M. Rumkorff. La première montre la disposition des barreaux alternatifs de bismuth et d'antimoine dans une des cinq séries dont l'ensemble forme la pile; *ab, cd* sont des barreaux du bismuth, *bc* est un barreau d'antimoine. La deuxième fait voir la pile dans son ensemble. Le tube préservateur est formé de trois parties : un anneau central qui maintient tous les éléments de la pile, et deux tubes additionnels qui entrent à frottement sur l'anneau auquel on les attache du reste plus solidement encore à l'aide de petites vis de pression. Les deux tubes additionnels ne sont pas représentés fig. 765; on les voit en place, fig. 770. Enfin, deux fils soudés aux extrémités de la chaîne thermo-électrique traversent l'anneau A, B, mais sans avoir aucun contact métallique avec lui, et ils se terminent par des pièces de cuivre à vis V et V', dans lesquelles on fixe à volonté les deux bouts *a* et *b* du fil du rhéomètre.

Appareil de Melloni. — Le résumé des premières recherches faites par Nobili et Melloni a été inséré aux *Annales de Physique et Chimie,* série II, t. 48. Nobili mourut peu de temps après

cette publication, et ce fut réellement Melloni qui appliqua à l'étude de la chaleur rayonnante le précieux appareil dont nous venons de faire connaître le principe.

La figure E peut faire comprendre la forme que Melloni lui avait définitivement donnée.

A la pile P et au galvanomètre G sont ajoutés différents systèmes d'écrans E, E' et de supports.

La pile, les écrans, les supports sont montés sur des pieds à coulisse, et ces pieds peuvent se mouvoir le long d'une règle solide en cuivre RR', bien dressée, qui rend solidaires toutes les pièces de l'appareil.

Pour mieux faire comprendre l'usage de cet appareil, nous indiquerons rapidement comment M. Melloni l'a employé à l'étude de la transmission, de la réflexion et de la réfraction calorifique.

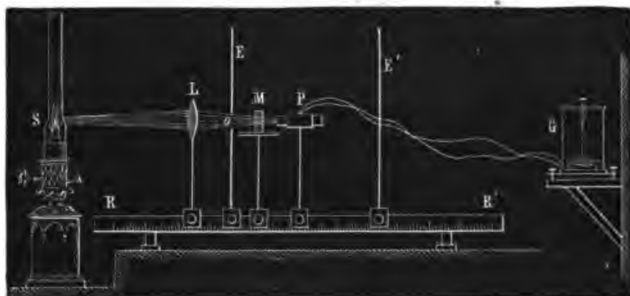


Fig. 766.

La première précaution à prendre est de mettre le galvanomètre au zéro, c'est-à-dire d'amener le zéro de la graduation soit rigoureusement, soit très-approximativement au-dessous de l'aiguille supérieure; l'opération se fait aisément par le moyen d'un pignon à l'aide duquel on peut faire tourner à la fois le cadran gradué et le faisceau des fils conducteurs qui lui sont invariablement liés.

L'appareil étant ainsi réglé, s'il s'agit de trouver dans quelle proportion le verre laisse passer la chaleur venue d'une lampe S, on met cette lampe à une distance de la pile telle que le rayonnement direct ou accru par la lentille L produise une déviation de 25°; puis on place :

1° Contre la pile, un écran percé d'une ouverture un peu moindre que la surface de cette pile;

2° Contre l'écran, un support destiné à porter la lame de verre ;

3° En avant du support, un petit écran à genou à l'aide duquel on peut intercepter ou permettre l'arrivée du rayon sur la pile.

Grâce à ces dispositions, on peut très-rapidement mesurer plusieurs fois de suite et la déviation produite par le rayonnement direct et celle qu'on obtient en interposant devant l'orifice

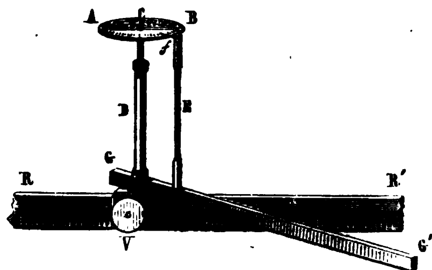


Fig. 767.

du premier écran la lame dont il s'agit de connaître la diathermanéité, et de ces deux déterminations il est aisé de déduire la solution du problème.

L'étude des phénomènes de la réflexion et de la réfraction de la chaleur exige évidemment une disposition différente; celle que Melloni a adoptée est fort commode et fort simple.

Supposons qu'il s'agisse de vérifier que les rayons calorifiques se réfléchissent, comme les rayons lumineux, en restant dans le plan d'incidence, et en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Sur la règle principale on fixe un pied terminé à sa partie supérieure par un cercle divisé AB (fig. 767), dont le centre est dans le plan vertical qui partage la barre RR' en deux parties égales parallèlement à la grande longueur. A sa partie inférieure, le pied dont il s'agit soutient une alidade GG' mobile horizontalement autour de la verticale du centre C, et sur laquelle peut se fixer la pile. Pour mesurer le mouvement angulaire de l'alidade, il suffit de lire sur le cercle AB le déplacement d'une pointe de repère *f* fixée à la partie supérieure de la tige E que l'alidade entraîne avec elle.

Les choses ainsi disposées, on amène l'alidade au-dessus de la règle principale, et l'on place la source en un autre point de cette règle, tel que le faisceau calorifique qui vient directe-

ment de la flamme à la pile produise une déviation convenable. Quand cette déviation a été mesurée, on place le miroir sur le cercle, de telle sorte que sa surface soit verticale et passe par le centre du cercle divisé, et que, de plus, elle fasse avec le rayon incident un angle α; l'angle d'incidence est alors $90 - \alpha$. On tourne alors l'alidade de façon à ce qu'elle fasse avec le rayon incident un angle égal à $2 \times (90^\circ - \alpha)$; et, au moment où l'écran est de nouveau abaissé, l'aiguille dévie. Que l'on change un peu la position de l'alidade, l'effet produit diminuera beaucoup ou même disparaîtra complétement. La figure 768 donne le plan de l'appareil disposé pour recevoir les rayons primitivement émanés de la source *s*, puis réfléchis sur le miroir MM'.

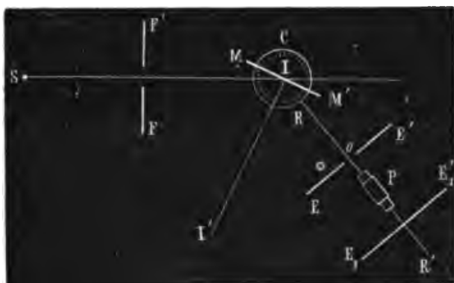


Fig. 768.

La pince dans laquelle on fixe les miroirs est détaillé fig. 769 :

AB plateforme servant de support à la pince;

H pivot entrant dans l'orifice central *c* du cercle divisé AB de la fig. 767;

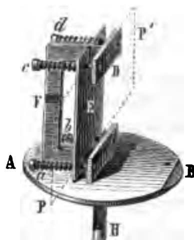


Fig. 769.

D, D' mâchoires de la pince; *a*, *b*, *c*, *d*, ressorts qui tirent les mâchoires DD', vers la plateforme E; PP' miroir.

Si l'on voulait constater la dispersion de la chaleur rayonnante par un prisme, on placerait ce dernier à la place occupée par le miroir MM' dans l'expérience précédente, fig. 768, et l'on reconnaîtrait que l'on obtient des effets calorifiques très-sensibles lorsqu'on fait mouvoir l'alidade entre deux limites assez reculées l'une de l'autre; ces limites comprennent le spectre lumineux, et le maximum d'effet calorifique s'observe lorsque la pile est

orientée de façon à recevoir à peu près les rayons rouges de ce dernier.

Graduation. Méthode de Melloni. — Pour transformer le thermoscope de MM. Nobili et Melloni en un appareil de mesure, il faut en graduer le rhéomètre, ou, si l'on aime mieux, chercher la relation qui existe entre les déviations de l'aiguille et les intensités des actions calorifiques qui les produisent.

Pour y arriver, Melloni opérait de la manière suivante :

Sur une des deux faces de la pile, il faisait tomber le rayonnement venu d'une source constante S′ placée à une distance déterminée, et il observait la déviation produite D′, puis, l'action de S′ étant supprimée, il faisait agir sur la deuxième face une autre source S″, et il obtenait une déviation D″ Ces déviations D″ et D′ avaient lieu des deux côtés opposés de la ligne 0°, 180° du cadran, nous supposerons D″ < D′. Enfin, sans changer en aucune façon les distances, il faisait agir S′ et S″ ensemble. Si la déviation nouvelle D était égale à D′ — D″, il admettait que de D″ à D les déviations étaient proportionnelles aux actions calorifiques. Cette égalité D = D′ — D″ paraît en effet avoir existé dans ses expériences pour les valeurs de D′ inférieures à 20°. Au delà de cette limite, elle n'existait plus; on avait, en général, D′ < D + D″. Alors tant que D et D″ étaient l'un et l'autre plus petits que 20°, M. Melloni admettait que les actions calorifiques qui produisaient la déviation D′ avaient pour mesure, non plus cette déviation elle-même, mais la somme D + D″.

En cherchant à appliquer ce procédé de graduation, nous nous sommes trouvés arrêtés par la difficulté suivante :

Souvent des rhéomètres très-sensibles, et par conséquent précieux pour les recherches, donnent sous l'action d'une même source des déviations dont la grandeur absolue varie, toutes choses égales d'ailleurs, avec le sens dans lequel elle s'effectue.

Pour s'en convaincre, il suffit de mesurer avec soin l'action produite par une source constante placée en une position bien fixe, et puis de recommencer l'expérience en des conditions parfaitement identiques d'ailleurs, mais en intervertissant les contacts entre la pile et le rhéomètre, ce qui change le sens du courant. Avec beaucoup d'appareils, la deuxième déviation est différente de la première.

Dans ce cas, le procédé de M. Melloni n'est plus applicable, puisqu'il suppose implicitement la symétrie parfaite de l'appareil rhéométrique. Voici en quoi consiste celui que nous avons adopté :

Méthode de MM. de la Provostaye et Desains. — On dispose d'un même côté de la pile deux sources d'intensités con-

stantes, par exemple deux lampes à modérateur, en s'arrangeant de manière que les droites menées du centre de la flamme de chacune de ces lampes à la pile fassent avec l'axe de celle-ci des angles peu considérables. On fait agir successivement sur la pile chacune des deux lampes seules, puis on les fait agir toutes les deux à la fois. Soient n, n' et N les déviations obtenues; la quantité de chaleur qui produit la déviation N est certainement la somme de celles qui produisent les déviations n et n'; or, pour des valeurs de n et n' suffisamment petites, on commence par avoir $N = n + n'$, et, en particulier, $N = 2n$, lorsque $n = n'$; par conséquent, on conçoit qu'en graduant convenablement l'action des sources qu'on emploie, on peut construire expérimentalement une table qui exprime les rapports de la quantité de chaleur qui, en tombant sur la pile, produit une déviation N à celle qui produit une autre déviation plus petite et égale à n.

Il est, du reste, facile de prouver que, sous l'action de deux sources agissant ensemble, un corps quelconque doit atteindre un excès de température final égal à la somme de ceux que chaque source lui communiquerait en agissant isolément sur lui, pourvu que cet excès soit petit.

Soient en effet (voir p. 573),

$$(a) \quad \omega[f(T) - f(t)] = f(\theta) - f(t) + K(\theta - t),$$
$$(b) \quad \omega'[f(T') - f(t)] = f(\theta') - f(t) + K(\theta' - t),$$

les équations d'équilibre relatives aux cas où chaque source agit isolément.

L'équation relative au cas où elles agiront ensemble sera :

$$\omega[f(T) - f(\theta'')] + \omega'[f(T') - f(\theta'')] = [(1 - \omega - \omega')[f(\theta'') - f(t)] + K(\theta'' - t)$$

ou

$$(c) \quad \omega[f(T) - f(t)] + \omega'[f(T') - f(t)] = [f(\theta'') - f(t)] + K(\theta'' - t).$$

D'autre part, en ajoutant les équations (a) et (b), on a

$$(d) \quad \omega[f(T) - f(t)] + \omega'[f(T') - f(t)] = f(\theta) - f(t) + K(\theta - t) + f(\theta') - f(t) + K(\theta' - t).$$

En rapprochant cette équation (d) de la précédente (c), on en déduit

$$[f(\theta'') - f(t)] - [f(\theta) - f(t)] - [f(\theta') - f(t)] + K[(\theta'' - t) - (\theta - t) - (\theta' - t)] = 0.$$

Mais quand les excès de température

$$\theta''-t, \quad \theta'-t, \quad \theta-t$$

sont faibles, on peut, aux différences

$$f(\theta'')-f(t), \quad f(\theta')-f(t), \quad f(\theta'')-f(t),$$

substituer

$$n(\theta''-t), \quad n(\theta'-t), \quad n(\theta-t),$$

et alors l'équation précédente se réduit à

$$\theta''-t=\theta'-t+\theta-t.$$

Dans le cas de l'appareil de Melloni, le corps qui s'échauffe est la première couche de la pile. Or à chaque instant cette couche se refroidit d'un côté par rayonnement et action de l'air, de l'autre par conductibilité. Mais ces causes différentes agissent toutes trois proportionnellement à la différence qui existe entre la température de la couche et celle de l'enceinte : on est donc dans le cas auquel la démonstration précédente s'applique.

L'excès de température et, par suite, l'intensité du courant produits par l'action des deux sources doivent donc être la somme des effets que chacune produirait isolément.

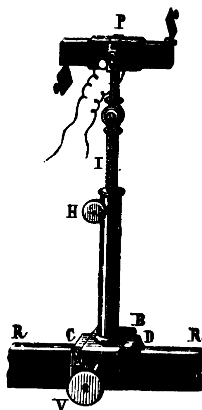


Fig. 770.

Modifications de la disposition de quelques pièces de l'appareil. — Nous avons aussi été conduits à apporter à la disposition

même de l'appareil de M. Melloni quelques modifications de détail que nous indiquerons, parce qu'elles nous ont souvent été commodes :

1° Au lieu de glisser à frottement simple dans un pied creux, la tige qui supporte la pile est mise en mouvement à l'aide d'une crémaillère et d'un pignon. La tête de ce dernier est en ivoire, elle conduit mal la chaleur; on peut donc manœuvrer la pile sans lui donner de la chaleur par le contact des doigts; 2° le pied de la pile peut prendre un mouvement de quelques centimètres dans une direction perpendiculaire à la règle principale; la fig. 770 représente la coulisse dans laquelle ce mouvement s'effectue; 3° enfin, nous avons adopté un système d'écrans beaucoup plus grands que ceux dont on faisait ordinairement usage; on en voit indiqués fig. 766. Une partie de ces écrans se fixent sur la table même où est placé l'appareil, et ils forment autour de la pile une sorte d'enceinte ouverte seulement à la partie supérieure, et qui la préserve aussi complétement que possible de l'action de tous les rayonnements qui pourraient troubler les expériences.

CHAPITRE III.

ÉMISSION DE LA CHALEUR PAR LES CORPS ATHERMANES.

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains.

§ 1. — POUVOIRS ÉMISSIFS AUX TEMPÉRATURES BASSES.

Melloni, en cherchant à déterminer avec son appareil les pouvoirs réflecteurs absolus des métaux *polis*, les avait trouvés inférieurs à 0,45; et, de plus, il avait cru reconnaître que leurs valeurs sont indépendantes de la nature de la chaleur incidente; enfin il était facile de s'assurer que la diffusion à la surface de ces corps est extrêmement faible. En rapprochant ces trois propositions, on se trouvait conduit à admettre que les métaux *polis* doivent absorber plus de 0,50 de la chaleur qui tombe sur eux. Mais d'autre part, toutes les déterminations connues assignaient

aux pouvoirs émissifs de ces corps des valeurs inférieures à 0,20. Et dès lors l'expérience semblait démentir d'une façon formelle le principe fondamental de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants.

Ces contradictions donnaient droit de craindre que des erreurs graves n'affectassent les valeurs des pouvoirs émissifs des métaux; nous avons donc, au début de nos recherches sur l'émission calorifique, mis tous nos soins à déterminer ces pouvoirs, en nous tenant, autant que possible, à l'abri des causes d'erreur qui nous paraissaient avoir dû influer sur les mesures antérieures. Nous opérions avec l'appareil de M. Melloni, page 583. Aux températures voisines de 100° nous prenions pour sources de chaleur des vases métalliques à parois planes remplis d'huile : leur capacité était d'une dizaine de litres, et dans ces conditions il était inutile de les chauffer directement pendant les mesures; des additions d'huile chaude convenablement ménagées suffisaient pour maintenir bien constante la température du bain; une agitation continuelle la rendait uniforme, et on la mesurait avec des thermomètres à mercure plongés dans le liquide, en prenant soin de faire à leurs indications toutes les corrections

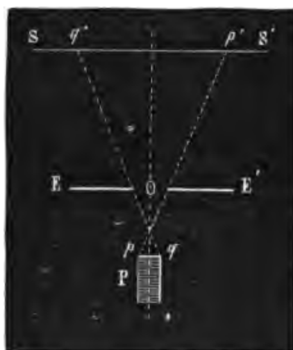


Fig. 771.

d'usage. Au reste, dans les expériences comparatives, on opérait toujours à l'instant où le degré du thermomètre redevenait le même.

Pouvoirs émissifs aux basses températures. — Nos premiers essais nous montrèrent assez rapidement que la valeur commune

admise pour les pouvoirs émissifs des métaux polis était trois ou quatre fois trop forte, et dès lors nous nous trouvions amenés à déterminer avec le thermo-multiplicateur un rapport voisin de celui de 20 à 1. Une pareille détermination est délicate, quelque soin que l'on puisse d'ailleurs apporter à la graduation de ce thermomètre. Pour lever la difficulté expérimentale que nous signalons, nous avons employé plusieurs procédés différents; tous ont conduit aux mêmes résultats. L'un de ces procédés repose sur l'emploi de *diaphragmes à ouvertures graduées*.

Lorsqu'un appareil thermoscopique reçoit le rayonnement d'une surface entretenue à une température constante, la grandeur de la déviation galvanométrique dépend de l'étendue de cette surface. Par conséquent, si le rayonnement est transmis à travers l'ouverture O d'un écran EE' placé entre la source SS' et la pile P (fig. 771), l'effet produit, toutes choses égales d'ailleurs, variera en général avec les dimensions de O. Il n'y aurait d'exception que si l'ouverture O était assez grande ou la surface SS' assez petite pour que de la pile on pût, à travers l'ouverture O, voir d'autres corps que SS'; mais nous excluons ces cas.

Les distances de la source, de l'écran et de la pile restant les mêmes, le rapport des déviations qui correspondent à deux grandeurs différentes G et g de l'ouverture O est un nombre indépendant des températures, constantes d'ailleurs, que la source d'une part, et l'enceinte d'autre part, doivent conserver pendant chaque groupe d'expériences consécutives qui servent à en fixer la valeur; soit m ce rapport. Tant qu'il est inférieur à 3, on peut le déterminer sans difficulté; s'il dépasse cette limite, il faut recourir à une comparaison intermédiaire, et cela de la manière suivante: On prend une ouverture G_1 intermédiaire entre g et G, puis on porte la source à une température T_1 telle que les déviations obtenues à travers les ouvertures G et G_1 aient des valeurs admissibles, 30 et 10 par exemple. On en conclut le rapport m_1 des effets produits à travers G et G_1.

On élève ensuite la température de la source de manière à avoir à travers G_1 une déviation voisine de 30, et l'on détermine le rapport de cette déviation à celle que l'on obtient à travers g. Soit m_2 le rapport des actions calorifiques correspondantes, on aura définitivement $m = m_1 \times m_2$, et cette valeur de m aura été déterminée à l'aide de déviations convenables...

Ceci posé, on comprendra sans peine la manière dont on peut employer les diaphragmes à ouvertures graduées dans la détermination des pouvoirs émissifs des métaux polis.

On tourne vers la pile la face argentée d'un des cubes dont

nous avons parlé, et on règle les distances de telle sorte que le rayonnement transmis à travers la plus grande ouverture de l'écran produise une déviation d' voisine de 40°. Cette déviation connue, on substitue à la grande ouverture une autre qui produise un effet m fois plus petit. Puis à travers cette petite ouverture on fait rayonner la face noircie de la source, soit d l'effet obtenu. $\frac{d'}{md}$ sera le pouvoir cherché. Nous en admettons qu'entre d et d' les déviations sont proportionnelles aux quantités de chaleur incidente; autrement d devrait être corrigé à l'aide de la table de graduation. (Voir p. 587.)

Le tableau suivant renferme les valeurs que nos expériences assignent aux pouvoirs émissifs d'un certain nombres de substances métalliques à des températures voisines de 100° :

Argent vierge sortant du laminoir	0,03
Argent mat chimiquement déposé sur cuivre	0,053
Argent pur bruni	0,023
Le même longtemps chauffé	0,028
Argent chimiquement déposé et puis bruni	0,022
Platine sortant du laminoir	0,106
Platine bruni	0,092
Or en feuilles	0,043
Cuivre en lames	0,050

Ce tableau montre quelle est, à cette température de 100°, l'extrême faiblesse du pouvoir émissif de l'argent et de l'or bien polis ; il établit en même temps que, suivant l'état physique de sa surface, un même métal peut émettre des quantités de chaleur bien différentes, puisque l'argent mat, quoique parfaitement blanc et brillant, possède un pouvoir émissif double de celui qui est relatif à l'argent poli.

Cette variation peut aller beaucoup plus loin encore. Dans le cours de nos expériences sur les lois du refroidissement, nous avions eu l'occasion de remarquer que l'or et l'argent en coquille ont un grand pouvoir émissif. Quelque temps après la publication de notre mémoire sur les pouvoirs émissifs des métaux, MM. Masson et Courtépée ont constaté le même fait, et ils ont fait voir, en outre, que beaucoup d'oxydes ou de poudres salines ont à 100° le même pouvoir émissif que le noir de fumée, l'ocre ou la céruse.

§ 2. — POUVOIRS ÉMISSIFS AUX TEMPÉRATURES ÉLEVÉES.

Toutes les expériences dont nous venons de faire connaître les résultats avaient été exécutées à des températures voisines de 100°. Il était indispensable de les continuer en portant à un degré de chaleur aussi haut que possible les corps dont on voulait étudier les pouvoirs émissifs, car le peu de données que l'on avait sur la question se trouvaient encore pleines de contradictions. D'une part, en effet, MM. Dulong et Petit, en cherchant à comparer, par une méthode que nous développerons plus loin, les

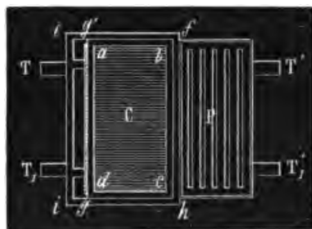


Fig. 772.

pouvoirs émissifs du verre et de l'argent, étaient arrivés à cette conséquence que ces pouvoirs conservaient le même rapport à toute température. Et d'autre part, les expériences de Baden-Powel et de Melloni prouvaient que le rapport des pouvoirs absorbants de la céruse et du noir de fumée change avec la température de la source qui émet la chaleur incidente, ce qui implique une variation égale dans le rapport de leurs pouvoirs émissifs, si le principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants est une vérité.

Les recherches que nous avons faites pour résoudre cette difficulté ont été très-nombreuses. Entre 100 et 400° nous avons continué à employer pour sources de chaleur de grands vases pleins d'huile ou d'alliage. Mais alors il devenait indispensable d'entretenir du feu sous ces vases, et par suite toutes précautions étaient prises pour que l'action directe du fourneau sur la pile fût nulle. A cet effet, et indépendamment de tous les systèmes d'écrans ordinaires, on établissait entre le fourneau et l'appareil thermoscopique un mur de briques, percé seulement d'une ouverture, à travers laquelle la pile pouvait recevoir le rayonnement de la partie centrale de la face du vase échauffé.

L'ajustement de tout le système d'écrans se faisait aisément, parce qu'en ces circonstances on pouvait reculer beaucoup la pile de la source calorifique. Les vases qui contenaient l'alliage étaient en fonte ; leurs faces avaient été dressées avec soin, et les plaques dont on voulait étudier le pouvoir émissif étaient appliquées avec force contre ces faces à l'aide de cadres métalliques et de systèmes de serrage énergiques. La figure 772 donne une idée de la disposition de l'appareil ; elle en représente le plan.

a, b, c, d, section de la cuve ;

F grille d'un fourneau appliqué contre la face postérieure de cette pile ;

TT', $T_1T'_1$, barres de fer soutenant la cuve et le fourneau F au-dessus d'un autre fourneau destiné à chauffer la partie inférieure du bain ;

e, f, g, h, cadre métallique employé pour serrer les plaques *gg'* contre la face antérieure de la cuve.

Pour opérer à des températures plus élevées, il fallait recourir à un procédé tout différent : nous prenions pour corps rayonnant une lame de platine très-mince, de 18 millimètres de large et 75 de longueur, que nous portions à volonté à toutes les températures comprises entre 100 et 600 degrés, à l'aide d'une pile de Bunsen de trente-deux couples, le plus souvent assemblés quatre à quatre. Ce mode d'échauffement permet d'élever ou d'abaisser, pour ainsi dire, instantanément la température, en augmentant ou réduisant le nombre des couples qui font partie du circuit. On peut ainsi vérifier à tout instant que la surface n'est pas altérée d'une manière permanente, et, sans déplacer la lame, sans déplacer l'appareil mesureur, lire successivement et alternativement quelle est la valeur du pouvoir émissif à 100 et à 500 ou 600 degrés.

Notre méthode présente une autre innovation qui consiste dans l'emploi simultané de deux appareils thermo-électriques, comparés à l'avance, dont l'un sert de témoin et rend les résultats parfaitement sûrs, même quand il s'agit de comparer des rayonnements qui varient d'un instant à l'autre.

Voici comment on peut concevoir la marche des opérations : on recouvre les deux faces d'un enduit identique, de noir de fumée, par exemple ; puis on porte la lame à des températures voisines de 100, 300, 400 degrés, et on règle par tâtonnement la position des deux piles, de manière que, recevant simultanément, l'une la chaleur émise par la face antérieure, et l'autre celle émise par la face postérieure de la lame, elles donnent la même déviation. Cela fait, on remplace l'un des deux enduits par un autre, du

borate de plomb, par exemple, et l'on observe simultanément les deux émissions. Si la chaleur envoyée par le noir de fumée reste exactement la même, le rapport des deux déviations produites par l'autre face, successivement couverte de noir de fumée et de borate de plomb, donne le pouvoir émissif de cette dernière substance. Si la source a un peu varié, la correction peut se faire immédiatement.

Les piles thermoscopiques étaient placées de manière à donner des déviations convenables quand la lame était portée à 100° environ. Lorsque l'intensité du rayonnement devenait vingt ou trente fois plus forte, on ne déplaçait pas les deux piles thermo-électriques, mais on intercalait dans leurs circuits des fils dont on avait préalablement déterminé les résistances, ainsi que celles des circuits primitifs eux-mêmes. Les déviations produites étaient alors observables, et l'on en déduisait celles que l'on eût obtenues sans l'addition des fils. En opérant ainsi, nous avons reconnu que le pouvoir émissif du borate de plomb éprouve une forte diminution quand la température s'élève au rouge naissant : vers 100 degrés il est égal à celui du noir de fumée, vers 530 il n'est plus que 0,75. Du reste, le borate n'éprouve en ces circonstances aucune altération permanente, car si on le ramène à 100 degrés, son pouvoir émissif reprend sa valeur première.

Influence de la température sur l'intensité de l'émission. — MM. Dulong et Petit avaient admis, comme conséquence de leurs expériences sur le refroidissement, que le rayonnement propre d'un corps à toute température peut être représenté par l'expression ma^t, m étant un coefficient proportionnel au pouvoir émissif du corps rayonnant, et a étant le nombre 1,0077. Cette loi ne peut être exacte, puisque les rapports de pouvoirs émissifs des corps changent avec la température. Toutefois, comme les changements dont il s'agit ne deviennent sensibles en général qu'au dessus de 200°, il y avait de l'intérêt à voir si entre zéro et cette limite de 200 à 250° la loi de Dulong et Petit représente bien l'accroissement que l'émission propre des corps éprouve par l'effet de l'élévation de température. Or, si l'on se reporte aux calculs des pages 572 et 573, on voit immédiatement que si, dans une enceinte noircie maintenue à la température t, on fait rayonner vers un thermoscope noirci une source également noircie, et portée successivement à 2 températures T et T_1, le rapport des indications thermoscopiques obtenues d et d_1 sera égal à $\frac{f(T)-f(t)}{f(T_1)-f(t)}$.
Par conséquent, si la forme exponentielle a^t est celle de la fonction $f(t)$, entre des limites qui comprennent T, T_1 et t, on devra

avoir entre ces limites $\frac{d}{d_1} = \frac{a^t(a^{T-t}-1)}{a^t(a^{T_1-t}-1)}$. C'est, en effet, ce qui a lieu entre 0 et 200. Nous nous en sommes assurés en faisant rayonner vers l'appareil thermo-électrique un vase noirci plein d'huile ou d'alliage convenablement chauffé. Au-dessous de 200, le rapport des actions produites sur la pile, par les rayonnements émanés de la source à deux températures quelconques T et T_1, était toujours représentée par l'expression $\frac{1{,}009^{T-t}-1}{1{,}009^{T_1-t}-1}$, t étant la température de l'enceinte; mais au-dessus de 200, cette formule simple, conséquence immédiate de la loi de rayonnement admise par Dulong et Petit, n'était plus applicable.

Influence de la nature de la surface des sources sur la composition de la chaleur émise. — La nature de la surface d'un corps n'influe pas seulement sur la quantité de chaleur que ce corps peut émettre à une température déterminée, elle influe aussi sur la qualité, ou, si l'on aime mieux, sur la composition de la chaleur émise. L'influence se met très-aisément en évidence lorsque, pour source de chaleur, on prend, comme nous l'avons indiqué plus haut, une lame de platine couverte sur une de ses faces de borate de plomb, et fortement chauffée par un courant électrique. Dans une de nos expériences, la chaleur émise par la face de platine traversait une mince lame de verre dans la proportion de 0,39, tandis que la chaleur émise par le borate, à même température, ne traversait le même écran que dans la proportion de 0,22.

Au reste, pour manifester les différences dont nous parlons, il n'est pas nécessaire d'opérer à des températures voisines de l'incandescence. Nous sommes arrivés à la mettre en évidence en employant pour source de chaleur les bains liquides dont nous nous servions d'ordinaire pour opérer à des températures comprises entre 200 et 400°.

§ 3. DE LA VARIATION DES POUVOIRS ÉMISSIFS AVEC L'INCLINAISON.

Dans le paragraphe 349 de sa *Pyrométrie*, Lambert pose en principe que la quantité de chaleur émise obliquement par la surface d'un corps est proportionnelle au sinus de l'angle que les rayons forment avec cette surface, et que, par conséquent, une sphère envoie dans une direction déterminée autant de chaleur que le grand cercle de cette sphère perpendiculaire à cette direction.

Comme nous l'avons déjà dit, Leslie avait vérifié expérimentalement le principe de Lambert, mais en se bornant au cas particulier où la surface de la source calorifique était couverte de noir de fumée, c'est-à-dire dénuée de tout pouvoir réflecteur. Depuis, aucun physicien ne s'était préoccupé de chercher si la loi de Lambert est générale, et par conséquent on ignorait si le rapport des pouvoirs émissifs des corps change ou ne change pas avec la direction de l'émission. La solution de cette question était pourtant une de celles qui pouvaient le plus directement servir à contrôler l'exactitude du principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants.

Pour le faire voir simplement, supposons qu'il s'agisse d'une substance pouvant, comme le verre, recevoir un beau poli, et, par suite, ne diffuser la chaleur qu'en proportions inappréciables. Alors, le pouvoir réflecteur dans chaque direction sera le complément à l'unité du pouvoir absorbant. S'il varie avec l'incidence, s'il augmente, il faudra que le pouvoir absorbant diminue, et il en sera de même du pouvoir émissif si l'on admet que l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants est rigoureusement vraie.

D'après ces considérations, nous avons comparé entre elles les quantités de chaleur qu'émet dans une série de directions différentes une même surface plane, d'abord noircie, puis recouverte de divers enduits, et enfin d'une lame de verre.

Si la loi de Lambert s'appliquait à toutes ces substances, les rapports de leurs pouvoirs émissifs conserveraient la même valeur sous toutes les inclinaisons. Cette constance n'existe en aucune sorte, ainsi que le prouve le tableau suivant déduit de l'ensemble de nos expériences.

TABLEAU DES POUVOIRS ÉMISSIFS DE DIFFÉRENTES SUBSTANCES DANS DES DIRECTIONS OBLIQUES A LA SURFACE ÉMETTANTE.

ANGLE des rayons émis avec la normale.	NOMS DES SUBSTANCES.			
	Noir de fumée	Céruse.	Ocre.	Verre.
0.............	1,00	1,00	1,00	0.90
70............	1,00	0,84	0,91	0,75
75............	1,00	»	»	0,655
80............	1,00	0,66	0,82	0,55

Ainsi, la proportionnalité qui, pour le noir de fumée, existe entre l'intensité de l'émission et le cosinus de l'angle que les rayons émis font avec la normale est une loi particulière, vérifiée seulement dans le cas d'un corps dont le pouvoir réflecteur est nul sous toutes les inclinaisons.

Pour obtenir ces résultats, nous avons fait rayonner vers l'appareil thermoscopique une caisse parallélipipédique en cuivre de dimensions assez considérables. L'une de ses grandes faces pouvait, comme nous le disions aux lignes précédentes, être recouverte de divers enduits. Sur l'autre, on pouvait appliquer exactement une lame de verre mince. Cette caisse était, dans les opérations successives, plus ou moins inclinée sur l'axe de la pile; elle était remplie d'huile à une température voisine de 160° et toujours la même dans les diverses expériences qui devaient être comparées entre elles.

Deux écrans de grandes dimensions, percés d'ouvertures de 2 centimètres de large et de 6 centimètres de haut, délimitaient le faisceau de chaleur; ils étaient placés de manière que, de la pile, on n'apercevait jamais les bords du vase.

CHAPITRE IV.

RÉFLEXION DE LA CHALEUR A LA SURFACE DES CORPS POLIS.

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains.

§ 1. — Pouvoirs réflecteurs des métaux polis sous l'incidence 50°. — Influence de la nature des rayons incidents.

Les valeurs assignées aux pouvoirs émissifs des métaux polis par les expériences décrites au chapitre précédent étaient encore moins que celles de la page 570 les compléments à l'unité des nombres admis jusqu'alors pour pouvoirs réflecteurs de ces corps.

Nous nous sommes donc trouvés conduits à faire de nouvelles expériences sur la détermination de ces pouvoirs et bientôt à étudier dans son ensemble la question de la réflexion de la chaleur à la surface des corps.

Nous avons d'abord déterminé directement la proportion dans laquelle des miroirs, formés des métaux les plus usuels, réfléchis-

sent, sous l'angle de 50°, la chaleur émise par une lampe de Locatelli. Les nombres que nous avons trouvés sont renfermés dans le tableau suivant ; ils n'ont, comme on voit, aucun rapport avec ceux qui sont consignés aux pages 570 et 589.

POUVOIRS RÉFLECTEURS DES MÉTAUX POLIS
POUR LA CHALEUR D'UNE LAMPE DE LOCATELLI.

Incidence 50°.

NOMS des substances.	POUVOIRS réflecteurs absolus.	NOMS des substances.	POUVOIRS réflecteurs absolus.
Argent........	0,97	Étain........	0,85
Or........	0,96	Acier........	0,83
Cuivre........	0,93	Zinc........	0,81
Laiton........	0,93	Platine poli........	0,80
Métal des miroirs...	0,86	Fer........	0,77

Après avoir ainsi trouvé pour une incidence particulière et pour la chaleur venue de la lampe Locatelli, les pouvoirs réflecteurs des métaux polis, nous avons voulu nous assurer si, comme on l'admettait à l'époque de nos expériences, la réflexion régulière à la surface des miroirs se fait avec une intensité constante pour toutes les espèces de chaleur. L'expérience nous a prouvé que cette indépendance entre l'intensité de la réflexion et la nature du rayon incident n'existe en aucune sorte.

Quand on emploie les rayons solaires naturels, les pouvoirs réflecteurs des métaux prennent des valeurs très-notablement différentes de celles qu'on leur trouve en opérant avec la chaleur venue directement d'une lampe de Locatelli. On en jugera en rapprochant le tableau suivant de celui qui précède :

NATURE DES MIROIRS.	POUVOIRS RÉFLECTEURS pour la chaleur solaire naturelle.
Argent........	0,92
Or........	0,87
Métal des miroirs........	0,64
Acier........	0,60
Platine........	0,60

Quand on emploie la chaleur d'une lampe alimentée par l'alcool salé, l'acier réfléchit environ 0,88 de la chaleur incidente, le platine 0,86, le laiton 0,95. En étudiant les rayons émis par une lampe à modérateur et transmis à travers des masses de verre un peu épaisses, nous avons trouvé pour différents métaux des valeurs intermédiaires entre celles que nous avaient fournies la lampe de Locatelli d'une part, et le soleil de l'autre.

En un mot, toutes ces expériences indiquent que la réflexion de la chaleur par un métal poli devient en général plus faible lorsque la température de la source d'où sortent les rayons sur lesquels on opère devient elle-même de plus en plus élevée, ou lorsque, par l'action d'un milieu, on diminue la proportion des rayons de la nature de ceux qui abondent dans l'émission des corps à basse température.

Mais la connaissance de la nature d'une source et sa température ne donnent, jusqu'ici au moins, que des renseignements un peu vagues sur la composition généralement très-complexe des rayonnements qu'elles émettent.

Herschell, dans son remarquable travail sur la chaleur rayonnante, avait défini souvent les rayons qu'il étudiait par la place qu'ils occupaient dans le spectre calorifique. Melloni avait suivi cet exemple dans plusieurs de ses travaux. Nous nous sommes, à notre tour, placés au même point de vue, et après avoir précisé d'une manière générale l'influence de la nature des sources sur la réflexion, nous avons repris la question en étudiant d'une façon toute spéciale la réflexion des rayons solaires simplifiés, autant que possible, par leur dispersion à travers des prismes de verre, et nous avons trouvé qu'en général l'intensité de la réflexion change avec le degré de réfrangibilité, quoique, pour certains métaux, l'acier, par exemple, la réflexibilité soit sensiblement la même pour la chaleur prise dans toute l'étendue du spectre lumineux.

Enfin, en étendant nos recherches aux rayons moins réfrangibles que le rouge, nous avons vu que, sur tous les métaux essayés, ils se réfléchissent en proportion plus forte que la chaleur lumineuse. Les différences deviennent surtout très-fortes lorsqu'on opère sur des rayons distants de la bande rouge d'une quantité à peu près égale à celle qui sépare cette dernière du bleu du spectre.

L'acier réfléchit jusqu'à 0,75 de cette chaleur, et le laiton 0,90.

L'étude de la réflexion sur le verre nous a conduits à des résultats tout semblables. Un miroir de verre noir, sous une incidence de 20° environ, réfléchit, d'après nos déterminations, jus-

qu'à 0,09 de la chaleur émanée d'un cube noirci et chauffé à 150°, tandis que ce même miroir de verre ne réfléchit qu'environ 0,04 de la chaleur solaire tombant à peu près normalement sur sa surface.

Tous ces exemples montrent combien le pouvoir réflecteur d'un miroir varie avec la nature du rayon incident, et l'on ne saurait voir sans quelque surprise dans quelle proportion s'accroît l'intensité de la réflexion, lorsque les rayons incidents acquièrent ces grandes longueurs d'onde caractéristiques des portions les moins réfrangibles de la chaleur solaire, et, suivant toute apparence aussi, des rayonnements moyens émis par des sources à basse température.

§ 2. — Variation des pouvoirs réflecteurs avec l'incidence. — Extension a la chaleur des formules de l'optique.

L'étude des lois suivant lesquelles l'intensité de la réflexion calorifique varie avec l'incidence nous paraissait digne d'une attention toute spéciale.

On savait que la chaleur rayonnante se réfléchit, se réfracte, se disperse, se polarise; mais on ne savait pas si, de cette ressemblance entre les agents calorifiques et lumineux, on pouvait conclure à une identité entre les lois qui règlent les variations d'intensité qu'ils éprouvent dans des circonstances semblables.

Pour résoudre la question, nous avons cherché si les formules données par Fresnel et par Cauchy, comme expression des lois de la réflexion lumineuse, sont applicables à la réflexion calorifique, et nous nous sommes en effet assurés qu'elles représentent aussi bien l'un des phénomènes que l'autre.

Seulement, pour se placer dans les conditions où ces comparaisons seraient le plus probantes, il fallait opérer avec de la chaleur polarisée, et nous avons pu le faire sans difficulté en employant comme appareil polariseur un prisme de spath achromatisé. Nous prenions pour source calorifique un trait fort délié de rayons solaires réfléchis par un héliostat; l'étroitesse du faisceau nous donnait toute sûreté dans l'appréciation des angles, et la grande intensité des radiations solaires nous permettait d'avoir des déviations aussi fortes que nous pouvions le désirer.

Les deux tableaux suivants sont relatifs au cas de la réflexion sur le verre; nous y mettons en regard les résultats de nos expériences et ceux auxquels conduisent les deux formules de Fresnel expliquées pages 506 et suiv., à savoir :

$$I = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \qquad I' = \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)},$$

lorsqu'on suppose, pour les réduire en nombre, que l'indice de réfraction est égal à 1,52.

TABLEAU I.

CAS OU LA CHALEUR EST POLARISÉE DANS LE PLAN D'INCIDENCE.

ANGLES DE RÉFLEXION.	INTENSITÉS observées.	INTENSITÉS calculées.
80	0,551	0,546
75	0,407	0,408
70	0,306	0,308
60	0,18	0,183
50	0,116	0,117
40	0,081	0,081
30	0,061	0,061
20	0,050	0,050

TABLEAU II.

CAS OU LA CHALEUR EST POLARISÉE PERPENDICULAIREMENT AU PLAN DE RÉFLEXION.

ANGLES D'INCIDENCE.	INTENSITÉS observées.	INTENSITÉS calculées.
80	0,24	0,236
75	0,11	0,106
70	0,0434	0,0434
28	0,03	0,029

L'identité des lois de la réflexion de la chaleur et de la lumière

se manifeste d'une façon tout aussi frappante lorsqu'on prend pour miroirs des lames de métaux polis; nous nous en sommes assurés en étudiant la réflexion de la chaleur sur des miroirs parfaitement semblables à ceux que M. Jamin avait employés dans les recherches photométriques que nous avons analysées pages 533 et suiv.

Les tableaux suivants renferment la comparaison de nos expériences à la fois aux expériences de M. Jamin et aux résultats déduits par le calcul des formules de Cauchy.

MÉTAL DES MIROIRS.

INCIDENCES.	RACINE CARRÉE des intensités de la lumière réfléchie. — Rayons rouges. Observation.	RACINE CARRÉE des intensités de la lumière réfléchie. — Rayons rouges. Calcul fait par la formule de Cauchy.	RACINE CARRÉE des intensités de la chaleur réfléchie. — Rayons solaires moyens. — Observation.
Rayons polarisés parallèlement au plan d'incidence.			
80..............	0,959	0,961	0,968
72..............	0,926	0,932	0,946
50.	0,88	0,866	0,860
30	0,845	0,827	0,818
Rayons polarisés perpendiculairement au plan d'incidence.			
80..............	0,655	0,651	0,663
72..........	0,678	0,68	0,644
50..............	0,819	0,73	0,76
30..............	0,828	0,781	0,785

ACIER.

INCIDENCES.	RACINE CARRÉE des intensités de la lumière réfléchie. — Rayons rouges. Observation.	RACINE CARRÉE des intensités de la lumière réfléchie. — Rayons rouges. Calcul fait par la formule de Cauchy.	RACINE CARRÉE des intensités de la chaleur réfléchie. — Rayons solaires moyens. — Observation.
Rayons polarisés parallèlement au plan d'incidence.			
80..............	0,945	0,951	0,949
75..............	0,946	0,932	0,930
70..............	0,915	0,910	0,912
50..............	0,828	0,842	0,833
30..............	0,790	0,795	0,800
Rayons polarisés perpendiculairement au plan d'incidence.			
80..............	0,547	0,583	0,538
75..............	0,566	0,563	0,520
50..............	0,666	0,681	0,684
30..............	0,760	0,742	0,752

Nous comparons ici la réflexion de la chaleur contenue dans un faisceau de lumière blanche venue du soleil à la réflexion de la lumière rouge contenue dans le même faisceau, et il n'y a pas d'inconvénient à le faire, parce que, d'une part, le maximum de la chaleur du spectre a lieu dans le rouge, et que, d'autre part, le pouvoir réflecteur varie d'une manière continue et régulière avec l'indice, en sorte que l'effet total observé avec la chaleur solaire complexe ne peut différer d'une manière sensible de celui que fournissent les rayons calorifiques qui accompagnent le rouge prismatique.

Au reste, des observations directes ont légitimé cette manière de voir, ainsi qu'il résulte des tableaux suivants :

CHALEUR DE L'EXTRÉMITÉ ROUGE DU SPECTRE.

Métal des miroirs.

INCIDENCES.	INTENSITÉS de la réflexion.
Chaleur polarisée parallèlement au plan d'incidence.	
30	0,65
50	0,74
70	»
72,5	0,87
Chaleur polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.	
30	0,62
50	0,577
70	»
72,5	0,426
80	0,446

CHALEUR SOLAIRE MOYENNE TRANSMISE A TRAVERS 4 CENTIMÈTRES DE VERRE.

Métal des miroirs.

INCIDENCES.	INTENSITÉS de la réflexion.
Rayons polarisés parallèlement au plan d'incidence.	
30	0,669
50	0,740
72,5	0,895
80	0,938
Rayons polarisés perpendiculairement au plan d'incidence.	
30	0,618
50	0,579
72,5	0,415
80	0,440

En étudiant la réflexion de la chaleur qui accompagnait la lumière des différentes parties de spectre bien homogènes, nous avons vu les variations de l'indice avoir précisément la même influence que dans le cas de la réflexion lumineuse. A l'appui de ces assertions nous citerons deux tableaux extraits, l'un des Mémoires de M. Jamin, l'autre des nôtres. Ces tableaux sont relatifs au cas où les rayons incidents sont normaux et non polarisés. Le parallélisme des séries est complet. Les petites différences des valeurs absolues des nombres qui les composent tiennent sans doute à de légères différences de poli.

TABLEAU I.

	INTENSITÉ de la réflexion lumineuse sur		
	Métal des miroirs.	Laiton.	Zinc.
Rayons verts	0,62	0,62	0,62
Rayons rouges	0,69	0,72	0,58

TABLEAU II.

	INTENSITÉ de la réflexion calorifique sur		
	Métal des miroirs.	Laiton.	Zinc.
Rayons verts	0,58	0,63	0,65
Rayons rouges	0,65	0,75	0,60

L'étude des tableaux précédents montre que, pour les rayons polarisés parallèlement à l'incidence, le pouvoir réflecteur croît régulièrement avec l'incidence. Si le plan de polarisation est perpendiculaire à l'incidence, les pouvoirs réflecteurs présen-

tent pour une certaine incidence un minimum très-prononcé. Dans la réflexion metallique, ce minimum répond ordinairement à des incidences voisines de 70°. De l'opposition de ces deux effets résulte que, si l'on opère avec des rayons naturels, on voit le pouvoir réflecteur varier très-peu avec l'inclinaison, au moins jusqu'aux incidences très-considérables. Pourtant, quand le minimum sur lequel nous appelions tout à l'heure l'attention est très-prononcé, il en résulte que, même pour les rayons non polarisés, on voit la réflexion subir une diminution d'intensité appréciable pour des incidences voisines de celles où a lieu le minimum de réflexion de la chaleur polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

L'effet est marqué pour le platine, l'acier et le métal des miroirs. Il est à peu près insensible pour l'argent et l'or.

CHAPITRE V.

RÉFLEXION IRRÉGULIÈRE OU DIFFUSION DE LA CHALEUR.

---

§ 1. — Expériences d'Herschell et de Melloni.

Lorsqu'un faisceau de chaleur tombe sur un miroir d'or, d'argent, d'acier ou de verre bien poli, il est en partie absorbé par le miroir. Quant à la portion qui échappe à cette absorption, elle se réfléchit régulièrement, c'est-à-dire dans le plan d'incidence et en suivant la loi de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion; ou tout au moins, la portion qui se trouve disséminée irrégulièrement n'est qu'une fraction négligeable du faisceau primitif; au contraire, les surfaces mattes peuvent n'absorber qu'une fraction assez faible de la chaleur incidente, sans paraître jouir d'un pouvoir réflecteur régulier appréciable; et les rayons qu'elles rejettent se trouvent disséminés tout autour du point d'incidence, suivant des lois qui, généralement, semblent être fort compliquées. Le fait de la diffusion de la chaleur par les substances blanches et dépolies est de ceux qui ont été connus de tous les temps; mais l'une des premières séries de

recherches systématiques faites sur ce sujet est celle d'Herschell; elle a été publiée en 1802.

Pour mettre en évidence la diffusion de la chaleur solaire, Herschell plaçait un thermomètre sensible à peu de distance d'une surface matte, sur laquelle il faisait tomber un faisceau de rayons solaires; toutes précautions étant prises pour soustraire l'appareil thermoscopique à l'action directe des rayons incidents, Herschell reconnaissait qu'il s'échauffait sous l'action des rayons renvoyés par la surface matte dans des directions toutes différentes de celle de la réflexion régulière. Il constata ainsi l'existence de la diffusion à la surface du papier, des substances organiques, des métaux dépolis, etc.

Melloni revint sur cette question dans un Mémoire imprimé aux *Annales de physique et de chimie,* année 1840, et l'on conçoit aisément que la grande sensibilité de son appareil doit être d'un fort grand secours dans des recherches sur ce sujet délicat.

Les expériences de M. Baden-Powel avaient prouvé que le rapport entre les pouvoirs absorbants du blanc de céruse et du noir de fumée diminue quand la température de la source s'élève, d'où l'on devait conclure que l'action diffusive du blanc de céruse doit s'accroître lorsque les rayons incidents proviennent de sources dont les températures sont de plus en plus élevées. L'étude directe de la diffusion a donné à Melloni une confirmation de ce fait. Voici la description de ses expériences sur ce sujet.

Le corps diffusant était un disque en carton mince, noirci d'un côté et blanc de l'autre. Sur la face blanche tombait normalement le rayonnement d'un métal chauffé à 400, du platine incandescent, d'une lampe, pris successivement pour sources de chaleur; le disque s'échauffait, et quand il avait atteint un état stationnaire, Melloni en faisait successivement rayonner les deux faces vers sa pile thermoscopique, en prenant soin d'incliner celle-ci toujours de la même quantité sur la normale au disque et de la maintenir toujours à même distance du centre de ce dernier. L'emploi de l'alidade mobile, représentée fig. 767, rendait l'expérience facile.

En ces circonstances, le rapport des déviations obtenues changeait avec la source; il restait constant, au contraire, si l'on répétait une série d'expériences semblables, mais en noircissant les deux faces du disque.

Nous extrayons les nombres suivants du mémoire de Melloni :

DÉSIGNATION des faces rayonnantes. — La face postérieure est celle qui est tournée vers la source.	SOURCES DE CHALEUR qui rayonne sur le disque.			
	Métal à 400.	Platine incandescent.	Lampe Locatelli.	Rayons de la lampe transmis par le verre.
	Déviations.	Déviations.	Déviations.	Déviations.
Disque noirci sur les deux faces.				
Face antérieure...	12,36	12,26	11,83	12,21
Face postérieure..	14,58	14,35	14,08	14,41
Disque à face antérieure blanche et à face postérieure noire.				
Face antérieure...	11,51	10,32	8,15	5,69
Face postérieure..	15,96	18,68	21,05	26,92

§ 2. — Recherches de MM. de la Provostaye et P. Desains.

Le problème général de la diffusion est évidemment le suivant : un faisceau calorifique, défini par son intensité et sa nature, tombe dans une direction déterminée sur une surface diffusante. On demande dans quelle proportion la chaleur sera réfléchie, et comment elle se trouvera distribuée autour du point d'incidence.

Nous nous sommes posé la question sous cette forme, et nous espérons l'avoir résolue dans quelques cas particuliers ; quant à la méthode que nous avons donnée, elle est générale.

Au point de vue expérimental, la principale difficulté à surmonter pour la solution de la question tient à la faiblesse même des effets qu'il s'agit de mesurer. Néanmoins, on peut le plus souvent arriver à des résultats satisfaisants en opérant de la manière suivante : on reçoit sur une lentille de 1 décimètre d'ouverture et de 2 mètres de distance focale le faisceau solaire, réfléchi par un héliostat ; non loin du foyer de la lentille se trouve un grand écran à diaphragme ; à travers l'une des ouvertures on isole un pinceau qui, un peu au delà, vient tomber sur la plaque diffusante ; ce pinceau est beaucoup trop intense pour qu'on puisse le recevoir directement sur la pile ; et pourtant,

après la diffusion, il ne donne dans chacune des directions où l'on peut placer la pile qu'une quantité de chaleur si faible qu'elle ne produirait pas d'effets sûrement mesurables. On les accroît en interposant une lentille de 25 millimètres de diamètre et de 30 millimètres de distance focale. Cette lentille rassemble sur la pile tous les rayons qu'elle reçoit, et forme sur la surface antérieure de cette pile une image de la petite portion de la plaque diffusante directement touchée par le faisceau incident. La facilité avec laquelle on peut juger si cette image est contenue en totalité sur la surface qu'elle doit chauffer donne une grande sécurité dans les expériences.

Après ces détails, on comprend sans peine comment on étudie les phénomènes dans le plan d'incidence : il n'y a pas beaucoup plus de difficulté à disposer l'appareil de manière à opérer hors de ce plan. Nous renvoyons sur ce point à un Mémoire inséré par extraits aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome XXVI.

Lois de distribution. — Influence de la nature de la substance diffusante. — Dans le cas où l'incidence est normale, la chaleur diffuse se distribue nécessairement de la même manière dans tous les azimuts. Pour trouver le rapport des quantités de chaleur renvoyées à la pile, dans deux directions différentes et quelconques, il suffit de placer successivement l'alidade mobile dans ces deux directions. L'intensité du faisceau incident restant constante, le rapport des déviations de l'aiguille donnera celui que l'on veut connaître. En opérant ainsi avec la céruse et avec l'argent en poudre, nous avons été conduits aux résultats inscrits dans les tableaux suivants :

Incidence normale.

CÉRUSE.		ARGENT EN POUDRE.	
Inclinaison de la pile sur la normale à la surface diffusante.	Intensités relatives de la chaleur reçue.	Inclinaison de la pile sur la normale à la surface diffusante.	Intensités relatives de la chaleur reçue.
25°	1	25°	1
35	0,88	35	0,68
45	0,74	45	0,47
60	0,52	60	0,23
75	0,26	75	0,10

Il est bien entendu que l'intensité désignée par 1 quand il s'agit de la céruse, n'est pas la même que quand il s'agit de l'argent.

Incidence normale. — Loi de la diffusion sur la céruse. — D'après le tableau précédent on voit que la loi de distribution de la chaleur diffuse change beaucoup avec la nature de la substance diffusante ; toutefois un assez grand nombre de poudres salines amorphes, telles que le chromate de plomb, le sulfate de baryte..., paraissent former un groupe pour lequel la chaleur diffusée se distribue de la même manière autour du point d'incidence, quoique l'intensité absolue de la diffusion puisse varier de l'une à l'autre. Pour ces substances, dans le cas de l'incidence normale, la loi de distribution est très-simple : elle consiste en ce que la quantité de chaleur diffuse reçue normalement sur un élément de surface de grandeur constante[1] est proportionnelle au cosinus de l'angle compris entre la direction de la normale à la plaque diffusante et celle de la normale à l'élément. Il suffit, pour le reconnaître, de diviser les uns par les autres les nombres qui, dans le tableau de la page 610, sont relatifs à la diffusion sur la céruse ; les rapports que l'on obtiendra seront ceux des cosinus des angles correspondants.

Au reste, le tableau suivant, dans lequel nous avons résumé l'ensemble de nos résultats, ne peut laisser aucun doute.

DIFFUSION SUR LA CÉRUSE.

Incidence normale.

ANGLE de l'axe de la pile avec la normale à la plaque.	INTENSITÉS relatives des rayonnements diffusés.	COSINUS de l'obliquité.
0	1	1
20	0,946	0,94
25	0,917	0,906
35	0,806	0,819
45	0,68	0,707
60	0,48	0,50
75	0,24	0,259

1. Dans le mode d'expérimentation indiqué plus haut, cette surface est la surface de la petite lentille.

Au premier abord, il semble impossible de déterminer directement la quantité de chaleur diffusée dans une direction normale à la plaque, mais quelques observations qui nous ont surpris la première fois que nous les avons faites nous ont conduit à la solution de la difficulté.

Lorsqu'il s'agit de substances analogues à la céruse, si le faisceau incident fait, avec la normale à la plaque, un angle qui ne dépasse pas une trentaine de degrés, c'est toujours dans la direction de la normale que la pile doit être placée pour que l'effet thermoscopique produit soit maximum; et, de plus, si l'intensité du faisceau incident est constante, la quantité de chaleur diffusée dans cette direction normale ne paraît pas varier avec l'angle d'incidence; enfin quand la pile fait un angle θ avec la normale, le rapport de la déviation que l'on observe à celle qui serait produite si l'axe de la pile était normal à la plaque, est toujours égal à $\cos \theta$; bien entendu que le faisceau incident est supposé constant en intensité et qu'il fait avec la normale un angle inférieur à 30°.

Les deux tableaux suivants prouvent l'exactitude de ces assertions :

DIFFUSION SUR LA CÉRUSE.

INCIDENCES.	ANGLE de l'axe de la pile avec la normale.	DÉVIATION.
20°	0	27
30	0	27
40	0	26,5
50	0	25,8

DIFFUSION SUR LA CÉRUSE.

INCIDENCE.	ANGLE de l'axe de la pile avec la normale.	INTENSITÉS observées.	INTENSITÉS calculées en prenant pour unité celle du faisceau renvoyé à la pile sous l'angle 25°.
25	0	1	1,08
25	+ 25	0,92	1
25	+ 45	0,68	0,74
25	+ 50	0,66	0,72
25	+ 60	0,46	0,50
25	— 50	0,66	0,72
25	— 75	0,25	0,27

Il résulte clairement des nombres inscrits dans le premier des deux tableaux précédents que, dans la condition où on les a obtenus, la déviation aurait encore été de 27° pour les incidences inférieures à 20, et par suite on comprend comment on peut arriver à connaître, même dans le cas de l'incidence normale, l'intensité de l'action produite par les rayons renvoyés normalement.

Calcul du pouvoir diffusif absolu. — Céruse. — Dans le cas de l'incidence normale, après avoir résolu le problème de la distribution de la chaleur diffuse, nous avons cherché à quelle proportion du rayon incident est égale la somme de tous les rayons diffusés.

Le problème serait résolu si l'on connaissait le nombre de ces rayons qui tombent sur la pile dans une direction déterminée. Alors, en effet, d'après les lois de la distribution, on calculerait ce que devient cette quantité de chaleur dans une autre direction quelconque, et enfin une addition de termes tous connus conduirait au résultat cherché.

Mais quand on cherche à comparer ainsi la chaleur incidente à la portion qui est diffusée dans une direction donnée, on est arrêté par l'extrême inégalité qui existe entre ces deux quantités. Si le faisceau diffusé est assez intense pour donner à l'appareil

une bonne indication, le faisceau direct est incomparablement trop fort.

Voici comment nous avons opéré.

Sans rien changer à la disposition générale de notre appareil, nous avons fait tomber sur une plaque de verre noir un faisceau assez intense pour donner après réflexion une déviation de 22°,2; puis, substituant au verre noir la plaque couverte de céruse, nous avons eu pour déviation 11°, l'angle d'incidence étant 25°. Or, d'après les lois de la réflexion, le verre sous l'angle de 25° réfléchit 0,0435 de la chaleur incidente; donc, sous cette incidence, la céruse renvoyait vers la pile $0,0435 \times \frac{11}{22,2}$ de la chaleur incidente, ou 0,0215; et, par conséquent, d'après ce que nous avons vu pages 611 et 612, la proportion de la chaleur incidente, alors renvoyée vers la pile, si on l'avait placée normalement à la plaque, eût été

$$0,0215 \times \frac{1}{\cos 25} = \frac{0,0215}{0,906}.$$

Il est à remarquer que, dans nos expériences, la chaleur incidente ayant traversé une première lentille d'épaisseur assez considérable, la chaleur réfléchie ou diffusée n'éprouvait, en traversant la deuxième, d'autres pertes sensibles que celles qui sont dues aux réflexions aux deux surfaces, et ces pertes n'altèrent pas le rapport des rayons réfléchis et diffusés.

La surface de la deuxième lentille était égale à $\pi(12,5)^2$ ou 490 millimètres carrés, et la distance de son centre au centre de la portion de la plaque frappée par le rayon incident était $73^{mm},5$.

On déduit immédiatement des nombres précédents l'expression de la quantité de chaleur renvoyée par diffusion, sous l'angle θ, vers 1 millimètre carré d'une demi-sphère ayant son centre en O et un rayon $73^{mm},5$, et cette expression est

$$\frac{2,15}{\pi(12,5)^2\, 0,906} \cos\theta.$$

Pour déduire de cette expression la quantité totale de chaleur reçue par la demi-sphère de rayon $73^{mm},5$, on conçoit cette demi-sphère divisée par des plans parallèles à la plaque diffusante en zones élémentaires, dont l'aire exprimée en millimètres carrés est $2\pi\,(73,5)^2 \sin\theta\, d\theta$.

Chacune d'elles reçoit une quantité de chaleur égale à

$$2\pi(73,5)^2 \sin\theta\, d\theta \times \frac{2,15\cos\theta}{\pi(12,5)^2\, 0,906}$$

ou

$$2.\frac{2,15\,(73,5)^2\cos\theta\sin\theta\, d\theta}{0,906\,(12,5)^2},$$

et la somme de toutes ces quantités est

$$2\times 82\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = 82.$$

Chromate de plomb. — La loi de la diffusion sur le chromate de plomb est la même que sur la céruse; seulement l'intensité absolue du phénomène est moindre. La proportion d'un faisceau incident normal, qui se trouve rejeté dans une direction déterminée par le chromate de plomb, n'est que les 0,8 de celle que la céruse renverrait dans la même direction; par suite, la diffusion totale est aussi les 0,8 de celle qui a lieu à la surface de la céruse, comme nous l'avons déjà indiqué.

Ce que nous disons de la céruse, du chromate de plomb, s'applique à beaucoup d'autres substances analogues.

Poudre d'argent. — Il n'en est plus de même des métaux mats ou des poudres métalliques; mais, quelque compliquée que soit pour ces corps la loi de la distribution, une fois que l'on connaît les résultats auxquels elle conduit pour un nombre suffisant de directions, on peut calculer encore la somme totale des rayons diffusés. Pour le faire dans le cas de l'argent en poudre, nous avons divisé la demi-sphère sur laquelle se répand la chaleur diffusée en neuf zones de 10 degrés d'ouverture, la première s'étendant de 0 à 10 degrés, la seconde de 10 à 20, et ainsi de suite. Nous avons calculé ce que chacune recevrait si la substance diffusante était la céruse; soient A, B, C, ces quantités. Ensuite nous avons fait tomber un même faisceau calorifique normalement sur l'argent et la céruse, et déterminé les effets produits sur la pile à 5, 15, 25... degrés de la normale. Soient α, β, γ, les rapports des effets produits par l'argent et la céruse, sous ces différentes inclinaisons. $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, étaient les quantités de chaleur renvoyées par l'argent vers les différentes zones successives, et leur somme était égale à la quantité totale de chaleur diffusée par l'argent. Cette somme, dans nos expériences, s'est trouvée égale à 76, un

peu moins forte par conséquent que dans le cas de la céruse. Ainsi, dans le cas de l'incidence normale, la chaleur solaire, transmise à travers une lentille de verre un peu épaisse, se diffuse sur la céruse, le chromate de plomb et la poudre d'argent dans les proportions suivantes :

NOMS DES SUBSTANCES.	INTENSITÉ de la diffusion.
Céruse...........................	0,82
Chromate de plomb.....................	0,66
Poudre d'argent........................	0,76

Dans ce que nous venons de dire relativement à la manière dont on peut calculer la quantité totale de chaleur diffusée sur la poudre d'argent, nous avons supposé que l'on pouvait observer l'effet produit sur la pile placée à 5 degrés de la normale à la plaque; le faisceau incident étant lui-même perpendiculaire à cette plaque, l'expérience directe n'est pas possible, mais la difficulté peut être aisément levée, parce que la poudre d'argent, se rapprochant en cela des corps polis, renvoie toujours la même quantité de chaleur dans la direction où se fait la réflexion régulière, pourvu que cette direction s'écarte peu de la normale.

INCIDENCE.	ANGLE de l'axe de la pile avec la normale.	DÉVIATION.
12,5	12,5	6
25	25	6

D'où l'on peut conclure que si l'incidence était normale on aurait encore la même déviation.

Cas général. — Incidences obliques. — Lorsqu'au lieu de se borner à étudier la diffusion dans le plan d'incidence, on dispose l'expérience de manière à pouvoir opérer non-seulement sous toutes les incidences, mais aussi dans tous les azimuts possibles, on reconnaît toujours que sur la céruse et ses analogues la diffusion ne commence à acquérir un maximum prononcé dans la direction de la réflexion régulière que sous de très-fortes incidences. Au contraire, pour les métaux dépolis et dont la surface est bien mate, on trouve que sous toutes les incidences la proportion de la chaleur diffusée autour de la direction de la réflexion régulière décroît très-rapidement quand on s'éloigne de cette dernière.

Les poudres métalliques sont intermédiaires, mais en se rapprochant beaucoup des métaux à surface matte. Nous ajouterons que, d'après nos recherches, le noir de fumée ne réfléchit ni

régulièrement ni irrégulièrement aucune proportion de chaleur appréciable aux instruments les plus délicats. Toutefois, nous ne prétendons pas que l'absorption soit absolument complète, par la raison qu'un rayon solaire rend visibles les points où il est reçu sur les noirs les mieux préparés; mais on peut la regarder comme telle, tant est petite la portion de chaleur qui lui échappe.

CHAPITRE VI.

POUVOIRS ABSORBANTS

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains.

§ 1. — DÉTERMINATION DU POUVOIR ABSORBANT PAR L'ÉTUDE DE LA RÉFLEXION OU DE LA DIFFUSION.

Lorsqu'un faisceau de rayons calorifiques tombe sur un corps, une portion des rayons qui le composent est réfléchie à la surface d'entrée, une autre est transmise directement sous forme rayonnante lorsque le corps est diathermane. Enfin, le reste est absorbé et produit différents effets, tels que des élévations de température, des dilatations, des changements d'état. Le rapport qui existe entre la quantité de chaleur ainsi absorbée et la chaleur incidente totale est le pouvoir absorbant du corps pour le rayon incident.

D'après cette définition il est évident qu'en suivant dans l'étude de la réflexion et de la diffusion la marche à laquelle nous nous sommes arrêtés, on peut, dans un grand nombre de cas, arriver à la solution complète du problème de l'absorption calorifique par les corps athermanes.

Pouvoirs absorbants des corps polis. — Supposons d'abord qu'il s'agisse de substances athermanes bien polies et sensiblement dénuées de pouvoir diffusif. Elles réfléchissent régulièrement toute la chaleur qu'elles n'absorbent pas; et dès lors, pour obtenir leur pouvoir absorbant dans chacun des cas qui peuvent se présenter, il suffit de retrancher de l'unité la valeur que possède leur pouvoir réflecteur dans ce cas particulier.

En opérant ainsi on déduit de nos recherches les résultats inscrits au tableau suivant :

POUVOIRS ABSORBANTS DU VERRE ET DES MÉTAUX POLIS POUR LA CHALEUR VENUE DE SOURCES DIFFÉRENTES SOUS UNE INCIDENCE VOISINE DE LA NORMALE.

NOMS des MIROIRS.	CHALEUR					
	Solaire.	De la lampe à modérateur.	De la lampe Locatelli.	De la lampe à alcool salé.	D'une lame de cuivre noircie à une température inférieure à 400.	D'une lame de cuivre noircie à 180.
Verre............	0,965	0,955	»	»	»	0,90
Acier............	0,42	0,34	0,175	0,12	»	»
Métal des miroirs..	0,34	0,30	0,145	»	»	»
Platine,.........	0,39	0,30	0,17	0,14	0,105	»
Zinc......... ...	»	0,32	0,19	»	»	»
Étain..	»	0,32	0,15	»	»	»
Laiton...........	»	0,16	0,07	0,06	0,055	»
Or...............	0,13	»	0,045	»	0,045	»
Argent plaqué très-brillant.........	0,08	0,035	0,025	»	»	»

Pouvoirs absorbants des corps mats. — Si les substances athermanes dont on veut déterminer le pouvoir absorbant jouissent de la propriété de diffuser la chaleur, et si la température de la source est extrêmement élevée, on déterminera encore par les procédés que nous avons donnés le rapport qui existe entre la quantité totale de chaleur disséminée autour du point d'incidence et celle qui composait le faisceau incident total. On retranchera ce rapport de l'unité, et le reste sera le pouvoir absorbant cherché.

En opérant ainsi, nous avons trouvé que pour la chaleur solaire transmise à travers une lentille les pouvoirs absorbants de la céruse, du chromate de plomb et de la poudre d'argent ont, dans le cas de l'incidence normale, les valeurs suivantes :

CHALEUR SOLAIRE.

Incidence normale.

NOMS DES SUBSTANCES.	POUVOIRS absorbants.
Céruse	0,18
Chromate de plomb	0,34
Poudre d'argent	0,24

§ 2. Méthode générale.

D'après ce premier ensemble de résultats on voit que, conformément à l'assertion de la page précédente, beaucoup de questions relatives à l'absorption de la chaleur par les corps athermanes peuvent se résoudre à l'aide de déterminations de pouvoirs réflecteurs ou diffusifs. Il faut, toutefois, remarquer que la détermination d'un pouvoir diffusif, lorsqu'elle est possible, est une opération longue et pénible, et beaucoup plus sujette à erreur que celle d'un simple pouvoir réflecteur. Nous avons donc cherché une méthode qui permît de mesurer directement le pouvoir absorbant des corps pour la chaleur, et nous allons la décrire sous la forme à laquelle nous nous sommes arrêtés; nous nous attacherons à faire voir comment cette méthode se lie aux autres questions que nous avons déjà posées et résolues, touchant les échanges de chaleur entre différents corps placés dans une enceinte à température invariable.

Exposition théorique. — Supposons que dans une enceinte noircie à température t on place une source dénuée de tout pouvoir réflecteur et un thermomètre ayant un pouvoir émissif quelconque. Soit $\omega f(T)$ la quantité totale de chaleur qui, dans l'unité de temps, vient de la source au thermomètre, a le pouvoir absorbant de celui-ci pour la chaleur de la source, e son pouvoir émissif aux températures basses, et a' son pouvoir absorbant pour les rayons qui cheminent dans l'enceinte à la température de l'expérience. Sous l'influence du rayonnement de la source, le thermomètre s'échauffera et atteindra une température stationnaire θ, supé-

rieure à celle de l'enceinte; soit alors $ef(\theta)$ la quantité totale de chaleur qu'il émet dans l'unité de temps, et $m(\theta - t)$ ce qu'il perd par le contact de l'air dans le même intervalle; l'équation d'équilibre sera :

$$\omega a f(T) + (1 - \omega) a' f(t) = ef(\theta) + m(\theta - t),$$

ou bien :

$$a[f(T) - f(t)] + (a - a')f(t) = \frac{1}{\omega}[ef(\theta) - a'f(t) + m(\theta - t)].$$

Lorsque le terme $(a - a')f(t)$ sera négligeable par rapport à $a[f(T) - f(t)]$, cette équation se réduira à

$$a[f(T) - f(t)] = \frac{1}{\omega}[ef(\theta) - a'f(t) + m(\theta - t)].$$

Si l'on vient à changer l'état de la surface du thermomètre, a, θ, e, a', m pourront changer, et l'équation deviendra :

$$a_1[f(T) - f(t)] = \frac{1}{\omega}[e_1 f(\theta_1) - a'_1 f(t) + m_1(\theta_1 - t)].$$

Les premiers membres de ces deux équations sont entre eux comme a et a_1. Le rapport des seconds membres est celui des vitesses de refroidissement du thermomètre dans ses deux états de surface, et aux températures θ et θ_1; si donc l'on appelle V et V_1 ces vitesses, on aura :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{V}{V_1}.$$

D'après cela, pour déterminer le rapport des pouvoirs absorbants de deux substances pour la chaleur d'une source déterminée, on expose dans des conditions identiques un même thermomètre, successivement recouvert des substances à essayer, à l'action de cette source; on détermine les excès de température $(\theta - t)$ et $(\theta_1 - t)$ qu'il atteint dans les deux cas, et l'on prend le rapport des vitesses de refroidissement V et V_1 qui répondent à ces excès.

Marche des expériences. — Nous avons déterminé, par la méthode que nous venons de faire connaître, les rapports des pouvoirs absorbants des corps à celui du noir de fumée, et nous

pensons que les résultats auxquels nous sommes arrivés peuvent être regardés comme les valeurs numériques des pouvoirs absorbants absolus. Le noir est en effet complétement dépourvu de pouvoir réflecteur régulier, et, d'après nos expériences, il ne paraît diffuser qu'une quantité de chaleur tout à fait insensible, quelle que soit la nature du rayon incident.

Le thermomètre dont nous faisions usage était toujours placé dans une position bien déterminée, un peu au delà du foyer d'une lentille qui concentrait sur lui les rayons dont on étudiait l'absorption ; il était très-sensible, et ses indications étaient lues, à distance, à l'aide d'une lunette mobile le long d'une règle verticale. On pouvait donc déterminer très-sûrement et l'excès final de température qu'il prenait sous l'action des rayons incidents, et la vitesse avec laquelle il se refroidissait pour cet excès de température lorsqu'on venait à supprimer l'action de la source.

Nous avons pris successivement pour source de chaleur : 1° le soleil ; 2° une lampe à modérateur. Voici les nombres qui résultent de nos déterminations :

TABLEAU DES POUVOIRS ABSORBANTS DÉTERMINÉS DIRECTEMENT.

CHALEUR SOLAIRE TOTALE.		CHALEUR DE LA LAMPE.	
Noms des substances.	Pouvoirs absorbants.	Noms des substances.	Pouvoirs absorbants.
Blanc de céruse.......	0,19	Noir de platine.......	1
		Cinabre.............	0,285
Or battu en feuilles...	0,13	Blanc de céruse.......	0,21
		Argent en poudre.....	0,21
Argent en feuilles.....	0,075	Or en feuilles.........	0,04

Pour pouvoir préciser rigoureusement la direction des rayons incidents à laquelle se rapportent les pouvoirs absorbants déterminés par cette méthode, il faudrait substituer un thermomètre plat au thermomètre sphérique que nous avons employé. Nous

avons, en effet, fait construire des thermomètres de cette espèce. On trouvera dans notre mémoire la discussion de quelques-uns des résultats qu'ils nous ont fournis.

Discussion du procédé de Leslie. Cas où il est applicable. — Les raisonnements qui établissent la légitimité de la méthode à l'aide de laquelle nous avons déterminé les pouvoirs absorbants des corps pour la chaleur montrent en quoi est fautif le procédé adopté par Leslie dans l'étude de l'absorption.

Leslie suppose que le rapport désigné aux pages précédentes par $\frac{a}{a_1}$, au lieu d'être égal à celui des vitesses $\frac{V}{V_1}$, est égal à celui des excès $\frac{\theta - t}{\theta_1 - t}$, ce qui ne serait vrai que si l'on avait $e = a'$, $e_1 = a'_1$, $e = e_1$, $m = m_1$. En général, la condition $e = e_1$ n'est pas remplie; c'est pour cela que les méthodes citées sont le plus souvent inexactes. Une expérience facile à répéter montre à quelles erreurs pourrait conduire ce procédé ou ceux qui n'en sont que la reproduction.

Si l'on expose successivement dans l'air et dans un vide très-approché, au rayonnement d'une même source incandescente, un thermomètre différentiel ayant l'une de ses boules dorées, l'autre couverte de blanc de céruse, on voit l'index indiquer, par sa position finale, que la boule revêtue d'une feuille d'or s'échauffe plus que l'autre dans le vide, et moins qu'elle, au contraire, dans l'air.

Le thermoscope qui nous servait dans ces expériences avait ses deux boules voisines l'une de l'autre, et séparées par un petit écran métallique noirci qui interceptait leur rayonnement réciproque. Cet appareil, placé sur la platine d'une machine pneumatique, était recouvert d'une cloche à robinet. On commençait par faire le vide, et l'on attendait que l'équilibre de température fût rétabli. Quand les deux extrémités de la colonne liquide étaient bien fixes, on déterminait leur position, puis on faisait tomber sur le thermoscope les rayons d'une forte lampe, en s'arrangeant de manière que les boules fussent symétriquement placées par rapport à l'axe du faisceau. Lorsque l'état final était atteint, on rendait l'air en ouvrant le robinet de la cloche, et l'on procédait à la deuxième observation sans changer aucunement les positions des différentes parties de l'appareil.

Les différences dont nous signalons ici l'existence sont considérables, et il est vraiment curieux de voir un corps qui réfléchit 0,96 de la chaleur incidente s'échauffer dans le vide plus que le blanc de céruse, dont le pouvoir émissif, jus-

qu'à 150 degrés au moins, est égal à celui du noir de fumée.

Le procédé proposé par Leslie pour la détermination des pouvoirs absorbants n'est rigoureusement applicable qu'aux corps dont les pouvoirs émissifs sont, aux basses températures, égaux à celui du noir de fumée. Dans ce cas, en effet, on a $e = e_1$ par hypothèse ; on a, en outre, $e = a'$, $e_1 = a'_1$, d'après le principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants ; et enfin, $m = m_1$, ainsi qu'il résulte d'expériences de Dulong et Petit, que nous ferons ultérieurement connaître. Les objections de la page précédente ne sont donc plus ici applicables. C'est précisément dans ces conditions d'exactitude que Baden-Powel s'était placé lorsqu'il a établi, en employant la méthode de Leslie, que le rapport des pouvoirs absorbants du noir de fumée et de la céruse varie avec la température. Quant à la manière d'opérer, on peut la modifier ainsi qu'il suit : on prend un thermomètre plat dont une des faces est noircie, l'autre couverte de la substance à essayer ; on fait tomber successivement et sous la même incidence, un même rayonnement sur chacune des deux faces, et l'on mesure les excès finals de température que le thermomètre atteint dans ces deux cas : le rapport de ces excès est celui des pouvoirs que l'on compare, car il est égal à celui des vitesses de refroidissement correspondantes.

Confirmation expérimentale du principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants. — Les nombres consignés au tableau de la page 621 confirment d'une manière complète les résultats des expériences que nous avons faites pour déterminer directement le pouvoir diffusif des différentes substances, car ils indiquent comme eux que la chaleur solaire est absorbée par la céruse dans la proportion de 0,18 ; mais on n'y peut chercher aucune confirmation du principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants.

Ce principe se trouve au contraire complétement vérifié par nos mesures relatives à l'absorption que la chaleur de basse température éprouve à son incidence sur les corps polis. En effet, des déterminations directes nous ont montré que l'or absorbe environ 0,045 de la chaleur émise, soit par une lampe de Locatelli, soit par une lame de cuivre noircie et chauffée à une température bien inférieure à celle de l'incandescence ; on peut, d'après cela, admettre que ce chiffre 0,045 mesure aussi le pouvoir absorbant de l'or pour la chaleur venue de source dont les températures seraient comprises entre 100 et 200. Or, entre ces limites, le pouvoir émissif de l'or déterminé directement a été trouvé égal à 0,045.

La comparaison des pouvoirs émissifs et absorbants de l'argent conduirait à une conséquence identique.

Pour le platine, nos expériences directes, souvent répétées, nous ont montré qu'aux températures voisines de 200°, ces deux pouvoirs ont la valeur commune 0,105, et ces résultats sont d'autant plus probants que les pouvoirs émissifs et absorbants n'ont plus l'extrême petitesse de ceux de l'or et de l'argent.

Mais ce sont surtout les expériences relatives au verre qui établissent nettement le principe dont il s'agit.

Nous avons mesuré directement le pouvoir réflecteur du verre pour la chaleur venue d'une lame noircie à 150°, d'abord sous une incidence presque normale, puis sous les incidences de 70 et 75.

Ces trois pouvoirs réflecteurs ont été trouvés égaux à 0,10 0,25 et 0,32.

Les pouvoirs absorbants correspondants sont donc 0,90, 0,75, 0,68.

Or, ces nombres sont identiques aux valeurs que nos expériences antérieures avaient assignées aux pouvoirs émissifs du verre sous ces mêmes inclinaisons.

CHAPITRE VII.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR RAYONNANTE A TRAVERS LES MILIEUX DIATHERMANES.

§ 1. — Recherches de Melloni.

On a vu, page 564, comment les expériences d'Herschell avaient établi que la chaleur du soleil est formée de rayons distincts les uns des autres, soit par leur réfrangibilité, soit par la facilité avec laquelle ils se transmettent à travers divers écrans ; et d'autre part, les recherches exécutées successivement par Lambert, Prevost et Delaroche avaient montré que cette même complexité de composition se retrouve dans les faisceaux de chaleur venus de sources terrestres. Ces principes sont fondamentaux

dans la théorie de la chaleur rayonnante. Melloni en a donné la confirmation la plus complète dans la longue et importante série de recherches qu'il exécuta à l'aide de son thermo-multiplicateur.

Dans le premier de ses travaux sur ce sujet, Melloni analysa au point de vue de sa composition calorifique le spectre solaire fourni par un prisme de crown. Il vit que de part et d'autre du rouge les actions thermoscopiques produites sur la pile par des faisceaux de même section décroissent régulièrement ; mais il constata en même temps qu'il existe de grandes différences dans les propriétés des rayons qui forment deux bandes calorifiques symétriquement situées par rapport au rouge. La chaleur qui existe dans le violet est fort transmissible à travers l'eau ; celle de la bande obscure correspondante est au contraire complétement arrêtée par ce liquide.

Ces faits résultent du tableau suivant :

BANDES CALORIFIQUES du spectre solaire.	INDICATIONS du thermo-multiplicateur.		DIFFÉRENCES.	PERTES en centièmes de l'effet initial.
	Avant l'interposition d'une auge pleine d'eau.	Après l'interposition de l'auge.		
Violet	2	2	0	0,00
Indigo	5	4,5	0,5	0,10
Bleu.............	9	8	1	0,11
Vert.............	12	10	2	0,17
Jaune............	25	20	5	0,20
Orangé	29	21	8	0,27
Rouge	32	20	12	0,37
1re bande obscure.	29	14	15	0,52
2e — .	25	9	16	0,64
3e — .	12	3	9	0,75
4e — .	9	1	8	0,88
5e — .	5	0,5	4,5	0,90
6e — .	2	0	2	1,00

Les nombres de la dernière colonne ne donnent pas sans doute une rigoureuse mesure de l'absorption exercée sur les divers rayons prismatiques par la couche d'eau contenue dans l'auge ;

mais ils confirment pleinement le principe à l'appui duquel Melloni les a produits.

Ce premier fait établi, Melloni apporta un nouvel et très-remarquable ensemble de preuves à l'appui de la seconde proposition qui résultait des expériences résumées pages 564 et 576, à savoir que la chaleur des sources terrestres se trouve, elle aussi, formée de plusieurs groupes de rayons distincts les uns des autres par des aptitudes inégales à être transmis à travers un même milieu diathermane. Pour mettre cette vérité dans tout son jour, il vérifia d'abord que le rayonnement d'une source calorifique, en se transmettant à travers un écran d'une substance quelconque, devient par cela même plus transmissible à travers un deuxième écran de même substance et de même épaisseur, et ensuite que la proportion dans laquelle un faisceau calorifique se trouve réduit par le fait de l'absorption qu'il éprouve, en traversant une lame diathermane, dépend de la température de la source qui l'émet et de la nature des écrans qu'il a déjà traversés.

Les tableaux suivants permettent de juger avec quelle précision Melloni a vérifié l'exactitude de ces énoncés.

Dans le premier de ces tableaux nous indiquons les effets obtenus en transmettant successivement un même rayonnement calorifique à travers 1, 2, 3 ou 4 lames tirées d'une même glace et ayant une épaisseur commune de $2^{mm},68$.

La déviation produite par le rayonnement direct était 30°, et il correspondait à une force échauffante de 35°,3.

TABLEAU I.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR D'UNE LAMPE A TRAVERS UNE OU PLUSIEURS LAMES DE GLACE SUPERPOSÉES.

Nombre des lames.	Déviations du galvanomètre.	Rayons transmis.	Rayons arrêtés.
1	21° 62	619	381
2	18 75	531	469
3	17 10	484	515
4	15 90	450	540

On déduit de ce tableau que les fractions

0.381 0.142 0.087 0.048.

mesurent les pertes respectives que souffrent les rayons en tra-

versant successivement les quatre lames de verre. Bien entendu que ces pertes ne sont pas rapportées à la quantité initiale, mais au nombre de rayons qui parviennent successivement à chaque écran. (Mel., *Ann.*, t. 53, série 2.) La manière dont elles décroissent montre évidemment que la transmissibilité de la chaleur à travers le verre s'accroît avec l'épaisseur déjà traversée.

Les nombres des deux tableaux suivants sont relatifs à la transmission à travers des écrans d'un même verre et d'épaisseur variable, ou encore à travers des couches d'un même liquide et d'épaisseurs croissantes.

TABLEAU II.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR A TRAVERS DES ÉCRANS DE VERRE D'ÉPAISSEURS VARIABLES.

Épaisseur des écrans en millimètres.	Déviations observées.	Forces correspondantes.	Rayons transmis.	Rayons arrêtés.
2.068	21.625	21.850	619	381
4.136	20.312	20.345	576	424
6.202	19.687	19.687	558	442
8.272	19.375	19.375	549	451

TABLEAU III.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR A TRAVERS DES COUCHES D'HUILE DE COLZA D'ÉPAISSEURS VARIABLES. (L'huile est renfermée dans des auges à parois de glace.)

Épaisseur de la couche.	Rayons transmis.	Rayons arrêtés.
6.767	443	557
13.555	363	637
27.069	294	706
54.139	270	730
71.209	255	745
108.279	244	756

Tous les nombres que nous venons de citer sont tels que Melloni les donne. Les détails dans lesquels nous entrerons plus loin permettraient d'en déduire l'absorption qui a lieu dans chaque millimètre du milieu traversé, sans négliger l'influence de la réflexion aux deux surfaces ; mais il n'en résulterait rien de plus pour la vérification des propositions énoncées.

Enfin, les deux derniers tableaux que nous allons reproduire mettent en évidence l'influence qu'exercent sur la nature de la chaleur, et la température de la source qui l'émet, et la nature des écrans qu'elle a traversés.

TABLEAU IV.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR VENUE DE DIFFÉRENTES SOURCES A TRAVERS DES PLAQUES DE MÊME ÉPAISSEUR, MAIS DE NATURES DIFFÉRENTES.

L'intensité du rayonnement incident est représentée par 100.

NOMS DES SUBSTANCES ou écrans diathermanes. Épaisseur, 2mm,6.	DÉSIGNATION DES SOURCES.			
	Lampe Locatelli.	Platine incandescent	Cuivre noirci à 400.	Cuivre noirci à 100.
	Nombre des rayons transmis.			
Sel gemme incolore.	92	92	92	92
Fluorure de calcium..	78	69	42	33
Spath d'Islande...........	39	28	6	0
Carbonate de plomb.......	32	23	4	0
Tourmaline verte.........	18	16	3	0
Gomme commune..........	18	3	0	0
Sulfate de chaux....... ..	14	5	0	0
Alun.................. ..	9	2	0	0
Glace très-pure (eau glacée).	6	0	0	0
Cristal de roche incolore...	38	28	6	0
Cristal de roche enfumé....	37	28	6	0
Verre à glace............	39	24	6	0

TABLEAU V.

TRANSMISSION DE LA CHALEUR VENUE D'UNE LAMPE, ET MODIFIÉE PAR SON PASSAGE A TRAVERS UNE LAME DIATHERMANE.

L'intensité du rayonnement qui se présente à la transmission est pris égal à 100.

NOMS DES SUBSTANCES ou écrans diathermanes. Épaisseur, $2^{mm},6$.	DÉSIGNATION des lames qui modifient la nature des rayons incidents. Alun. Épaisseur, $2^{mm},6$.	Chaux sulfatée. Épaisseur, $2^{mm},6$.	Verre noir. Épaisseur, $1^{mm},8$.
	Nombre des rayons transmis.		
Sel gemme..........	92	92	92
Spath d'Islande... ...	91	89	55
Cristal de roche......	91	85	54
Fluorure de calcium...	90	91	91
Verre...............	90	85	55
Alun.............. ..	90	47	0,5
Sulfate de chaux......	59	54	15
Tourmaline verte.....	18	1	30
Verre noir...........	0,5	48	52

Il est à peine nécessaire d'insister pour montrer comment les lois fondamentales confirmées par ces séries de nombres prouvent que la chaleur est généralement hétérogène, même dans le cas où elle vient d'une source non incandescente.

Il est clair en effet que si la chaleur d'une source quelconque est formée de rayons inégalement transmissibles à travers une substance donnée, l'action d'un premier écran formé de cette substance se fera sentir plus énergiquement sur les rayons qui sont le plus aisément absorbables par la substance qui forme l'écran. La proportion de ces rayons sera donc moins forte dans le faisceau émergent que dans le faisceau incident. En d'autres termes, le passage à travers un premier écran modifiera la composition de la chaleur complexe sur laquelle on opère; il rendra la cha-

leur émergente moins absorbable à travers un second écran de même espèce que le premier. Mais on conçoit aussi que la modification produite pourrait la rendre moins transmissible que la chaleur incidente à travers un écran d'une nature différente. C'est ainsi qu'un faisceau de lumière blanche, en tombant sur un verre rouge, éprouve une modification qui, tout en lui faisant perdre une grande partie de son intensité, le rend proportionnellement plus transmissible à travers un autre verre rouge que ne l'était la lumière incidente. Mais ce faisceau transmis par le verre rouge est presque totalement arrêté par un verre bleu.

Enfin, pour expliquer comment il se fait que la chaleur venue de sources différentes se transmet en proportions différentes à travers un même écran, il suffit d'admettre qu'avec la nature ou la température de la source change la composition de la chaleur qu'elle émet.

Propriétés du sel gemme. — Le verre, l'eau, et en général les substances transparentes citées dans les tableaux de la page 628, absorbent, même sous une faible épaisseur, une proportion notable d'un faisceau de chaleur solaire naturelle. Elles se comportent donc par rapport à la chaleur comme les verres colorés par rapport à la lumière. Une des plus belles découvertes de M. Melloni est d'avoir trouvé une substance qui est pour la chaleur ce que sont pour la lumière les verres blancs et en général les substances transparentes.

Le sel gemme laisse passer en proportions sensiblement égales les rayons calorifiques les plus différents, ou, si l'on aime mieux, des rayons calorifiques de toutes longueurs d'onde, et de plus l'absorption qu'il exerce sur chacun d'eux est très-faible.

Le savant italien admettait même que le sel gemme bien pur transmet également, quelle que soit son épaisseur, les 0,923 de la chaleur incidente, et pour lui la différence d'intensité entre le faisceau incident et le faisceau transmis s'explique uniquement par les réflexions sur les deux faces.

Observations de M. de La Provostaye et P. Desains. — Nous pensons que sur ce point Melloni avait été trop loin. Nous avons étudié avec soin plus de dix échantillons de sel gemme différents. Nous avons multiplié nos mesures, et toutes nos observations nous ont conduits à ce résultat que le sel gemme, tout en laissant passer très-aisément à travers son intérieur la chaleur de toutes sortes de sources, en absorbe néanmoins une certaine quantité, et l'absorption pour les rayons émanés d'un cube à 100 est plus forte proportionnellement que celle qui s'exerce sur les rayons émanés des lampes et surtout du soleil. Ainsi, dans une de nos

séries d'expériences, une belle lame de sel gemme d'environ 6 millimètres d'épaisseur laissait passer 0,91 de la chaleur émanée d'une lampe, et 0,83 seulement de celle qui venait d'un cube à 100.

§ 2. — Expression algébrique des lois de la transmission de la lumière et de la chaleur rayonnante a travers les corps diaphanes ou diathermanes.

Dans tout ce qui précède nous avons laissé indéterminée la loi suivant laquelle l'intensité d'un rayon calorifique homogène, transmis dans un milieu, varie avec la longueur du chemin qu'il a parcouru dans ce milieu. Aucune des séries de nombres citées dans ce chapitre ne peut conduire à la solution de la question. Pour y arriver il faut opérer sur des rayons bien homogènes, c'est-à-dire de longueur d'onde déterminée, et il faut tenir compte des réflexions en nombre indéfini qui se font entre les deux faces de la lame.

Soit 1 l'intensité du faisceau incident, R le pouvoir réflecteur de la lame pour la chaleur qui le compose. Nous admettrons que la valeur de R est à l'émergence la même qu'à l'incidence; nous admettrons en outre qu'un faisceau quelconque de cette chaleur se trouve toujours réduit dans la proportion constante de 1 à m en parcourant dans cette lame un trajet égal à celui qu'il y parcourt réellement pour aller d'une face à l'autre soit directement, soit par réflexion. Si l'incidence est normale, ce trajet est égal à l'épaisseur e de la lame; si l'incidence est égale à i, l'épaisseur à laquelle m se rapporte est $\frac{e}{\cos i}$.

En ces circonstances le rayon émergent T est la somme des termes suivants :

$$\begin{aligned} & (1-R)\, m\, (1-R) && = (1-R)^2 m \\ + & (1-R)\, mRmRm\, (1-R) && = (1-R)^2 m R^2 m^2 \\ + & (1-R)\, m\, m^2R^2\, R^2m^2\, (1-R) && = (1-R)^2 m R^4 m^4 \\ + & \ldots \\ = & (1-R)^2 m\, [1 + R^2m^2 + R^4m^4 \ldots] \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$T = (1-R)^2 m \frac{1}{1-R^2m^2}.$$

Lorsque l'incidence est normale ou voisine de la normale, le faisceau émergent peut être reçu tout entier dans la pile, aussi bien que le faisceau direct. Si donc on a déterminé R, on arrive

sans peine à calculer m. Que l'on opère maintenant avec des plaques d'épaisseurs différentes, mais toujours de la même substance, on obtiendra d'autres valeurs, m', m'', d'où l'on déduira les proportions dans lesquelles le faisceau incident se trouve réduit en traversant des épaisseurs e, e', e'' de la substance éprouvée. On a depuis longtemps admis que l'expression générale de m devait être une exponentielle de la forme a^e, a étant une constante dépendant de la nature du rayon et de celle du milieu, et e étant l'épaisseur de ce milieu ; et dans le travail dont nous avons déjà parlé page 461, M. F. Bernard a montré que cette manière de voir représente bien les phénomènes de l'absorption lumineuse.

Recherches de MM. Jamin et Masson. — Quant au problème qui nous occupe spécialement ici, celui de l'absorption des rayons calorifiques homogènes, il a été traité par MM. Jamin et Masson. Les résultats de leurs recherches ont été que les rayons de chaleur et les rayons de lumière de même indice sont absorbés en même proportion en traversant un même milieu diaphane.

Nous extrayons du traité de M. Jamin les nombres qui établissent la vérité de cette proposition.

ÉTUDE COMPARÉE DE LA TRANSMISSION DE LA LUMIÈRE ET DE LA CHALEUR DE MÊME INDICE.

SUBSTANCES.	RADIATIONS calorifiques et lumineuses étudiées.	PROPORTIONS TRANSMISES	
		de lumière.	de chaleur.
Verre vert...	Rouge........	0,000	0,000
	Orangé.......	0,044	0,040
	Jaune........	0,080	0,093
	Vert.........	0,217	0,209
Verre bleu...	Rouge........	0,390	0,375
	Orangé.......	0,000	0,000
	Jaune.........	0,008	0,001
	Vert..........	0,004	0,002
Verre violet..	Rouge........	0,132	0,131
	Orangé.......	0,455	0,461
	Jaune........	0,025	0,032
	Vert..........	0,000	0,000
	Violet.........	0,045	0,046

D'après cela, si l'on a un faisceau complexe formé d'une série de rayons d'intensités I, I', I'', et pour lesquels les valeurs de R et de a soient distinctes, l'intensité de la portion de ce faisceau qui sera transmise à travers une épaisseur e d'un milieu auquel R et a se rapportent, aura pour expression :

$$\Sigma\, \mathrm{I}\, \frac{(1-\mathrm{R})^2 a^e}{1-\mathrm{R}^2 a^{2e}}.$$

Dans la pratique il est aisé de voir que la formule à trois termes

$$(0.96)^2 \left\{ \mathrm{I}a^e + \mathrm{I}'a'^e + \mathrm{I}''a''^e \right\}$$

suffit à représenter toutes les expériences de Melloni sur l'absorption. Mais cette formule n'est plus qu'une représentation empirique du phénomène.

Transmission de la chaleur à travers les corps chauffés à 100°. — La proportion dans laquelle un faisceau de chaleur d'espèce déterminée se trouve absorbé en traversant une lame d'épaisseur et de nature données dépend de cette lame ; ainsi par exemple, une modification moléculaire qui rendrait la lame opaque changerait les conditions de la transmission. Les variations de température dans les limites où elles ne produisent pas d'effets semblables ont-elles ou non de l'influence sur la faculté absorbante de la lame. Des observations que nous avons faites sur ce sujet nous ont

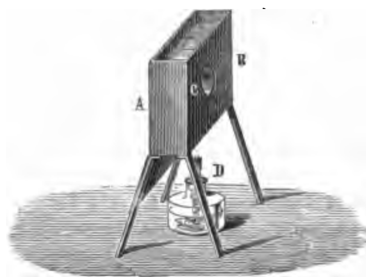


Fig. 773.

conduits à admettre que, pour le verre, l'eau et le sel gemme, cette influence est sensiblement nulle entre 0 et 100 degrés. L'appareil que nous avons employé pour étudier la transmission à travers les substances solides chauffées est représenté fig. 773 ; il

consiste essentiellement en une auge de cuivre de forme parallélipipédique, traversée par un canal cylindrique c d'environ 0,04 de diamètre, et dont les parois sont rodées avec soin. Dans ce canal on fait entrer à frottement le cylindre solide dont on veut étudier l'action absorbante. On commence par mesurer cette action à froid, puis on verse de l'huile dans l'auge, on chauffe à 100, 150 et 200° avec une lampe à alcool D convenablement placée, et l'on mesure de nouveau l'action absorbante de la lame. En ces circonstances le verre nous a toujours paru conserver la même diathermanéité qu'aux températures basses où l'on opère d'ordinaire. Ces expériences doivent être faites avec soin. Voici comment nous opérions :

La source de chaleur était une lampe à modérateur dont les rayons étaient concentrés par une ou plusieurs lentilles de verre. Avec une pareille source nous pouvions obtenir des effets très-considérables sur la pile placée à 4 mètres de distance. L'auge était environ à 3 mètres de la pile, et, à cause de ce grand éloignement, l'effet produit par son rayonnement direct était ou nul ou seulement représenté par une correction très-faible et qu'il était facile d'obtenir.

Avant de commencer l'expérience on laissait la lampe arriver à un état stationnaire; puis on mesurait à froid l'absorption du canon de verre, ensuite on chauffait, et l'on constatait que l'effet produit par le rayonnement à travers le verre chaud était le même que celui que l'on avait primitivement obtenu par le rayonnement transmis à travers le verre froid.

Cette constance d'effet suppose celle de la radiation de la lampe. La méthode d'observation décrite page 594 pouvait permettre ou de constater cette constance ou de trouver la valeur des corrections qu'une légère variation aurait pu nécessiter. Mais il est souvent plus simple de se borner à enlever le cylindre aussitôt après l'observation faite à chaud et de mesurer de nouveau l'effet produit par le rayonnement transmis à travers le canal vide.

Pour étudier la transmission à travers les liquides chauffés, nous faisions usage d'une auge dont les parois latérales étaient en glace, bien ajustées dans des cadres à vis (fig. 774).

Avec une auge ainsi disposée, nous avons fait souvent une expérience curieuse et que je ne crois pas inutile de décrire ici : On place dans l'auge une solution d'amidon teinte en bleu foncé par l'iode. Cette solution arrête complétement le rayonnement de la lampe; l'aiguille du thermomètre est au zéro. On chauffe; tant que la solution conserve sa teinte, l'aiguille est immobile; mais aussitôt que l'on atteint le terme où la solution devient tout à

coup incolore, l'aiguille s'écarte à une distance considérable du zéro, absolument comme si l'on eût abaissé un écran placé sur le trajet des rayons.

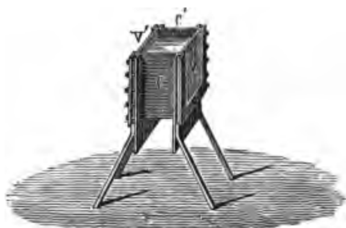


Fig. 774.

Je terminerai ce chapitre en indiquant encore les résultats de quelques autres expériences de transmissions que nous avons eu occasion de faire dans le cours de nos recherches.

TABLEAU INDIQUANT LES PROPORTIONS DANS LESQUELLES LA CHALEUR VENUE DE DIFFÉRENTES SOURCES EST TRANSMISE A TRAVERS 0m,05 D'EAU RENFERMÉE ENTRE DEUX GLACES POLIES.

Chaleur solaire totale..................................	0,58
Chaleur solaire obscure prise à une distance du rouge égale à celle qui sépare le rouge de la limite du vert et du bleu......	0,14
Chaleur solaire obscure plus éloignée..................	0,00
Chaleur solaire ayant déjà traversé 0m,25 d'eau...........	0,92
Chaleur émise par des charbons rendus incandescents dans le courant d'une forte pile..........................	0,23 à 0,24
Chaleur de la craie rendue incandescente dans une flamme d'éther alimentée par l'oxygène.....................	0,20
Chaleur d'une lampe Locatelli ou d'une lampe d'Argant à cheminée..	0,10
Chaleur d'une lampe à alcool salé......................	0,02 à 0,03
Chaleur d'une lampe d'Argant, préalablement transmise à travers une lentille et 0m,10 d'eau...................	0,51

J'ajouterai encore que dans un beau spectre formé par les rayons venus de charbons incandescents dans le courant d'une pile nous avons facilement trouvé de la chaleur jusque dans le bleu, tandis que nous n'avons jamais pu y arriver en opérant sur les spectres des lampes ordinaires.

CHAPITRE VIII.

POUVOIRS RÉFLECTEURS ABSORBANTS, ÉMISSIFS DES LAMES DIATHERMANES OU DIAPHANES.

§ 1. — LAMES DIATHERMANES.

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains. — Lorsqu'une substance diathermane solide est susceptible d'être polie, on peut en déterminer le pouvoir réflecteur en étudiant la réflexion sur la surface de prismes formés de cette substance et d'angles convenables. Des lames à faces parallèles donneraient de mauvais résultats, parce que le faisceau qu'elles réfléchiraient vers l'appareil thermoscopique contiendrait, outre les rayons réfléchis à la surface d'entrée, une multitude d'autres rayons réfléchis aux deux surfaces de la lame et dont la somme posséderait une intensité qui dépendrait de l'absorption dans l'intérieur de cette lame.

La valeur de R qui figure dans l'équation établie au bas de la page 631 étant ainsi déterminée, des expériences de transmissions faites avec des lames à faces parallèles donnent T, et par suite m se trouve connu. On en déduit la valeur numérique de la constante a, page 632, et enfin l'absorption produite par l'unité d'épaisseur de la substance.

L'étude directe de l'émission propre des substances diathermanes est un problème plus compliqué. Nous l'avons traité dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences en janvier 1853, et je vais exposer la méthode que nous avons suivie en me bornant toutefois au cas de l'émission normale.

Lorsqu'un vase plein d'un liquide chaud a l'une de ses faces exactement couverte par une lame athermane, la quantité de chaleur qu'il envoie normalement par cette face dépend de la nature et de la température de la lame; mais elle ne dépend en aucune façon des pouvoirs émissifs et réflecteurs de la matière dont est faite la paroi sous-jacente. Il en est tout autrement dans le cas d'une lame diathermane; alors, à la chaleur e émise par la lame se joignent deux groupes de rayons: les uns, A, partis de la paroi traversent la lame et en émergent soit à leur première incidence sur sa face de sortie, soit, après avoir été réfléchis une ou plusieurs

fois, entre ses deux surfaces ou bien entre elles et la paroi; les autres, B, émis originairement par la lame vers la paroi, reviennent sur eux-mêmes et émergent normalement à leur tour par la face de sortie.

Soit r le pouvoir réflecteur de la paroi, et ρ le pouvoir réflecteur total de la lame, c'est-à-dire la proportion d'un faisceau incident primitivement égal à 1 et qui, par l'action complète de la lame, revient dans une direction précisément inverse de celle du rayonnement incident; soit enfin t le pouvoir transmissif total de cette lame.

Si l'on représente par l'unité la quantité totale de chaleur que la lame enverrait normalement si elle était noircie, $1 - r$ sera celle qu'émet la paroi sous-jacente. La lame n'en laisse passer qu'une partie égale à $(1-r)t$, et renvoie vers la source $(1-r)\rho$. Cette quantité se réfléchit sur la paroi, revient vers la lame et donne à la transmission $(1 - r)\rho rt$, et à la réflexion vers la paroi $(1 - r)\rho^2 r$, d'où résulte un nouveau faisceau transmis $(1 - r) r^2 \rho^2 t$. Ainsi le groupe de rayons A a pour valeur :

$$(1-r)t + (1-r)\rho r t + (1-r)\rho^2 r^2 t + \ldots = \frac{(1-r)t}{1-\rho r}.$$

On verrait aussi facilement que le groupe B est égal à $\dfrac{ert}{1-\rho r}$; ainsi, finalement, la quantité de chaleur q, qui sort normalement de la lame par la face tournée vers le thermoscope, est donnée par l'équation :

$$(a) \qquad q = e + \frac{(1-r)t}{1-\rho r} + \frac{ert}{1-\rho r}.$$

Les quantités q, r, t, peuvent se mesurer directement, et par suite on voit comment on peut arriver à connaître la quatrième, c'est-à-dire le pouvoir émissif de la lame sur laquelle on opère.

Nous avons appliqué cette méthode à la détermination du pouvoir émissif d'une lame de sel gemme d'environ 0,007 d'épaisseur et d'une belle transparence. Seulement, pour faire cette application, nous avons d'abord opéré dans des conditions où r était nul, en sorte que l'équation générale devenait simplement :

$$(b) \qquad q = e + t.$$

La source de chaleur était un grand vase cubique à parois de cuivre que nous maintenions plein d'huile à une température

voisine de 100° et bien constante. Sur une des faces nous avions fixé d'abord une feuille de papier d'un noir mat; puis sur cette feuille, l'une à côté de l'autre, deux plaques, la première de sel gemme, la seconde de verre; ces deux plaques avaient même épaisseur. Nous faisions agir successivement sur la pile les rayonnements venus par chacune d'elles, et nous prenions le rapport de l'effet obtenu par le sel gemme à celui que produisait le verre; enfin, en multipliant ce rapport par 0,90, nous avions la valeur de q.

La raison pour laquelle nous avons cru devoir ainsi comparer la chaleur venue du sel gemme à celle que le verre émettait est évidente. Nous nous mettions par là à l'abri de toute erreur provenant d'une incertitude possible sur la température de la surface extrême de cette lame un peu épaisse. Toutefois nous devons ajouter que cette incertitude est en réalité moins à craindre qu'on ne pourrait le croire au premier abord, car notre lame de verre, malgré son épaisseur assez considérable, émettait absolument comme une lame beaucoup plus mince, les 0,90 de la chaleur que la face noircie du cube rayonnait directement.

Les mesures que nous avions faites antérieurement sur la transmission de la chaleur à 100° par la lame de sel qui nous servait avaient prouvé que, pour elle, t était égal à 0,835, et comme la valeur de q, résultant des expériences dont nous venons de faire connaître la marche, était pour cette même lame égale à 0,94, il en résultait que la valeur correspondante de e était 0,105.

On peut conclure de là que le pouvoir réflecteur total de cette lame ou, si l'on aime mieux, la valeur de ρ qui figure dans l'équation fondamentale,

$$(a) \qquad q = e + \frac{(1-r)t}{1-\rho r} + \frac{ert}{1-\rho r}$$

doit être 0,06.

Supposons, en effet, que la lame dont il s'agit soit placée à 100 dans une enceinte noire à 100, et représentons par 1 la quantité de chaleur qu'elle reçoit normalement sur l'une de ses faces; l'expérience prouve qu'elle transmet ou émet dans la direction contraire un flux calorifique d'intensité 0,94. Il faut donc pour l'équilibre que la quantité de chaleur réfléchie dans cette même direction soit $1 - 0,94 = 0,06$.

Nous avons vérifié avec soin l'exactitude de cette valeur de q, ou, en d'autres termes, nous avons, dans des conditions très-différentes, contrôlé l'exactitude de la relation (a), laquelle renferme

la théorie des échanges de chaleur à travers les lames diathermanes. Dans ce but, à la feuille de papier noir dont nous avons parlé, nous avons substitué successivement une lame de platine, une lame d'or, une couche d'argent en poudre. Dans chaque cas nous avons pour ces substances déterminé directement la valeur de $1-r$; nous avons admis $e = 0,105$, $\rho = 0,06$, et nous en avons conclu la valeur de q; puis nous avons mesuré directement cette quantité q, et nous lui avons toujours trouvé une valeur identique à celle que le calcul avait donnée. Le tableau suivant le prouve de la manière la plus complète :

NOMS DES SUBSTANCES.	VALEURS de $1-r$.	VALEURS de q observées.	VALEURS de q calculées.
Noir..................	1.00	0.94	0.94
Platine............. ..	0.12	0.29	0.29
Argent en poudre....	0.44	0.53	0.53

§ 2. — CORRÉLATION DE L'ABSORPTION ET DE L'ÉMISSION DE LA LUMIÈRE.

En retranchant de l'unité la somme du pouvoir réflecteur ρ et du pouvoir transmissif t d'une lame diathermane, on obtient, pour reste, le pouvoir absorbant de cette lame. Dans le cas que nous venons de considérer, on a $\rho + t = 0,895$; donc le pouvoir absorbant a pour valeur 0,105, c'est-à-dire qu'il est précisément égal au pouvoir émissif e de cette lame; et de là résulte une nouvelle extension des principes de la théorie des échanges de chaleur.

La généralité de ces principes est très-grande, et dans ce paragraphe nous allons faire voir que la corrélation des facultés émissives et absorbantes s'étend complétement au cas des radiations lumineuses. M. L. Foucault a démontré cette vérité par une série d'expériences très-importantes publiées en 1849.

Un grand nombre de lumières artificielles, et en particulier celle de l'arc qui jaillit entre les deux charbons d'une pile, donnent des spectres dans lesquels on remarque une double ligne lumineuse située à la limite du jaune et de l'orangé; cette ligne rappelle la ligne D de Frauenhoffer. Voulant voir si elle correspondait

exactement à cette dernière, M. Foucault fit tomber sur l'arc lui-même une image solaire formée par une lentille convergente, et il put ainsi observer, à la fois et superposés, le spectre électrique et le spectre solaire, et constater qu'en effet la double ligne brillante jaune du spectre électrique répondait à la ligne noire D de Frauenhoffer. « Mais de plus, ajoute M. Foucault, ce procédé d'investigation m'a fourni matière à des observations inattendues; il m'a d'abord prouvé l'extrême transparence de l'arc qui ne porte à la lumière solaire qu'une ombre légère; il m'a montré ensuite que cet arc placé sur le trajet d'un faisceau de lumière solaire absorbe les rayons D, en sorte que ladite raie de la lumière solaire se renforce beaucoup quand les spectres sont exactement superposés. Quand, au contraire, ils débordent l'un sur l'autre, la raie D apparaît plus noire qu'à l'ordinaire dans la lumière solaire et se détache en clair dans la lumière électrique, ce qui fait qu'on juge facilement de leur parfaite coïncidence. Ainsi l'arc nous offre un milieu qui *émet pour son compte propre les rayons D, et qui en même temps les absorbe quand ces rayons viennent d'ailleurs*.

« Pour faire l'expérience d'une manière plus décisive encore, j'ai projeté sur l'arc l'image réfléchie d'une des pointes de charbon qui, comme tous les corps solides en ignition, ne donne pas de raies, et dans ces circonstances la ligne D m'a apparu comme dans la lumière solaire. »

M. Kirchhoff a depuis répété et étendu les expériences de M. Foucault. La ligne brillante qui dans les spectres artificiels correspond à la ligne D de Frauenhoffer est celle de sodium. Une flamme à alcool salé la donne. Or, lorsqu'on interpose une pareille flamme devant un morceau de craie rendu incandescent dans la flamme du chalumeau à gaz, on voit apparaître la ligne D en noir comme dans le spectre solaire, parce que l'alcool salé absorbe les radiations dont l'indice est celui de la raie D, tandis qu'il laisse passer les radiations voisines.

Et encore, lorsqu'on met dans une flamme d'alcool un globule de lithium, on a un spectre qui présente une raie rouge répondant au milieu des lignes D et C de Frauenhoffer. Si l'on interpose cette flamme sur le trajet d'un rayon solaire destiné à former un spectre, on voit dans le spectre apparaître une raie noire à la place de la raie brillante du chlorure de lithium.

Le fer ou les flammes ferrugineuses donnent des spectres présentant une multitude de raies brillantes qui répondent aux raies noires du spectre solaire. Guidé par les principes que nous ve-

nons de développer, M. Kirchhoff a émis cette opinion que l'atmosphère solaire est sans doute très-riche en vapeurs ferrugineuses, lesquelles absorbent parmi tous les rayons émis par le noyau incandescent ceux dont la réfrangibilité répond aux raies brillantes des flammes ferrugineuses.

CHAPITRE IX.

POLARISATION DE LA CHALEUR.

§ 1. — Phénomènes généraux.

Découverte de M. Bérard. — La découverte de la polarisation de la chaleur est une de celles qui ont le plus puissamment contribué à manifester l'identité des causes auxquelles sont dus les phénomènes lumineux d'une part, et les phénomènes calorifiques de l'autre. Le mémoire dans lequel M. Bérard l'a fait connaître

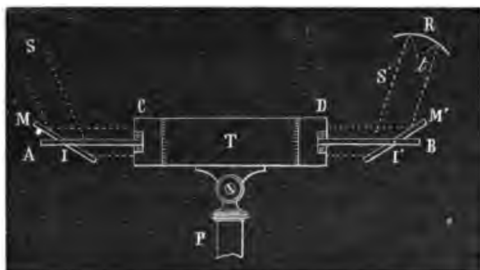


Fig. 775.

se trouve inséré parmi ceux de la Société d'Arcueil; l'auteur y démontre d'abord que la chaleur du soleil éprouve la double réfraction en même temps que la lumière apportée par les rayons directs de cet astre, et pour atteindre ce but il lui suffit de remarquer que, quand l'on fait tomber un faisceau de rayons so-

laires sur un prisme de spath d'Islande, de manière à obtenir deux spectres lumineux distincts, la chaleur du faisceau primitif se trouve partagée entre eux, de telle sorte que, si l'on place des thermomètres sensibles aux points correspondants de chacun de ces spectres, on constate que dans tous deux la loi de variation des températures est sensiblement la même.

La chaleur éprouve donc la double réfraction dans les mêmes conditions que la lumière.

Pour prouver qu'elle se polarise, M. Bérard s'est servi d'un appareil souvent employé par Malus dans ses études sur la polarisation de la lumière. Il se compose d'un tube de cuivre opaque T (fig. 775), portant à ses deux extrémités deux anneaux ou tambours C et D, ayant un diamètre peu différent du sien et pouvant tourner autour de lui comme une bague autour du doigt; chacun d'eux porte un miroir de verre noir M ou M', que l'on peut incliner à volonté sur l'axe AB. Lorsqu'on fait en sorte que les surfaces réfléchissantes de ces miroirs fassent avec AB un angle de 35° 25', tout rayon lumineux qui est réfléchi par l'une d'elles suivant l'axe du tube est complétement polarisé, et comme il rencontre la seconde sous l'angle de polarisation, il ne peut s'y réfléchir lorsque les deux plans menés par AB normalement aux deux miroirs sont perpendiculaires entre eux.

Ceci posé, M. Bérard attacha à l'un des miroirs, M' par exemple, un réflecteur sphérique concave, R, en prenant soin que l'axe de ce réflecteur fît un angle de 70° 50' avec AB, puis au foyer principal de B il assujettit la boule d'un thermomètre sensible; et les choses ainsi disposées, il fit tomber un faisceau solaire sur M, de manière qu'il fût réfléchi suivant AB.

Lorsque les plans de réflexion sur les deux miroirs coïncidaient, le thermomètre accusait une action calorifiqne très-notable; mais l'effet diminuait lorsqu'on faisait croître l'angle des deux plans de réflexion; il devenait nul quand l'angle dont il s'agit était droit.

Un faisceau calorifique émané d'une source à peine incandescente ou même tout à fait obscure se comportait comme le faisceau solaire.

M. Bérard ne paraît pas s'être préoccupé de constater, par des expériences directes, que la réfraction simple ou la double réfraction peuvent aussi polariser la chaleur. Ces lacunes ont été comblées depuis.

Recherches de M. Forbes. — En 1834, M. Forbes reconnut qu'un système de deux plaques de tourmalines, taillées parallèle-

ment à l'axe, transmet la chaleur venue du soleil ou d'une lampe en proportions inégales, suivant que les axes cristallographiques des lames sont parallèles ou croisés. Dans le premier cas, la transmission est beaucoup plus forte que dans le second.

M. Forbes reconnut également que deux piles formées de minces lames de mica et convenablement inclinées sur la direction des rayons incidents se comportent à peu près comme des tourmalines. Quand les plans de réfraction sont parallèles, la transmission est beaucoup plus abondante que lorsqu'ils sont croisés.

L'action des tourmalines indiquait évidemment qu'un faisceau calorifique éprouve la double réfraction en pénétrant dans un cristal de cette espèce, et que de plus le rayon ordinaire se trouve absorbé en proportion beaucoup plus considérable que l'autre.

Quant aux expériences faites avec les piles de mica, elles ressemblent complétement à celles que l'on exécute en optique avec des piles de glace; M. Forbes avait employé les piles de mica, parce qu'elles lui paraissaient plus perméables à la chaleur que les piles de glace elles-mêmes; mais ces dernières donnent aussi de bons résultats, comme nous le dirons plus tard.

Expériences de Melloni. — Melloni confirma les résultats de M. Forbes, et de plus, par des expériences faites avec M. Biot, il établit que des plaques de cristal de roche taillées perpendiculairement à l'axe impriment au plan de polarisation de la chaleur une rotation analogue à celle que le plan de polarisation d'un rayon lumineux éprouve dans ces mêmes conditions. Un faisceau de chaleur partiellement polarisé par l'action d'une pile de mica était reçu sur une seconde pile dont le plan de réflexion était tourné à 90° du plan de réflexion sur la première. La transmission était alors faible; et il en était de même de l'action thermoscopique. On introduisait alors entre les deux piles une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe et d'environ 7 millimètres d'épaisseur. Par la seule action de cette lame, l'effet thermique se trouvait notablement accru. Il restait au contraire très-faible lorsqu'au lieu d'une seule lame active on en introduisait deux de même épaisseur, mais de rotations inverses.

Recherches de M. Knoblauch. — En 1847, M. Knoblauch publia sur l'étude de la polarisation calorifique plusieurs mémoires qui ont été insérés aux *Annales de Poggendorff*. Dans la série de recherches qu'il exécuta sur ce point, M. Knoblauch fit voir qu'on peut avec un prisme de nicol polariser complétement les rayons calorifiques qui accompagnent la lumière solaire; il mon-

tra qu'il y a une identité parfaite entre les intensités calorifiques des deux faisceaux partiels dans lesquels se décompose un faisceau de rayons solaires en traversant un cristal naturel de spath d'Islande. Il montra que ces faisceaux sont complétement polarisés dans des plans rectangulaires.

Il prouva, en outre, que des piles *de glace* peuvent polariser partiellement la chaleur solaire, et il montra que pour la chaleur, comme pour la lumière, le plan de polarisation partielle du rayon réfracté est perpendiculaire au plan de polarisation partielle du rayon réfléchi.

Enfin, il établit que, dans l'acte de la réflexion à la surface du verre ou des métaux, il se développe dans le rayon réfléchi une quantité de chaleur polarisée qui varie avec l'angle d'incidence. Pour la réflexion sur le verre la proportion de chaleur polarisée qui existe dans le rayon réfléchi est égale à l'unité quand l'angle de réflexion est 55°.

Pour l'acier le maximum de polarisation a lieu sous l'angle 70° environ, mais ce maximum n'est plus égal à l'unité.

§ 2. — Lois de la polarisation de la chaleur.

Recherches de MM. de La Provostaye et P. Desains.

Les expériences de M. Knoblauch démontraient la polarisation complète des deux rayons dans lesquels la transmission à travers un spath dédouble un faisceau calorifique primitivement naturel. Elles indiquaient aussi que si l'on transmet l'un de ces deux faisceaux à travers un prisme de nicol, l'intensité de la chaleur transmise varie avec l'orientation de ce prisme, mais elles n'indiquaient pas la loi de ces variations.

Extension de la loi de Malus à la chaleur. — Nos premières recherches sur la polarisation de la chaleur ont eu pour objet d'établir que les variations dont il s'agit satisfont à la loi de Malus, et la facilité avec laquelle on mesure les intensités calorifiques nous a rendu possible la démonstration directe de cette loi fondamentale.

Les rayons solaires réfléchis horizontalement par un héliostat tombaient sur un prisme de spath d'Islande achromatisé, et après l'avoir traversé ils donnaient, à une distance d'environ soixante centimètres, deux images parfaitement séparées : l'une d'elles, l'image extraordinaire par exemple, était arrêtée par un écran, l'autre tombait sur un second prisme dont la section prin-

cipale, d'abord parallèle à celle du premier, était ensuite amenée à faire avec elle différents angles.

Si l'on prend pour unité l'effet produit sur la pile lors du parallélisme, on trouve pour valeur des actions produites dans différents azimuts, 30, 35...

à 30°	0,75.
35°	0,67.
45°	0,50.
52°	0,38.

Et il est facile de s'assurer que les nombres 0,75, 0,67... sont précisément les carrés des cosinus des angles inscrits dans la première colonne.

Action des piles de glace sur la chaleur. — Après avoir ainsi établi que la loi de Malus s'applique aussi bien aux rayonnements calorifiques qu'aux rayonnements lumineux, nous avons cherché si les formules qui donnent dans tous les cas possibles l'intensité du phénomène de la réflexion lumineuse sont aussi applicables à la réflexion de la chaleur rayonnante, et nous avons en effet constaté l'identité la plus parfaite dans la marche des deux séries de phénomènes. Nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons dit au chapitre V; mais nous allons, aux résultats établis dans ce chapitre, joindre ici ceux qui sont relatifs à la réflexion ou à la transmission de la chaleur polarisée sur ou à travers plusieurs lames diathermanes terminées par des faces parallèles.

Au chapitre XXIII de l'optique, nous avons montré comment, en partant des formules qui font connaître l'action réfléchissante d'une surface de verre sur des rayons polarisés dans le plan d'incidence ou dans le plan de réflexion, on peut calculer la quantité de lumière transmise ou réfléchie par un nombre quelconque de glaces à faces parallèles; et, de plus, dans un travail inséré aux *Annales* (série 3, tome XXX), nous avons prouvé que ces mêmes formules sont applicables au cas de la réflexion et de la transmission calorifique. Seulement, comme dans les calculs qui nous avaient servi à les établir nous n'avions pas tenu compte de l'absorption, il fallait, dans les expériences de vérification, n'admettre que des rayons de chaleur capables de traverser sans absorption sensible les lames de verre employées. Ceux qui nous servaient venaient d'une lampe d'Argant; ils avaient traversé des lentilles, des spaths, en un mot, une épaisseur de milieu transparent considérable : aussi n'étaient-ils guère plus absorbables à travers le verre que la lumière à laquelle ils étaient

joints. Enfin, pour atténuer encore des erreurs qu'à la rigueur on aurait pu négliger, on prenait pour terme de comparaison, pour unité, non pas l'intensité des rayons directs, mais la somme des intensités des rayons transmis et réfléchis.

Nous avons successivement opéré avec des rayons polarisés dans le plan d'incidence, avec des rayons polarisés dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence, et avec des rayons naturels. Nous avons opéré sous diverses incidences, et toujours l'expérience a vérifié les formules établies pages 516 et suiv.

Voici des nombres :

TABLEAU I.

CHALEUR POLARISÉE DANS LE PLAN D'INCIDENCE.

INCLINAISON de la lame ou des lames sur les rayons incidents.	RAYON TRANSMIS. Rapport de l'intensité observée à la somme des intensités du rayon transmis et du rayon réfléchi.	INTENSITÉS calculées par la formule $\frac{1-R}{1+(2n-1)R}$.
	Expérience faite avec une lame.	
60..............	0,706	0,705
70..............	0,541	0,544
	Expérience avec deux lames.	
60..............	0,542	0,544
70..............	0,370	0,374
	Expérience avec trois lames.	
50..............	0,586	0,583
60..............	0,439	0,444
70..............	0,282	0,285
	Expérience avec quatre lames.	
60..............	0,396	0,374

TABLEAU II.

CHALEUR POLARISÉE PERPENDICULAIREMENT AU PLAN D'INCIDENCE.

INCLINAISON de la lame ou des lames sur les rayons incidents.	RAYON TRANSMIS. Intensité observée.	INTENSITÉS calculées par la formule $\frac{1-R'}{1+(2n-1)R'}$.
	Expérience avec une lame.	
75..............	0,802	0,806
	Expérience avec deux lames.	
75..............	0,676	0,675
	Expérience avec trois lames.	
70..............	0,775	0,788
75..............	0,581	0,581

TABLEAU III.

CHALEUR NATURELLE. — *Incidence normale.*

	RAYON TRANSMIS. Intensité observée.	INTENSITÉ calculée.
Une lame.......	0,92	0,92
Deux lames.....	0,855	0,857
Trois lames.......	0,80	0,80
Quatre lames.....	0,73	0,75

Rotation du plan de polarisation de la chaleur par le quartz et les liquides. — Lorsqu'un faisceau de rayons solaires a traversé d'abord l'atmosphère, puis des prismes et des lentilles de verre, il ne renferme plus de rayons calorifiques analogues à

ceux qui émanent de nos sources à basse température. Les rayons simples dont il est formé se réfléchissent à peu près en même proportion sur le verre; ils se réfléchissent aussi en proportions sensiblement égales sur plusieurs métaux; mais si le parallélisme est complet entre les phénomènes de la chaleur rayonnante et ceux de l'optique, les différents rayons calorifiques simples dont il est ici question devront, lorsqu'ils auront été polarisés, éprouver de la part des substances actives des actions rotatoires très-différentes, et l'étude comparée des rotations éprouvées par des rayons calorifiques et des rayons lumineux de même indice devra donner des preuves concluantes de l'identité des lois auxquelles les deux agents obéissent dans des circonstances analogues. Ces considérations nous ont déterminés à faire une étude complète du phénomène de la polarisation rotative de la chaleur, et nous allons indiquer rapidement ici la marche de nos opérations et les résultats qu'elles nous ont donnés.

Dans toutes nos expériences, nous avons opéré sur la chaleur solaire polarisée et simplifiée autant que possible par la réfraction. Pour l'avoir en cet état, nous dispersions par un prisme bien pur un faisceau solaire transmis successivement par une fente étroite et par un spath d'Islande. Le spectre formé était très-net, et l'on y distinguait les raies de Frauenhoffer. En isolant dans ce spectre les rayons d'une teinte déterminée, il était facile de s'assurer que leur polarisation était complète, car si on les recevait sur un second prisme de spath faisant fonction d'analyseur, ils y donnaient en général deux images dont chacune disparaissait à son tour lorsqu'en faisant tourner l'analyseur on amenait sa section principale à être parallèle ou perpendiculaire à celle du prisme polariseur. Pendant cette rotation, l'une des images restait fixe et allait, en traversant une ouverture convenablement disposée, tomber sur la pile de l'appareil thermoscopique. Nous nous sommes assurés que l'action qu'elle y produisait variait exactement suivant la loi de Malus, de sorte que la somme des effets successivement obtenus pour deux positions rectangulaires de l'analyseur était constante. Cette somme d'effets était égale à l'effet unique que l'on obtenait lorsque les sections des deux spaths étaient parallèles.

Ceci posé, admettons que les sections principales du polariseur et de l'analyseur soient amenées à 90° l'une de l'autre; le faisceau sur lequel portent les observations disparaît, ou, en d'autres termes, toute action cesse d'avoir lieu sur l'œil et sur l'appareil calorimétrique. Pour la faire reparaître, il suffit d'interposer entre le polariseur et l'analyseur soit un quartz taillé

perpendiculairement à l'axe, soit une colonne de liquide actif, ce qui était le cas le plus ordinaire de nos expériences. Mais alors on faisait de nouveau disparaître toute action sur le thermoscope lorsque, par une rotation convenable de l'analyseur, on éteignait la lumière de l'image transmise.

Nous avons varié ces expériences en employant tantôt des longueurs égales de liquides de natures différentes, tantôt des longueurs égales d'une solution de sucre à des degrés de concentration différents, tantôt enfin des longueurs différentes d'un même liquide, et toujours l'extinction de la chaleur avait lieu dans les conditions où avait lieu celle de la lumière.

L'observation constante de cette coïncidence d'effets suffisait à établir l'identité des lois qui règlent la rotation des plans de polarisation des rayons lumineux et calorifiques de même indice.

J'ajouterai pourtant une remarque. Dans nos expériences, les effets maxima produits sur l'appareil ne dépassaient pas 25°. On aurait pu les rendre plus forts; mais en cherchant à les trop accroître, on aurait couru le risque de n'avoir plus que des faisceaux peu homogènes. Or, d'après la loi de Malus, si l'on incline la section principale de l'analyseur d'un angle ω sur la direction qui répondrait à l'extinction, le rapport entre l'effet produit et l'effet maximum aurait pour valeur $sin^2\,\omega$; en particulier, à 4° de la position qui répond à l'extinction l'effet produit n'est pas la 150e partie de l'effet maximun; en un mot, même en admettant une déviation maximum de 50°, on pourrait faire varier la position de l'analyseur de 3 ou 4° de part et d'autre de la position réelle qui répond à l'extinction sans que l'on s'en aperçût, l'aiguille n'éprouvant que des déviations inférieures à 0,3 de degré, et dont on ne peut rien tirer de sérieux.

Nous avons employé pour mesurer l'azimut d'extinction une méthode beaucoup plus sûre : cet azimut, α, étant approximativement connu, nous plaçons l'analyseur successivement dans deux positions rectangulaires entre elles : φ et $\varphi - 90$, à peu près équidistantes de α, et nous mesurons dans chaque cas les effets thermoscopiques produits i et i'. Nous avons alors, pour déterminer α, la relation

$$\frac{i}{i+i'} = \frac{sin^2(\varphi - \alpha)}{cos^2(\varphi - \alpha) + sin^2(\varphi - \alpha)}.$$

On peut, sans exagération, espérer connaître $\frac{i}{i+i'}$ à $\frac{1}{50}$ près, et par conséquent $sin\,(\varphi - \alpha)$ à $\frac{1}{100}$. Or, lorsque $\varphi - \alpha$ est voi-

sin de 45°, cette approximation sur le *sinus* ne répond qu'à quelques minutes d'incertitude sur l'arc lui-même.

Action rotatoire développée par le magnétisme. — Au chapitre XXI du livre de l'optique nous avons exposé les belles expériences par lesquelles M. Faraday avait fait voir que des corps naturellement dénués de pouvoir rotatoire peuvent en acquérir sous l'action d'aimants puissants. Peu de temps après la brillante découverte de Faraday, M. Wartman annonça qu'il avait tenté la même expérience avec la chaleur rayonnante, et malgré les difficultés pratiques qu'il avait rencontrées et signalées, il croyait avoir reconnu que le flint, sous l'action des aimants, semblait prendre la faculté de dévier le plan de polarisation d'un rayon de chaleur qui le traversait. Nous avons pensé qu'il serait utile de reprendre ces expériences et de donner une méthode qui permît de les faire réussir avec facilité. Voici celle que nous avons adoptée :

Le rayon solaire réfléchi par un héliostat traversait un premier prisme biréfringent achromatisé. Le faisceau extraordinaire était intercepté, l'autre traversait les électro-aimants de l'appareil de M. Rumkorff, et entre les pôles un flint de 38 millimètres de long. Il allait ensuite, à 3 mètres environ, rencontrer le second prisme de spath, se bifurquait de nouveau et donnait deux images, dont l'une pouvait être reçue sur la pile thermo-électrique placée à 4 mètres des bobines. Le galvanomètre était encore plus éloigné de ce centre de force perturbatrice ; aussi n'avait-elle aucune influence sur l'aiguille, car, lorsqu'on interceptait le rayon, on pouvait intervertir le sens du courant dans les fils de l'électro-aimant sans qu'elle éprouvât la moindre déviation.

Grâce à ces dispositions, on peut sans crainte d'erreur donner à l'électro-aimant une force considérable, et par conséquent, lorsqu'on a éteint l'action calorifique de l'image ordinaire en croisant les sections des deux spaths, il n'est pas impossible de la faire reparaître d'une manière non équivoque en établissant le courant. Mais quand la rotation due à l'action de l'aimant ne doit pas être considérable, il vaut beaucoup mieux suivre une marche analogue à celle que nous avons exposée aux pages précédentes.

Au lieu de croiser les sections des spaths, on les met à 45° l'une de l'autre, puis on fait passer le courant successivement dans les deux sens, et on mesure, dans les deux cas, les actions calorifiques m et n produites par l'image ordinaire. Si l'on désigne par ω la rotation produite par le courant, $\sin 2\omega$ mesure le rapport de la différence $m - n$ à l'effet que l'on obtiendrait sans courant, si les spaths avaient leurs sections principales parallèles.

Voici, entre autres, les résultats d'une de nos séries d'expériences :

	Déviation.
Sans courant................	18,4
Courant direct..............	14,9
Courant inverse.............	21,7

Ces expériences ne peuvent laisser aucun doute sur la réalité du fait qu'elles sont destinées à constater. Nous ajouterons, pour écarter définitivement toute objection, que si le flint était enlevé, on pouvait à volonté établir le courant et en intervertir le sens sans que l'aiguille cessât d'être parfaitement immobile.

CHAPITRE X.

POLARIMÉTRIE DE LA CHALEUR. — MÉTHODES ET APPAREILS.

Recherches de MM. de la Provostaye et P. Desains.

La méthode qu'Arago a donnée pour la solution des problèmes de polarimétrie lumineuse repose sur les deux principes suivants :

1° Lorsqu'un faisceau de rayons lumineux est partiellement polarisé dans un plan connu MN, si on le transmet à travers une pile de glaces dont le plan de réflexion coïncide avec MN, on pourra en général faire disparaître toute trace de polarisation dans le rayon transmis. Il suffira, pour y arriver, de former la pile d'un nombre de glaces un peu considérable, et ensuite de l'incliner convenablement sur le rayon incident.

2° Lorsqu'un faisceau, en grande partie formé de lumière naturelle, contient toutefois un peu de lumière polarisée, on décèle aisément ces traces de polarisation à l'aide d'un analyseur formé d'une plaque de quartz perpendiculaire à l'axe et d'un prisme de spath. Les deux images émergentes se colorent dès que la lumière incidente n'est pas absolument neutre.

Il serait difficile d'étendre ces principes à l'étude de la polarisation calorifique. Mais la discussion de la théorie des piles de glaces en indique une autre d'une application commode.

Lorsqu'on fait tomber obliquement sur une pile de glaces un faisceau polarisé, la proportion dans laquelle il est transmis dépend, toutes choses égales d'ailleurs, de l'angle que le plan de réflexion fait avec le plan de polarisation primitif. Elle est minimum quand ces plans coïncident, maximum quand ils sont rec-

tangulaires; des différences analogues se manifestent quand on opère sur un rayon partiellement polarisé. Seulement, elles sont de moins en moins grandes à mesure que la proportion de chaleur polarisée qui existe dans le faisceau incident est plus faible. Tous ces faits sont des conséquences immédiates de la théorie des piles de glaces. (Voyez pages 512 et suivantes.) MM. Forbes, Melloni, Knoblauch ont souvent vérifié l'exactitude de ces conséquences dans leurs recherches sur la polarisation calorifique, et c'est de leur discussion que nous avons déduit la méthode polarimétrique dont nous avons toujours fait usage.

Désignons par p et q les fractions qui mesurent l'intensité avec laquelle la chaleur polarisée se transmet à travers une pile de glaces suivant que son plan de polarisation coïncide avec celui de réflexion ou lui est perpendiculaire, on a (voir page 517)

$$p = \frac{1 - \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}}{1 + (2n-1)\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}}$$

$$q = \frac{1 - \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}}{1 + (2n-1)\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}}$$

Ceci posé, si l'on reçoit sur une pile de glaces un faisceau de chaleur formé de deux autres, l'un d'intensité a polarisé dans le plan de réflexion, l'autre d'intensité b dans un plan rectangulaire, on obtiendra une quantité de chaleur transmise Z donnée par l'équation $Z = \rho\ (ap + bq)$, ρ étant un facteur dépendant de l'absorption dans le verre. Lorsque l'effet thermoscopique correspondant à ce flux aura eté mesuré, si l'on tourne le plan de réflexion de la pile de 90°, en prenant soin que l'inclinaison des lames sur le faisceau incident ne change pas, on obtiendra une proportion de chaleur transmise égale à $\rho\ (aq + bp)$. Soit Z′ cette nouvelle quantité de chaleur transmise, le rapport $\frac{Z}{Z'}$ aura donc pour expression $\frac{ap + bq}{aq + bp}$

ou

$$\frac{\frac{ap}{bq} + 1}{\frac{a}{b} + \frac{p}{q}}$$

La valeur numérique $\frac{p}{q}$ varie peu avec l'indice des rayons

employés sous l'angle de 60°; avec une pile de 10 glaces elle est sensiblement égale à 0,307 quand l'indice est égal à 1,48, et 0,28 si l'indice est 1,54; en telle sorte que sous cet angle de 60°, avec une pile de 10 glaces, le rapport $\frac{Z}{Z'}$ a très-sensiblement pour valeur $\dfrac{1+\frac{a}{b}0,29}{\frac{a}{b}+0,29}$, quelle que soit la longueur d'onde des rayons employés.

D'après ces considérations, on voit qu'on peut, en se donnant simplement l'indice moyen et la direction moyenne des rayons incidents, calculer le rapport $\frac{Z}{Z'}$ quand $\frac{a}{b}$ est connu, ou réciproquement; et par suite on peut connaître la proportion $\frac{a-b}{a+b}$ de chaleur polarisée qui existe dans le faisceau incident; on a en effet $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}$.

On peut aussi, indépendamment de toute appréciation d'indice et d'angle d'incidence, déterminer expérimentalement les différentes valeurs de $\frac{Z}{Z'}$, qui, pour une incidence fixe, quoique inconnue, répondent aux différents degrés de polarisation du faisceau incident. Voici en quoi consiste la marche des opérations :

On polarise complétement la chaleur provenant d'une bonne lampe à modérateur, et on la transmet normalement à travers une plaque de quartz dont la section principale fait avec le plan de polarisation primitif un angle α inférieur à 45°. Le faisceau transmis est partiellement polarisé dans le plan de la section principale, et la proportion de chaleur polarisée qu'il renferme est $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; on reçoit ce faisceau sur une pile de mica montée de façon à pouvoir tourner autour du faisceau incident en conservant toujours sur lui la même inclinaison, et l'on observe les effets thermoscopiques obtenus lorsque le plan de réfraction coïncide avec la section du quartz, ou quand il lui est perpendiculaire. Le quotient de ces effets est la valeur de $\frac{Z}{Z'}$, qui répond au degré de polarisation $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ du rayon incident.

Des opérations de ce genre nous ont conduit à la table suivante :

TABLE DE GRADUATION D'UNE PILE DE MICA, POUR EXPÉRIENCES DE POLARIMÉTRIE CALORIFIQUE.

ANGLE de l'axe du quartz avec le plan de polarisation primitive.	PROPORTION de chaleur polarisée contenue dans le faisceau qui sort du quartz et qui vient tomber sur la pile de mica.	RAPPORT des déviations observées dans les deux positions rectangulaires de la pile de mica.
22°	0,719	0,324
27	0,588	0,400
33	0,407	0,555
37	0,276	0,690
40	0,175	0,770

Dans les expériences faites pour la construction de cette table, on a pris toutes les précautions nécessaires pour corriger les erreurs qui pouvaient provenir de défauts d'orientation dans les différentes parties de l'appareil. Ainsi on ne manquait jamais, lorsqu'on avait fait une série de déterminations en inclinant la section du quartz de 5° à droite du plan de polarisation primitif, de recommencer l'expérience en l'inclinant de 5° à gauche de ce même plan.

De même, pour écarter toute erreur qui eût pu provenir de l'orientation de la pile de mica, on comparait à l'effet produit, quand son plan de réflexion coïncidait avec la section principale du quartz, la moyenne des déviations obtenues quand il était placé successivement à 90° à droite et à gauche.

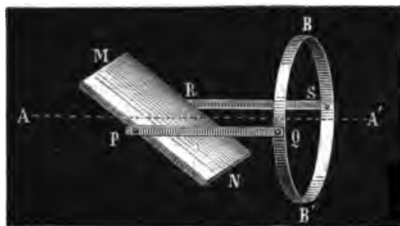


Fig. 776.

D'après ce que nous avons dit aux pages précédentes, la table de graduation ainsi obtenue est applicable aux différents rayons calorifiques sur lesquels on peut opérer, et dans l'usage on s'en sert ainsi qu'il suit :

La pile est montée de manière à se mouvoir comme le miroir d'un porte-lumière

(fig. 776), c'est-à-dire que le cadre MN dans lequel elle est soutenue peut se mouvoir autour d'un axe PR porté par deux montants PQ et RS, lesquels s'attachent aux deux extrémités d'un diamètre d'une bague BB'. Lorsque cette bague tourne autour de AA' comme axe, PR décrit un plan perpendiculaire à cet axe, et le plan d'incidence fait successivement tous les angles possibles avec le plan AA' BB'.

On peut donc toujours rendre le plan de réflexion parallèle ou perpendiculaire au plan de polarisation partielle du faisceau que l'on analyse. On mesure les effets produits dans ces deux positions successives. On en calcule le rapport, et l'on cherche la place qu'il occupe dans la troisième colonne de la table. Enfin on prend dans la seconde colonne la valeur correspondante de la proportion de chaleur polarisée.

Il est évident que la méthode précédente donne le degré de polarisation du faisceau calorifique qui émerge de la pile.

Si la chaleur incidente était composée de deux parties inégalement polarisées et très-inégalement transmissibles à travers le mica, il faudrait, pour avoir la mesure du degré de polarisation moyen du faisceau incident, remplacer les piles de mica par des piles de sel gemme. Nous n'avons pas eu occasion de traiter ces cas particuliers.

Conjointement avec la méthode polarimétrique que nous venons de décrire, nous en avons employé une autre qui s'en rapproche beaucoup et dont l'emploi est souvent plus commode.

Soient p et n les quantités de chaleur polarisée et de chaleur naturelle qui existent dans un faisceau déterminé ; la *proportion* de chaleur polarisée qui existe dans ce faisceau sera $\frac{p}{p+n}$. Pour trouver la valeur de cette fraction, il faut connaître p et n. Or on peut y parvenir en recevant le faisceau total $p+n$ sur un spath dont la section principale soit successivement parallèle et perpendiculaire au plan de polarisation partielle du faisceau. Dans le premier cas, la quantité transmise sera $K\left(p+\frac{1}{2}n\right)$; dans le second, elle sera $\frac{1}{2}Kn$, et en divisant la différence des déviations par leur somme on obtiendra pour quotient $\frac{p}{p+n}$.

Nous avons surtout employé ces méthodes polarimétriques à l'étude de la polarisation par diffusion et par émission ; mais auparavant nous en avons cherché des vérifications directes en nous servant pour analyser, au point de vue polarimétrique,

des faisceaux calorifiques renfermant des proportions de chaleur polarisée qui nous étaient connues par d'autres considérations.

Vérification des méthodes polarimétriques. — Nos expériences avaient établi que l'acier, sous l'angle de 70°, réfléchit 0,87 de la chaleur de la lampe lorsqu'elle est à l'incidence polarisée dans le plan de réflexion, et 0,42 quand elle est polarisée perpendiculairement. Il en résulte que si l'on fait tomber sur ce métal et sous l'angle de 70° un faisceau de chaleur provenant de la source que nous venons d'indiquer, on doit trouver dans le rayon réfléchi $\frac{87-40}{87+40}=0,37$ de chaleur polarisée parallèlement au plan de réflexion.

En effet, en recevant le faisceau sur la pile de mica, et prenant soin de rendre le plan de réfraction de cette dernière successivement parallèle et perpendiculaire à celui de réflexion sur le miroir, nous avons obtenu les déviations 10,5 et 16,9; le quotient $\frac{105}{169}=0,62$ répond d'après la table à une proportion de chaleur polarisée égale à 0,37.

Quant à la lame de spath, nous nous en sommes servis pour déterminer directement la proportion de chaleur polarisée contenue dans un faisceau réfléchi par une pile de 4 glaces.

D'après ce que nous avons dit pages 517 et suiv., cette proportion est représentée par l'expression $\frac{R-R'}{R+R'+2(2n-1)RR'}$. Or, en réduisant cette expression en nombres pour trois valeurs différentes de l'angle d'incidence, et en admettant 1,52 pour indice de réfraction du verre, nous avons obtenu des résultats tout à fait concordants avec ceux de nos observations, ainsi que le prouvent les nombres suivants :

ANGLES D'INCIDENCE.	PROPORTION de chaleur polarisée contenue dans le rayon réfléchi.	
	Calcul.	Observation.
80°................	0,393	0,396
75°................	0,574	0,587
70°................	0,75	0,76

CHAPITRE XI.

ÉTUDE POLARIMÉTRIQUE DE LA CHALEUR ET DE LA LUMIÈRE IRRÉGULIÈREMENT RÉFLÉCHIES PAR LES CORPS DÉPOLIS.

Recherches de MM. de la Provostaye et P. Desains.

§ 1. — POLARISATION DE LA CHALEUR DIFFUSÉE.

Arago paraît avoir remarqué le premier que les rayons de lumière peuvent se polariser partiellement en se diffusant à la surface des corps. Il découvrit ce phénomène en recevant sur un polariscope une portion de la lumière qu'un miroir mal poli ou que d'autres corps à surface mate renvoyaient en dehors de la direction de la réflexion régulière ; les deux images données par le polariscope étaient colorées de teintes complémentaires. La suite de nos études sur la chaleur rayonnante nous conduisit à constater que des effets de polarisation analogues à ceux que nous venons de décrire se développent dans la réflexion irrégulière de la chaleur. Nous avons précisé quelques-unes des conditions auxquelles les phénomènes se trouvent assujettis dans leur développement, et nous avons, dans un certain nombre de cas, appliqué nos méthodes polarimétriques à la mesure de la grandeur des effets observés ; enfin, revenant à l'étude des phénomènes découverts par Arago, nous en avons déduit de nouvelles analogies entre les phénomènes de la diffusion lumineuse et ceux de la diffusion calorifique.

On constate d'abord aisément qu'un faisceau de chaleur, tombant sous une incidence un peu considérable sur une surface dépolie, donne dans la direction de la réflexion régulière un faisceau calorifique partiellement polarisé dans le plan d'incidence.

Ainsi, en recevant sous l'incidence de 70°, sur trois substances fort différentes, la céruse, le soufre lavé et le platine platiné, un faisceau de chaleur solaire naturelle, nous avons obtenu les résultats suivants :

NOMS DES SUBSTANCES.	PROPORTION de chaleur polarisée qui se trouve dans le faisceau renvoyé dans la direction de la réflexion régulière.
Céruse..................	0,46
Soufre lavé.............	0,15
Platine platiné...........	0,76

Cette polarisation parallèle au plan d'incidence, que nous trouvons dans le faisceau renvoyé dans la direction de la réflexion régulière, tient à deux causes. Voici la première :

Lorsque la chaleur qui tombe sur une surface dépolie est polarisée à l'incidence, la proportion de cette chaleur qui est renvoyée dans la direction de la réflexion régulière est plus grande lorsque le plan de polarisation primitif est parallèle au plan de réflexion que quand il lui est perpendiculaire. Nous avons déjà trouvé l'analogue de ce fait, en étudiant la réflexion sur les miroirs polis.

Pour en établir la réalité, nous avons d'abord employé comme substance diffusante le platine platiné, et cherché pour différentes incidences quelle était la proportion de la chaleur incidente qui se trouvait renvoyée vers la pile, placée toujours à même distance du centre de diffusion et toujours dans la direction de la réflexion régulière. La chaleur incidente étant successivement polarisée dans le plan d'incidence et dans un plan perpendiculaire, nous avons obtenu les résultats suivants :

CHALEUR polarisée parallèlement au plan d'incidence.		CHALEUR polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.	
ANGLE formé avec la normale, d'un côté par le rayon incident, de l'autre par l'axe de la pile.	INTENSITÉ de la chaleur qui tombe après diffusion sur la pile, celle du rayon incident étant 100.	ANGLE formé avec la normale, d'un côté par le rayon incident, de l'autre par l'axe de la pile.	INTENSITÉ de la chaleur qui tombe après diffusion sur la pile, celle du rayon incident étant 100.
25	0,803	25	0,47
45	2,09	45	0,39
60	5,94	60	0,55
70	13,60	70	2,24

Nous avons ensuite fait des expériences analogues avec la céruse et le cinabre; seulement ici, pour calculer l'intensité de la chaleur renvoyée à la pile, on a pris pour unité, non plus la chaleur incidente, mais celle qui reviendrait à la pile dans le cas où les rayons incidents et diffusés seraient normaux à la plaque, et l'on se rappelle que dans ce dernier cas l'intensité de l'effet produit sur la pile ne dépend pas de la direction du plan de polarisation des rayons incidents.

CHALEUR polarisée parallèlement au plan d'incidence.		CHALEUR polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.	
ANGLE formé avec la normale, d'un côté par le rayon incident, de l'autre par l'axe de la pile.	INTENSITÉS relatives.	ANGLE formé avec la normale, d'un côté par le rayon incident, de l'autre par l'axe de la pile.	INTENSITÉS relatives.
		Céruse.	
0,0	1,00	0,0	1,00
12,5	0,975	12,5	0,975
25,0	0,909	25,0	0,906
45,0	0,85	45,0	0,74
60,0	0,82	60,0	0,546
		70,0	0,627
75,0	1,72	75,0	0,975
		Cinabre.	
0,0	1,00	0,0	1,00
12,5	0,975	12,5	0,975
45,0	0,719	60,0	0,48
75,0	0,99	75,0	0,586

L'inégalité que nous venons d'établir est évidemment une cause de polarisation pour le rayon diffusé, mais elle n'est pas la seule. Quand une surface réfléchissante a le poli spéculaire, le rayon réfléchi conserve le sens de sa polarisation primitive lorsqu'à l'incidence la direction du mouvement vibratoire est parallèle ou

perpendiculaire au plan d'incidence. Dès lors, pour calculer la quantité de chaleur polarisée qui existe dans ce rayon sous un angle quelconque, il suffit de connaître l'intensité de la réflexion des vibrations polarisées dans les deux plans principaux.

Mais quand la réflexion a lieu sur une surface mate, les faisceaux polarisés à l'incidence dans l'un ou l'autre des deux plans principaux éprouvent en général une dépolarisation partielle. Nous avons toujours trouvé que cette dépolarisation est plus forte pour les rayons polarisés dans le plan perpendiculaire au plan de réflexion que pour ceux qui sont polarisés dans ce plan, et cette dépolarisation plus forte du faisceau polarisé perpendiculairement au plan d'incidence contribue à accroître dans le rayon diffusé la proportion de chaleur polarisée dans le plan d'incidence.

Ainsi, lorsque sous l'angle de 70° on fait tomber sur la céruse de la chaleur polarisée parallèlement au plan d'incidence, le rayon renvoyé dans la direction de la réflexion régulière renferme encore 0,87 de chaleur polarisée dans le plan de polarisation primitif. Au contraire, si la chaleur incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, le faisceau renvoyé dans la même direction que précédemment est sans doute encore polarisé partiellement dans le même sens que le faisceau primitif, mais il ne renferme plus que 0,58 environ de chaleur polarisée.

Cette action dépolarisante est fort curieuse. Pour la céruse et ses analogues, elle est complète ou presque complète, lorsque les rayons incidents sont normaux, c'est-à-dire, qu'alors la chaleur diffusée dans toutes les directions possibles paraît naturelle, quoique les rayons incidents fussent complétement polarisés. Comme, d'une autre part, dans le cas de l'incidence normale, la loi de distribution de la chaleur diffusée est indépendante de la direction du plan de polarisation primitif, on est en droit d'en conclure que la céruse et ses analogues ne polarisent pas sensiblement la chaleur diffusée dans le cas de l'incidence normale. Mais il faudrait bien se garder de trop généraliser cette loi, il est des classes entières de corps auxquels elle n'est plus applicable.

§ 2. Polarisation de la lumière irrégulièrement réfléchie.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, une des principales difficultés que l'on rencontre dans l'étude de la diffusion calorifique est l'extrême petitesse des effets que l'on veut mesurer.

Mais la sensibilité de l'œil est de beaucoup supérieure à celle des thermoscopes les plus délicats, et dès lors nous pouvions espérer qu'en étudiant à son tour la polarisation de la lumière par diffusion, nous arriverions à traiter optiquement des problèmes dont la solution ne pouvait s'obtenir par nos méthodes calorimétriques ordinaires.

Tel est en particulier le cas de la diffusion à la surface du noir de fumée. Lorsqu'on fait tomber un rayon solaire sur une surface couverte de noir de fumée, on distingue très-bien le point touché par les rayons incidents, et cela dans quelque direction que l'on se place pour faire l'observation ; en d'autres termes, l'œil est assez sensible pour être impressionné par la lumière diffusée par le noir, tandis que nos thermoscopes n'ont jamais pu accuser l'action calorifique de ces rayons.

Nous avons donc étudié optiquement la question du développement de la polarisation par l'acte de la diffusion à la surface du noir de fumée et de plusieurs autres corps noirs dépolis. Nos recherches sont surtout relatives au cas de l'incidence normale. Nous allons indiquer rapidement l'ensemble des résultats auxquels elles nous ont conduit.

Quand un faisceau de lumière blanche tombe normalement sur le noir de fumée, le platine platiné, le verre noir dépoli, on reconnaît aisément que les rayons renvoyés obliquement par la partie éclairée de la surface sont polarisés parallèlement au plan qui passe par l'œil et par la direction du rayon incident. On constate, en outre, que l'intensité de la polarisation des rayons diffusés va en croissant, à mesure que leur direction est plus voisine de la surface réfléchissante. Ces résultats ont été donnés par de nombreuses mesures faites le plus souvent avec le polarimètre d'Arago. Les tableaux suivants permettent d'apprécier la marche du phénomène.

INCIDENCE NORMALE	
ANGLE du rayon diffusé avec la normale.	PROPORTION de la lumière diffusée qui est polarisée.
Noir de fumée.	
85°	0,76
70	0,60
60	0,466
50	0,35
40	0,20
20	0,11
Platine platiné.	
85	0,22
70	0,21
30	Insensible.
Verre noir dépoli.	
85	0,47
70	0,45
30	0,06

Quant aux substances blanches voisines de la céruse, les résultats qu'elles nous ont fournis au point de vue de la polarisation lumineuse sont tout semblables à ceux que nous avions déjà obtenus dans les recherches thermoscopiques que nous avions faites sur elles.

Ainsi, la céruse et le soufre lavé, en diffusant dans une direction quelconque de la lumière reçue normalement, ne lui impriment pas de polarisation sensible.

La différence est donc complète entre les façons d'agir de ces deux groupes de corps.

Application photométrique de l'étude de la polarisation imprimée par les corps mats aux rayons lumineux. — D'après

ce que nous avons dit aux pages précédentes, le développement de polarisation dans les rayons diffusés par les corps noirs et mats doit tenir à deux causes :

1° Une différence dans les intensités R et R′ des faisceaux que donnent à la diffusion, dans un plan déterminé et dans la même direction, deux faisceaux calorifiques primitivement égaux et polarisés, l'un dans le plan dont il s'agit, l'autre dans un plan perpendiculaire ;

2° Une différence dans la grandeur de la dépolarisation partielle que la diffusion fait subir à chacun de ces deux faisceaux.

Il est facile de trouver entre ces trois effets une relation qui permet de calculer la grandeur de l'un d'eux, quand celle de chacun des deux autres est connue. En effet, soient nR et $n'R'$ les fractions des faisceaux R et R′ qui gardent après la diffusion leur polarisation primitive, et soit p la proportion de lumière polarisée qui existe dans le faisceau diffusé, on aura :

$$p = \frac{nR - n'R'}{R + R'}$$

d'où

$$p = \frac{n\frac{R}{R'} - n'}{\frac{R}{R'} + 1}.$$

Cette relation très-simple montre que, quand on aura déterminé n, n' et p par expérience, on pourra en conclure $\frac{R}{R'}$, sans qu'il soit besoin de passer par des mesures photométriques directes. Nous allons indiquer quelques-uns des résultats auxquels nous avons été conduits en cherchant à appliquer cette méthode photométrique nouvelle.

Lorsqu'on fait tomber normalement sur une plaque couverte de céruse ou de soufre lavé un faisceau complétement polarisé dans un azimut quelconque, on ne retrouve que de très-faibles proportions de lumière polarisée dans les rayons diffusés sous les angles 30° et 70°, et par suite on peut admettre que pour ces substances la dépolarisation lumineuse, comme la dépolarisation calorifique, est complète ou presque complète. Avec le noir de fumée, le platine platiné, le verre noir dépoli, on obtient des résultats tout autres, ainsi que cela résulte des observations suivantes :

INCIDENCE NORMALE.			
LUMIÈRE polarisée à l'incidence parallèlement au plan de diffusion.		LUMIÈRE polarisée à l'incidence perpendiculairement au plan de diffusion.	
ANGLE des rayons diffusés avec la normale.	VALEUR DE n ou degré de polarisation du rayon diffusé.	ANGLE des rayons diffusés avec la normale.	VALEUR DE n' ou degré de polarisation du rayon diffusé.
	Noir de fumée.		
30°	0,85	30°	0,82
70	0,85	70	0,45
85	0,87 ?	85	0,19
	Verre noir dépoli.		
30	0,87	30	0,84
70	0,83	70	0,58
85	0,77	85	0,40
	Platine platiné.		
30	0,81	30	0,80
70	0,75	70	0,58
85	0,56	85	0,37

En mettant dans la formule :

$$\frac{nR - n'R'}{R + R'} = p$$

les valeurs de n et n' tirées de ces tableaux et la valeur de p données page 662, on en déduit pour $\frac{R}{R'}$ celles que nous allons transcrire :

NOMS DES SUBSTANCES.	INCIDENCE NORMALE.	
	ANGLES de diffusion.	VALEURS de $\frac{R}{R'}$.
Noir de fumée........	30°..............	1,26
	70	4,2
	85	9,0
Verre noir dépoli......	30	1,1
	70	2,7
	85	2,9
Platine platiné........	30	1,0
	70	1,46
	85	1,74

Les erreurs inévitables que comportent les déterminations expérimentales de n, n' et p se reportent nécessairement sur la valeur de $\frac{R}{R'}$. Toutefois, les nombres précédents établissent sans aucun doute, d'une part, que pour un même corps $\frac{R}{R'}$ varie avec l'angle de diffusion; d'autre part, que pour un même angle, $\frac{R}{R'}$ varie beaucoup avec le corps que l'on considère.

Action des surfaces noires dépolies sur les rayons polarisés qui tombent normalement sur elles. — L'existence de ces différences est un fait que l'on peut aisément vérifier par une expérience directe et qui nous a paru fort curieuse.

On polarise dans un plan connu, vertical par exemple, un rayon réfléchi par un héliostat; puis on le reçoit sur une lame de quartz, dont la section principale est inclinée à 45° sur le plan de polarisation primitif. La lumière qui en émerge traverse un nouveau spath qui la bifurque en deux faisceaux de même intensité polarisés dans des directions rectangulaires entre elles.

Ces deux faisceaux, tombant normalement sur une plaque noircie à la flamme de la térébenthine, ou sur du verre noir

dépoli, ou enfin sur du platine platiné, donnent deux images qui ne paraissent égales que dans les cas suivants :

1° Quand on les regarde normalement à la plaque;

2° Quand, pour les observer, on place l'œil dans un azimut incliné à 45° sur les plans de polarisation des rayons incidents.

Hors ces cas, les images sont inégales.

Dans un même azimut, la différence de leurs intensités croît avec l'obliquité des rayons qu'elles envoient à l'œil. Et lorsqu'on passe d'un azimut à l'autre, on voit facilement que la différence de leurs intensités est la plus grande possible quand le plan normal dans lequel on observe est parallèle à celui de la polarisation d'un des rayons incidents. C'est alors l'image correspondante à ce rayon qui a la plus grande intensité.

Polarisation de la lumière diffusée par les corps presque polis. — Les valeurs numériques données dans les tableaux des pages précédentes sont évidemment relatives aux plaques dont nous faisions usage. Elles subiraient nécessairement des modifications si l'on apportait de grandes modifications dans l'état physique des enduits dont nous les avions couvertes, si, par exemple, on les amenait à prendre un demi-poli qui les rapprocherait des miroirs. Nous avons évité cet état particulier toutes les fois que nous avons voulu étudier les phénomènes produits par des corps à surface mate et possédant seulement le degré d'*uni* que l'on obtient avec les couleurs fines. Mais quelquefois aussi, et comme étude de la transition entre les phénomènes de diffusion et ceux de la réflexion régulière, nous avons observé, sur des miroirs de verre ou de métal, les effets de dissémination lumineuse qui se font en dehors de la direction de la réflexion régulière.

Lorsqu'on se borne à observer ce qui se passe dans le plan d'incidence, on reconnaît aisément que dans le voisinage de la direction de la réflexion régulière, la lumière diffusée est polarisée dans le plan d'incidence. Mais lorsqu'on s'écarte de la direction de la réflexion régulière, soit dans un sens, soit dans l'autre, on trouve deux points neutres au delà desquels le plan de polarisation de la lumière diffusée est perpendiculaire au plan d'incidence. La position des points neutres dépend de la nature du miroir et de la manière dont il a été travaillé, tellement que, lorsque, sans changer la substance dont le miroir est fait, on la prend de plus en plus dépolie, on voit les points neutres s'écarter de plus en plus de la direction de la réflexion régulière; et l'on arrive ainsi par degrés aux phénomènes que présentent les corps absolument mats;

Action des surfaces striées. — Avant de terminer ce qui est relatif à la diffusion par réflexion, nous ajouterons quelques renseignements sur les phénomènes qu'on observe lorsque les surfaces diffusantes sont des sortes de réseaux obtenus en couvrant une plaque, primitivement polie, de stries fines, parallèles ou croisées, telles qu'on les produit à l'aide de l'action mécanique régulière d'une pointe fine, mue par une vis micrométrique dans une direction perpendiculaire à celle des traits qu'on lui fait tracer. Nous avons opéré sur des surfaces ainsi préparées dans le premier travail que nous avons publié en 1848 sur la diffusion, et nous avons alors constaté qu'au point de vue de la dissémination de la chaleur, l'action des surfaces d'or ou d'argent ainsi préparées se rapproche beaucoup de celle qu'exercent des plaques de cuivre argentées ou dorées au mat par les procédés industriels ordinaires.

Recherches de M. Fiseau. — Depuis ces premiers essais, M. Fiseau a soumis à une analyse plus complète l'action de surfaces finement striées d'une façon rigoureusement régulière, et parmi les résultats intéressants qu'il a obtenus dans cette étude, nous citerons les suivants :

Par des procédés convenables, M. Fiseau traça, sur une plaque métallique polie, une strie extrêmement fine, mais plus profonde à l'une des extrémités qu'à l'autre ; puis, faisant tomber sur cette strie un rayon de lumière oblique à la plaque, mais normal à la strie, il observa la lumière renvoyée d'abord dans la direction de la réflexion régulière, puis dans d'autres directions, toutes situées dans le plan de réflexion, et il reconnut premièrement que dans la direction de la réflexion régulière, la lumière renvoyée par la strie était polarisée partiellement dans le plan d'incidence, et en second lieu que dans les directions autres que celles de la réflexion, le rayon renvoyé par les parties les plus larges de la strie, était encore polarisé partiellement dans le plan d'incidence, tandis qu'il était polarisé dans une direction perpendiculaire à celle-ci, quand il avait été réfléchi par les parties les plus fines du sillon. Dans ces expériences, la strie était d'une finesse telle que sa profondeur était de beaucoup inférieure à celle de la longueur d'onde de la lumière employée.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces phénomènes, et quant à la diffusion par réfraction, nous n'en parlerons pas ici. On trouvera quelques données sur ce point dans les mémoires de M. Fiseau, dans les nôtres et dans ceux qui ont été depuis publiés sur ce sujet par MM. Stokes, Holtemann, Einsenlhor et Lorenz. (*Ann.*, t. LV et t. LXI, série 3.)

CHAPITRE XII

POLARISATION DE LA CHALEUR PAR ÉMISSION. THÉORÈMES FONDAMENTAUX TOUCHANT L'ÉQUILIBRE DE TEMPÉRATURE.

Recherches de MM. de la Provostaye et P. Desains.

§ 1. — DÉMONSTRATION DU FAIT DE LA POLARISATION DE LA CHALEUR PAR ÉMISSION.

Polarisation des rayons émis obliquement par les corps. — La découverte de la polarisation donnée à la chaleur par la réflexion paraissait avoir apporté dans la théorie de l'équilibre mobile de température des complications et des difficultés que Poisson signale dans ses mémoires et dans son traité de la chaleur, mais sans essayer de les résoudre.

Que l'on considère une enceinte dont tous les points sont à même température, que dans cette enceinte il y ait une surface plane réfléchissante AB (fig. 777), et ne nous préoccupons point d'abord des effets de polarisation découverts par M. Berard ; en d'autres termes, supposons que tous les rayons qui circulent dans l'enceinte soient à l'état naturel. La chaleur qui chemine suivant toutes les droites qu'on peut mener d'un point quelconque de AB à un point quelconque d'une portion A'B' de l'enceinte se compose de rayons *e* émis par AB et de rayons *r* réfléchis sur cette surface. La somme de ces rayons émis et réfléchis compose une partie *q* de la chaleur totale Q reçue par A' B' et destinée à compenser ses pertes ; d'autre part, une partie *z* de la perte totale Z que A B éprouve par émission est compensée par la portion absorbée du faisceau incident I qui a donné *r* à la réflexion.

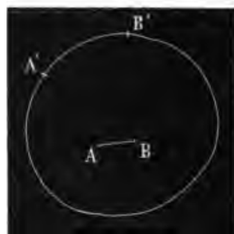


Fig. 777.

L'équilibre subsistant par suite des échanges que nous indiquons, si ce faisceau incident I venait tout à coup à être polarisé soit partiellement, soit complétement et sans qu'aucune autre

modification fût apportée d'ailleurs au reste de la chaleur cheminant dans l'enceinte, la quantité r et par suite q se trouveraient changées, et la grandeur des changements subis par ces quantités dépendrait de la direction du plan de polarisation de I. Dans tous les cas, l'équilibre ne saurait subsister.

Nous pensons avoir résolu cette difficulté en démontrant :

1° Que la chaleur émise dans une direction oblique, par un élément plan, doué de pouvoir réflecteur, est toujours partiellement polarisée dans un plan perpendiculaire à celui de l'émission.

2° Que dans une enceinte en équilibre cette polarisation partielle des rayons émis par un élément quelconque compense complétement les effets de polarisation partielle due à la réflexion sur le même élément, en telle sorte que dans toute direction il ne chemine jamais que de la chaleur naturelle.

M. Arago avait reconnu depuis longtemps que la lumière émise par plusieurs corps solides ou liquides incandescents est partiellement polarisée dans un plan perpendiculaire à celui de l'émission. Mais il n'avait pas remarqué que la proportion dans laquelle cette lumière est polarisée par émission eût un rapport quelconque avec la proportion dans laquelle la lumière est polarisée par réflexion, et de plus on n'avait jamais cherché à voir si l'émission calorifique est aussi accompagnée de polarisation des rayons émis ; on n'avait pas songé non plus aux conséquences qui résultent de cette polarisation touchant la nature des rayons qui cheminent dans les enceintes.

Il est très-facile de mettre en évidence le fait de la polarisation de la chaleur par émission. Dans l'une de nos expériences, nous prenions pour source de chaleur une lame de platine, maintenue au rouge par une lampe à alcool à double courant. Les rayons étaient émis sous l'angle de 70°, ils traversaient une pile de mica inclinée de 35° sur l'axe du faisceau et venaient ensuite tomber sur la pile thermo-électrique. Les déviations étaient de 24,5 lorsque le plan de réfraction du mica était parallèle à celui de l'émission, et seulement de 8,3 quand il lui était perpendiculaire. Dans une autre expérience, où la lame était beaucoup moins chauffée et même complétement invisible dans l'obscurité, nous avons obtenu les déviations 4,5 et 1,5, et, en opérant ensuite avec le platine platiné, substance qui polarise moins fortement que le platine métallique, mais qui émet bien davantage, nous avons pu avoir des résultats fort nets entre 330° et 360°.

Nous ajouterons que, pour toutes les substances que nous avons essayées, la polarisation a disparu quand l'émission a eu lieu dans une direction normale à la surface.

perpendiculaire au plan d'incidence. Dès lors, pour calculer la quantité de chaleur polarisée qui existe dans ce rayon sous un angle quelconque, il suffit de connaître l'intensité de la réflexion des vibrations polarisées dans les deux plans principaux.

Mais quand la réflexion a lieu sur une surface mate, les faisceaux polarisés à l'incidence dans l'un ou l'autre des deux plans principaux éprouvent en général une dépolarisation partielle. Nous avons toujours trouvé que cette dépolarisation est plus forte pour les rayons polarisés dans le plan perpendiculaire au plan de réflexion que pour ceux qui sont polarisés dans ce plan, et cette dépolarisation plus forte du faisceau polarisé perpendiculairement au plan d'incidence contribue à accroître dans le rayon diffusé la proportion de chaleur polarisée dans le plan d'incidence.

Ainsi, lorsque sous l'angle de 70° on fait tomber sur la céruse de la chaleur polarisée parallèlement au plan d'incidence, le rayon renvoyé dans la direction de la réflexion régulière renferme encore 0,87 de chaleur polarisée dans le plan de polarisation primitif. Au contraire, si la chaleur incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, le faisceau renvoyé dans la même direction que précédemment est sans doute encore polarisé partiellement dans le même sens que le faisceau primitif, mais il ne renferme plus que 0,58 environ de chaleur polarisée.

Cette action dépolarisante est fort curieuse. Pour la céruse et ses analogues, elle est complète ou presque complète, lorsque les rayons incidents sont normaux, c'est-à-dire, qu'alors la chaleur diffusée dans toutes les directions possibles paraît naturelle, quoique les rayons incidents fussent complétement polarisés. Comme, d'une autre part, dans le cas de l'incidence normale, la loi de distribution de la chaleur diffusée est indépendante de la direction du plan de polarisation primitif, on est en droit d'en conclure que la céruse et ses analogues ne polarisent pas sensiblement la chaleur diffusée dans le cas de l'incidence normale. Mais il faudrait bien se garder de trop généraliser cette loi, il est des classes entières de corps auxquels elle n'est plus applicable.

§ 2. Polarisation de la lumière irrégulièrement réfléchie.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, une des principales difficultés que l'on rencontre dans l'étude de la diffusion calorifique est l'extrême petitesse des effets que l'on veut mesurer.

Mais la sensibilité de l'œil est de beaucoup supérieure à celle des thermoscopes les plus délicats, et dès lors nous pouvions espérer qu'en étudiant à son tour la polarisation de la lumière par diffusion, nous arriverions à traiter optiquement des problèmes dont la solution ne pouvait s'obtenir par nos méthodes calorimétriques ordinaires.

Tel est en particulier le cas de la diffusion à la surface du noir de fumée. Lorsqu'on fait tomber un rayon solaire sur une surface couverte de noir de fumée, on distingue très-bien le point touché par les rayons incidents, et cela dans quelque direction que l'on se place pour faire l'observation ; en d'autres termes, l'œil est assez sensible pour être impressionné par la lumière diffusée par le noir, tandis que nos thermoscopes n'ont jamais pu accuser l'action calorifique de ces rayons.

Nous avons donc étudié optiquement la question du développement de la polarisation par l'acte de la diffusion à la surface du noir de fumée et de plusieurs autres corps noirs dépolis. Nos recherches sont surtout relatives au cas de l'incidence normale. Nous allons indiquer rapidement l'ensemble des résultats auxquels elles nous ont conduit.

Quand un faisceau de lumière blanche tombe normalement sur le noir de fumée, le platine platiné, le verre noir dépoli, on reconnaît aisément que les rayons renvoyés obliquement par la partie éclairée de la surface sont polarisés parallèlement au plan qui passe par l'œil et par la direction du rayon incident. On constate, en outre, que l'intensité de la polarisation des rayons diffusés va en croissant, à mesure que leur direction est plus voisine de la surface réfléchissante. Ces résultats ont été donnés par de nombreuses mesures faites le plus souvent avec le polarimètre d'Arago. Les tableaux suivants permettent d'apprécier la marche du phénomène.

platine rouge se réfléchit sur le platine froid dans la proportion de 0,94 quand elle est polarisée dans le plan de réflexion, et dans la proportion de 0,66 quand elle est polarisée dans le plan perpendiculaire, d'où l'on conclut que le rayon réfléchi provenant d'un rayon naturel contient une proportion de chaleur polarisée dans le plan d'incidence égale à $\frac{94-66}{94+66} = 0,175$.

Ceci posé, considérons une enceinte fermée de platine incandescent et dont tous les points soient à même température; le pinceau qui dans cette enceinte se dirige d'un élément à l'autre sous une inclinaison déterminée est formé d'une portion émise et d'une portion réfléchie. Ces portions sont entre elles comme les pouvoirs émissifs et réflecteurs du platine. Sous l'incidence de 70°, le rapport est celui de 20 à 80. Le faisceau réfléchi égal à 80 renferme donc $80 \times 0,175 = 14$ rayons polarisés dans le plan de réflexion; mais d'après le tableau de la page 670 il doit contenir $20 \times 0,70 = 14$ rayons polarisés perpendiculairement au plan de réflexion.

L'égalité de ces nombres $80 \times 0,175$ et $20 \times 0,70$ établit l'exactitude de notre proposition.

Cas de la lumière. — Cette proposition est un fait général, et il résulte de nos études sur l'émission lumineuse qu'elle s'applique aussi bien aux radiations optiques qu'aux radiations calorifiques.

La marche que nous avons suivie pour le prouver est toute semblable à celle que nous venons de développer; d'abord, nous avons, tantôt avec une pile de glaces, tantôt avec une pile de mica, étudié la composition de la lumière émise obliquement par une lame de platine incandescente; et nous avons reconnu que sous les angles d'émission 70°, 60° et 50°, les faisceaux lumineux émis contiennent respectivement 0,45, 0,32 et 0,265 de lumière polarisée.

D'autre part, nous avons étudié, dans tous ces cas, le pouvoir réflecteur du platine pour la lumière, et nous avons trouvé :

1° Que sous l'angle 70° le pouvoir réflecteur du platine pour la lumière d'une lampe est 0,60, d'où résulte que sur 100 rayons qui cheminent dans une enceinte de platine incandescent, 60 sont réfléchis et 40 émis;

2° Que sous l'angle 70° les premiers contiennent 0,30 de lumière polarisée parallèlement à l'incidence, ou bien une quantité absolue de cette lumière égale à $60 \times 0,30 = 18$.

Les seconds contiennent 0,45 de lumière polarisée perpen-

diculairement au plan d'émission, ou en valeur absolue $40 \times 0,45 = 18$ rayons ainsi polarisés.

L'égalité se soutient donc, et il en est de même sous tous les angles.

§ 3. — REMARQUES RELATIVES A LA COMPOSITION DES FAISCEAUX CALORIFIQUES QUI CHEMINENT DANS UNE ENCEINTE DE TEMPÉRATURE DONNÉE.

Nous avons fait voir dans les paragraphes précédents comment, en introduisant dans une enceinte primitivement noire des éléments doués de pouvoir réflecteur et en équilibre de température avec elle, on n'altère pas au point de vue de la polarisation la neutralité de la chaleur qui y chemine dans les différentes directions.

Il est nécessaire pour que l'équilibre subsiste que cette neutralité ait lieu; mais il ne l'est pas moins que la composition des faisceaux calorifiques soit la même dans toutes les directions et la même que si toute l'enceinte et les corps qu'elle renferme étaient noirs.

Supposons en effet, d'abord, comme à la page 668, une enceinte en équilibre de température et complétement noircie à l'exception d'un élément AB (fig. 778) qui aura un certain pouvoir réflecteur. Si le faisceau qui tombe sur l'élément suivant la direction PC éprouve seul et sans changement d'intensité une modification dans sa nature, la proportion absorbée par AB et celle qui sera réfléchie seront modifiées toutes deux, et l'équilibre ne subsistera plus.



Fig. 778.

Or, nous avons prouvé qu'à même température, la nature de la chaleur émise par un corps change avec la nature de sa surface; il faut donc en conclure qu'il en est de même de celle qu'il réfléchit ou disperse. Ce changement apporté par la réflexion régulière ou irrégulière à la nature de la chaleur incidente est analogue à celui que la lumière éprouve en se réfléchissant à la surface des corps colorés. Nous l'avons mis en évidence par des expériences directes faites sur la réflexion des corps polis, et M. Knoblauch a établi que la diffusion est également apte à modifier la composition de la chaleur incidente.

Seulement ici nous n'avons pas à citer d'expériences directes

qui prouvent cette identité de composition de la chaleur qui, à une température donnée, circule dans une enceinte en équilibre.

§ 4. — RÈGLE DE FOURIER. — GÉNÉRALISATION DE CETTE RÈGLE.

Le nouveau théorème de chaleur rayonnante que nous venons d'indiquer au paragraphe précédent se trouve, aussi bien que ceux que nous avons démontrés auparavant, résumés dans une sorte de règle ou formule empirique, que Fourier a donnée et employée le premier sans en connaître lui-même toute la généralité. Voici, à la forme près, en quoi consiste la règle de Fourier :

Lorsqu'un corps Q est placé dans une enceinte à même température que lui, pour se rendre un compte exact de toutes les particularités des échanges de chaleur qui se font entre lui et les différentes parties de l'enceinte par l'intermédiaire d'un élément quelconque ω, il faut assimiler le corps lui-même à une seconde enceinte, en équilibre de température avec la première, et admettre que l'élément ω agit de la même façon sur les rayons qui viennent du dehors suivant la direction A*a* pour entrer dans le corps, et sur ceux qui tendent à en sortir suivant la direction *a*'A', symétrique de A*a*, par rapport à la surface de l'élément ω.

Pour montrer toutes les conséquences de cette règle simple, supposons d'abord les deux enceintes noircies et considérons deux cylindres (fig. 779) ayant ω pour base, et parallèles, l'un à ωA, l'autre à la direction ωA', symétrique de ωA. Ces deux cylindres ont même section droite, et les quantités de chaleur qui cheminent dans l'un et dans l'autre, dans des directions parallèles à leurs axes, sont égales; et il en est de même des quantités de chaleur qui cheminent dans les cylindres ω*a*' et ω*a*, prolongements des premiers.

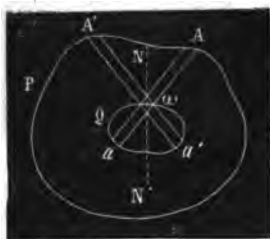


Fig. 779.

Si ω vient à acquérir un pouvoir réflecteur, que ce pouvoir soit ou non variable avec la longueur d'onde des rayons élémentaires qui composent les faisceaux qui cheminent suivant Aω d'une part et A'ω de l'autre, le faisceau total qui marchera de

ω vers A' sera identique à celui qui venait primitivement de A vers ω, car tous ceux de ces derniers rayons qui auront continué leur route suivant ωa seront remplacés par d'autres rayons de même nature et de même intensité que le faisceau $a'\omega$ aura donnés à travers l'élément ω; en rendant métallique un élément ω, on n'a donc troublé ni l'équilibre de température ni la double neutralité des faisceaux qui circulent dans l'enceinte; on ne l'altérerait pas davantage en supposant un nombre quelconque d'autres éléments devenus métalliques à leur tour.

L'application du principe de Fourier au calcul de la proportion dans laquelle se trouve polarisée, soit la chaleur, soit la lumière, émises par les corps incandescents, se fait d'elle-même; et, comme nous l'avons fait voir dans nos recherches sur ce sujet, l'expérience vérifie complétement les résultats auxquels conduit cette règle empirique.

La règle que nous venons d'exposer était, pour Fourier, la traduction physique du principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants. Si, en effet, l'élément ω, lorsqu'il devient métallique, n'émet plus parallèlement à l'axe du cylindre ωA' qu'une fraction α de la quantité totale I de chaleur qu'il envoyait primitivement dans cette direction, cela tient à ce qu'il réfléchit à l'intérieur suivant ωa la portion $I(1-\alpha)$ du même rayon; mais alors il réfléchira aussi cette même fraction $1-\alpha$ du faisceau d'intensité I qui lui vient de l'élément A, noirci comme a' et à même température que lui. Ainsi par cela seul que ω n'émettra plus, dans une direction donnée, qu'une fraction α de la chaleur I qu'il aurait émise dans cette direction s'il eût été noir, il n'absorbera plus qu'une même fraction α d'un même faisceau d'intensité I, partant d'un corps noirci à même température que ω et rencontrant sa surface dans la direction même de l'émission que nous considérons.

§ 5. — DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DE L'ÉGALITÉ DES POUVOIRS ÉMISSIFS ET ABSORBANTS. — RECHERCHES DE M. DE LA PROVOSTAYE.

Le principe de l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants est un des principes fondamentaux de la théorie des échanges de chaleur. Fourier avait voulu le déduire géométriquement de ce seul fait que l'équilibre se maintient par voie d'échanges entre tous les points d'une enceinte préservée de toute déperdition de chaleur à l'extérieur. Mais la démonstration de ce célèbre géo-

mètre laissait subsister une difficulté qui ne fut pas élucidée par la discussion qui s'éleva à ce sujet entre Poisson et lui.

Depuis, M. Kirchhoff, d'une part, et M. de la Provostaye, de l'autre, sont revenus sur ce sujet.

Je vais exposer ici la solution donnée par M. de la Provostaye, ou plutôt, je vais la reproduire textuellement telle qu'il l'a publiée dans l'ensemble des *Considérations théoriques sur la chaleur rayonnante,* insérées aux *Ann. de chimie et physique,* série 3, t. 67.

« Soit ω (fig. 780) un élément circulaire doué de pouvoir réflec-

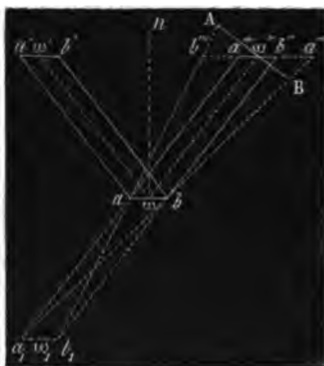


Fig. 780.

teur, et que nous supposerons d'abord plan; par son centre ω on élève une normale ωn et on mène la droite $\omega\omega'$, puis dans le plan $\omega'\omega n$ et de l'autre côté de la normle on trace $\omega\omega''$ également inclinée. Enfin par les différents points du contour de ω on mène deux surfaces cylindriques $a'abb'$, $a''abb''$, dont $\omega\omega'$, $\omega\omega''$ sont les axes, qui découpent sur un même plan noir parallèle à ω deux éléments ω' et ω'', tels que $\omega' = \omega = \omega''$.

L'élément noir ω' envoie vers ω la chaleur $I\omega \sin i$ dont une partie α_i est absorbée; l'autre est réfléchie et prend après la réflexion la même direction que si elle partait d'un élément ω_1, symétrique de ω'. Par conséquent le pinceau de rayons partis de a' va s'épanouir sur le cercle $a''a'''$, le pinceau parti de b' sur le cercle $b'''b''$, et ainsi de suite. Nous appellerons Ω'' la surface circulaire totale dont le diamètre est $b'''a'''$. C'est la chaleur totale ρ_1 réfléchie vers Ω'' qui, réunie à la chaleur absorbée par ω, reproduirait la chaleur incidente.

(1) $$\varepsilon_i + \rho_1 = I\omega \sin i$$

Remarquons ici en passant que si, sans changer les longueurs des droites $\omega\omega'$, $\omega\omega''$, on les incline plus ou moins sur la normale, et qu'on mène de nouveau par les extrémités ω', ω'', un plan parallèle à ab, les cylindres circonscrits à ω, et dont les arêtes sont respectivement parallèles à $\omega\omega'$, $\omega\omega''$, découperont toujours deux éléments $\omega'' = \omega' = \omega$, et que de plus Ω'' conservera la même grandeur pour toutes les inclinaisons.

Si maintenant on considère ce qui chemine en sens inverse entre l'élément plan ω et l'élément plan ω', il faut pour l'équilibre que ϵ_i, quantité émise par ω vers ω', augmentée de ρ_2, chaleur totale réfléchie suivant la direction du cylindre $a'abb'$, soit égale à $I\omega \sin i$ que ω' envoie à ω. Mais la chaleur réfléchie ρ_2 ne provient pas seulement de ω'', elle provient de Ω'', puisque à tout rayon venant de ω' à Ω'' correspond un rayon marchant en sens contraire de Ω'' vers ω :

(2) $$\epsilon_i + \rho_2 = I\omega \sin i.$$

d'où

(3) $$\varepsilon_i + \rho_1 = \epsilon_i + \rho_2.$$

Les relations (1), (2), (3), qui ne semblent établies que pour un cas particulier, sont générales.

En effet, sans rien altérer, on peut remplacer ω' par toute autre section du cylindre $a'abb'$ faite à la même distance, et en particulier par la section droite s. La chaleur incidente a donc pour expression $I.s$. La portion réfléchie $\rho_1 = I.s.R_i$; R_i désignant le *pouvoir réflecteur,* fraction qui dépend de la substance dont est formé ω, de la composition de la chaleur I et de l'inclinaison i.

On ne changera pas ρ_1 en la recueillant sur un plan plus ou moins incliné aux rayons réfléchis, en les recevant par exemple sur $AB = \Omega'' \sin i = S$.

La chaleur envoyée par Ω'' vers un élément plan parallèle et égal dont le centre serait en ω, milieu de ab, aurait pour expression $I\Omega'' \sin i = IS$. Mais comme une fraction seulement de cette chaleur $f.I.S$ est susceptible de parvenir à ω' en se réfléchissant sur l'élément ω, et y serait effectivement envoyée si le pouvoir réflecteur était absolu, la quantité réfléchie $\rho_2 = f.I.S.R_i$; R_i est ici le même que plus haut; car, à un infiniment petit près, l'inclinaison n'a pas changé.

Si on éloigne de ω le centre de S, ρ_1 ne change pas ; ρ_2 devient $f'.S'.I.R_i$, f' et S' étant les valeurs que prennent f et S pour cette nouvelle position; mais d'après l'équation (2), il faut que $f'.S'=f.S$, puisque ϵ_i, chaleur émise par ω vers ω', ne dépend pas de la distance à laquelle se trouve placée S ou $\Omega''sini$.

Si l'on rend m fois plus grande la distance $\omega\omega'$, tous les termes des équations (1), (2), (3) sont multipliés par $\frac{1}{m^2}$ qui disparaît comme facteur commun.

Enfin on peut substituer aux éléments plans ω' et ω'' des éléments infiniments petits, concaves ou convexes, limités par les mêmes cylindres, puisque ces éléments sont noirs et envoient vers ω précisément la même quantité de chaleur $I\omega\, sin\, i$.

Ainsi, d'une manière générale, dans une enceinte noire de forme quelconque dont un seul élément *plan* est doué de pouvoir réflecteur, on a

$$(1) \qquad I.s = \epsilon + I.s.R_i.$$

$$(2) \qquad Is = \epsilon_i + f.S.I.R_i.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_i - \epsilon_i &= I.R_i(f.S - s) \\ &= I.\omega.sin\,i.R_i\left(f\frac{\Omega''}{\omega} - 1\right) \\ &= I.\omega.sin\,i.R_i(k-1), \\ \frac{\epsilon_i}{I\omega\, sin\, i} - \frac{\epsilon_i}{I\omega\, sin\, i} &= R_i(k-1). \end{aligned} \right.$$

Sans prétendre que géométriquement on ne puisse pas regarder comme suffisamment claire l'égalité de $f.S$ et de s, nous croyons qu'il est préférable de s'appuyer une fois de plus sur l'expérience. Nous disons *une fois*, car si, pour une température donnée, c'est-à-dire pour une certaine valeur finie de I, et pour un corps donné, c'est-à-dire pour une valeur finie de R_i, l'expérience donne

$$\frac{\epsilon_i}{I\omega\, sin\, i} = \frac{\epsilon_i}{I\omega\, sin\, i},$$

il faudra en conclure que $f.S = s$ ou $k = 1$, que $\rho_1 = \rho_2$, et par suite que : *Dans tous les cas, pour tous les corps doués de pouvoir réflecteur régulier, sous toutes les inclinaisons et à chaque température,* on a *le pouvoir émissif égal au pouvoir absorbant.*

L'expérience que nous invoquons pour établir cette proposition a été faite surabondamment, puisque, à plusieurs températures, il est vrai peu différentes, on a constaté l'égalité des pouvoirs émissifs et absorbants de *plusieurs substances* dans la direction normale, et cette même égalité *pour le verre* sous trois inclinaisons diverses[1]. »

CHAPITRE XIII.

ÉMISSION DE LA LUMIÈRE. — PHOSPHORESCENCE. — RADIATIONS CHIMIQUES.

§ 1. — POUVOIRS ÉMISSIFS DES CORPS POUR LA LUMIÈRE.

Recherches de MM. de la Provostaye et P. Desains. — La précision avec laquelle la règle de Fourier permet de calculer la proportion de lumière polarisée qui se trouve dans le rayonnement d'un corps incandescent, établit une grande analogie entre la théorie de l'émission lumineuse et celle de l'émission calorifique. Deux autres phénomènes complètent la ressemblance : d'abord, à même température, des corps incandescents vus dans une enceinte noire offrent souvent des teintes différentes; mais, de plus, il résulte d'un travail publié par nous en 1854 qu'à même température deux corps différents peuvent émettre des quantités de lumière très-inégales.

Pour mettre le fait en évidence, nous couvrons d'oxyde noir de cuivre une moitié de la face antérieure d'une petite lame d'or ou de platine, et nous noircissons de même l'autre moitié de la surface postérieure.

1. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire, nous rappellerons ici le procédé suivi. (Voir page 597.)

« Un grand vase A noirci, plein d'eau ou d'huile, suivant qu'on voulait atteindre telle ou telle température, était la source de chaleur. La pile thermo-électrique P, placée à une distance notable, était l'appareil thermoscopique. Deux écrans percés d'ouvertures étroites EE', FF', limitaient le faisceau incident qui était très-peu divergent, puisque les rayons extrêmes sous-tendent sensiblement à l'arrivée

Ceci posé, nous portons la lame à l'incandescence à l'aide d'un courant électrique convenable. Les portions noircies deviennent alors beaucoup plus brillantes que celles qui ont conservé l'éclat métallique.

Les différences, fortes avec le platine, le sont beaucoup plus encore avec l'or. Elles disparaissent, ou à peu près, quand on compare le noir au borate de plomb.

Malgré les différences de couleur des deux parties de la lame, on peut comparer approximativement au moins leurs pouvoirs émissifs; pour cela on regarde normalement la lame incandescente à travers un prisme de nicol qui polarise la lumière, et un spath dont on tourne la section principale de manière :

l'angle $\frac{FF'}{EF}$. Dans les cas les plus défavorables, la réflexion ne change pas d'une manière appréciable pour une variation d'incidence de 1 ou 2°. La réflexion sous l'angle i avec la surface est donc égale, dans les limites de précision de l'expérience, à la réflexion sous l'angle $i \pm \frac{FF'}{EF}$, et on peut, sous ce rapport du moins, négliger la divergence des rayons incidents.

On note la déviation produite par le rayonnement direct, puis on interpose obliquement à LL' un miroir MM formé de la substance dont on veut trouver le pouvoir réflecteur. On amène la règle qui porte la pile dans une position telle que $l'HN = LHN = 90° - i$. Cela fait, il est facile de voir, en suivant la marche de l'un quelconque des rayons, que ceux d'entre eux qui traverseront la fente ff' après la réflexion seront exactement ceux qui entraient en FF' dans la première expérience, ni plus ni moins et avec le même degré de divergence; de sorte que, en appelant faisceau incident I.s, non pas le faisceau cylindrique total Err'E', mais bien la portion de ces rayons qui entreraient par FF' si on enlevait le miroir, et ρ_i ce qu'en renvoie le miroir à travers $ff' = FF'$, le rapport des deux déviations galvanométriques donne le quotient $\frac{\rho_i}{I.s}$, c'est-à-dire le rapport entre une certaine quantité de chaleur réfléchie et la quantité de chaleur d'où elle provient, seule efficace.

On peut remarquer, mais au point de vue pratique cela n'a aucune importance, que si l'on voulait prendre pour chaleur incidente le faisceau Err'E' tout entier, il faudrait recueillir tout le faisceau réfléchi qui s'étale sur un espace beaucoup plus grand que ff'.

La portion rr' du miroir absorbe une quantité α_i du faisceau efficace considéré, et comme on a nécessairement $\alpha_i + \rho_i = I.s$, il faut que $\frac{\rho_i}{Is}$ et $\frac{\alpha_i}{I.s}$ soient complémentaires. La détermination du premier quotient donne exactement la valeur du second.

Par une autre série d'expériences, on a déterminé la quantité ϵ_i de chaleur à 100°, 150°, etc., émise sous l'angle i par la substance qui constitue le miroir, et aussi ce qu'envoie la même surface revêtue de noir de fumée I.s. Le quotient $\frac{\epsilon_i}{I.s}$ a été trouvé complémentaire de $\frac{\rho_i}{I.s}$ ou, ce qui revient au même, égal à $\frac{\alpha_i}{I.s}$. »

1° A éteindre l'image extraordinaire ;

2° A rendre l'image ordinaire de la partie noircie égale à l'image extraordinaire de l'autre. La connaissance de l'angle compris entre ces deux positions conduit aisément à celle du rapport cherché.

En opérant ainsi nous avons trouvé que le pouvoir émissif de l'or est à peine égal au dixième de celui de l'oxyde de cuivre, et que le pouvoir émissif du platine est plus grand que celui de l'or, ce qui ne doit pas surprendre d'après ce que l'on sait du rapport des pouvoirs émissifs de ces deux corps pour la chaleur.

§ 2. — PHOSPHORESCENCE.

Nous terminerons ces indications relatives à l'émission lumineuse par une description sommaire des phénomènes connus sous le nom de phénomènes de phosphorescence ou de fluorescence.

Ordinairement les corps qui émettent de la lumière sont portés à une température supérieure à 500°, et quand ils se refroidissent la partie lumineuse de leur rayonnement disparaît alors que les radiations calorifiques qu'ils émettent sont encore très-énergiques. Il en est autrement des substances phosphorescentes naturelles ou artificielles.

Ainsi un morceau de bois de saule qui s'altère, un poisson recemment mort, un morceau de sulfure de baryum qui a été exposé au soleil pendant quelques instants, brillent dans l'obscurité, c'est-à-dire émettent des radiations lumineuses sensibles, et pourtant ils ne produisent pas d'action appréciable sur un thermoscope très-délicat placé à une distance où il serait très-fortement impressionné par une surface noire de même étendue que celle du corps phosphorescent et portée seulement à 400°.

Les phosphores artificiels le plus anciennement connus sont le phosphore de Canton, c'est-à-dire le sulfure de calcium, préparé par l'action du soufre sur les écailles d'huîtres; le phosphore de Bologne ou sulfure de baryum; le phosphore de Baudouin ou azotate de chaux fondu. Les propriétés phosphorescentes du sulfure de strontium ont été découvertes depuis. L'étude de ces phosphores artificiels a occupé un grand nombre de physiciens, et dans ces dernières années, M. Ed. Becquerel a publié plusieurs mémoires sur ce sujet important. Nous résumons ici quelques-unes de ses conclusions.

Recherches de M. Éd. Becquerel. — Lorsque la lumière, et principalement les rayons les plus réfrangibles, impressionnent certains corps, ceux-ci émettent ensuite pendant quelque temps

des rayons lumineux dont la longueur d'onde est en général plus grande que celle des rayons actifs; l'intensité de l'émission décroît très-vite pendant les premiers instants, puis ensuite plus lentement pendant un temps qui varie, suivant les corps, depuis une très-petite fraction de seconde jusqu'à plusieurs heures.

Ensuite, les corps sont complétement inactifs, et pour les rendre de nouveau phosphorescents, il faut les exposer de nouveau à la lumière.

« La réfrangibilité de la lumière émise par les substances phosphorescentes dépend de leur état moléculaire et non pas de leur composition chimique seule. En employant des sulfures alcalino-terreux, il est possible, avec un même corps, d'obtenir une émission de lumière de telle ou telle nuance, et cela suivant la température à laquelle ces corps ont été soumis préalablement...

... Il peut arriver que le même corps émette des rayons de nuances très-diverses, suivant le temps qui sépare le moment où la lumière a agi de celui où l'on observe l'effet produit...

Le temps nécessaire pour que la lumière impressionne les corps peut être extrêmement court. Ainsi, une étincelle électrique, qui ne dure que $\frac{1}{1000000}$ de seconde, peut produire des effets très-appréciables. »

Dans la série de recherches qui lui ont donné les résultats précédents, M. Ed. Becquerel a été conduit à construire deux appareils auxquels il a donné les noms de phosphoroscope par réflexion, et de phosphoroscope par transmission, et à l'aide desquels il a pu commodément introduire l'appréciation de temps très-court dans l'étude des phénomènes.

Phosphoroscopes. — Le phosphoroscope à réflexion est une

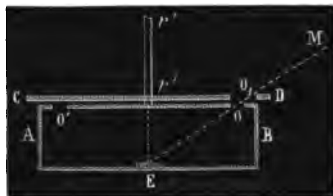


Fig. 781.

sorte de boîte métallique circulaire dont le fond supérieur AB, (fig. 781) percé de deux fentes O et O', situées aux deux bouts

d'un même diamètre, se trouve recouvert par un disque opaque percé d'une seule ouverture O_1, et qui peut, à l'aide d'engrenages convenables, recevoir un mouvement de rotation très-rapide autour de l'axe rr'; au point E où le prolongement idéal de cet axe perce le fond inférieur on place le corps à éprouver : les rayons lumineux tombent sur lui suivant la direction OE, toutes les fois que l'ouverture O est sur la direction qui joint le corps E à la source M, et l'œil placé sur la direction EO' peut recevoir la lumière émise par E, lorsque O_1 vient se superposer à O'; par conséquent, si le corps E est susceptible de devenir phosphorescent et garde la propriété d'émettre la lumière pendant un temps égal seulement à celui d'une demi-révolution du disque, l'œil placé dans la direction EO' le distinguera facilement.

Le phosphoroscope par transmission est applicable au cas des lames translucides. La boîte est verticale, et à la partie supérieure des deux diamètres verticaux qui se correspondent sur ses deux faces, les deux fonds sont percés d'ouvertures égales. Dans l'intérieur de la boîte sont montés, sur un même axe, deux disques opaques, percés chacun de quatre ouvertures situées à 90° l'une de l'autre et toutes semblables à celles des fonds. Ce sont des portions de secteurs de faible angle au centre. On prend soin que les ouvertures de l'un de ces disques ne répondent pas à celles de l'autre, et le corps à observer est mis entre ces deux disques, sur la ligne qui joint les ouvertures des fonds immobiles. L'œil est placé sur cette ligne d'un des côtés de la boîte, le rayon vient de l'autre. Le défaut de correspondance des ouvertures des disques mobiles empêche tout rayon direct de traverser l'appareil; le corps n'est visible que par émission propre.

M. Ed. Becquerel a étudié avec un soin particulier les effets que produisent, dans le phosphoroscope, les composés d'uranium, tels que le verre d'urane et les cristaux d'azotate de ce métal. Il a reconnu que ces derniers commencent à devenir visibles avec une teinte verte très-vive, quand l'observateur peut les voir $\frac{3}{100}$ ou $\frac{4}{100}$ de seconde après l'action de la lumière, et ils offrent le maximum d'éclat quand le temps qui sépare le moment de l'insolation de celui de l'observation n'est que $\frac{1}{1000}$ de seconde environ.

Fluorescence. — Un intérêt tout particulier s'attache à ces résultats. Herschel avait découvert que les rayons ultra-violets, reçus sur une solution de sulfate de quinine, lui donnent, pendant leur action, une belle teinte bleue tendre et opalescente. M. Stokes

avait étendu ces observations : il avait vu que l'eau dans laquelle on a fait séjourner quelque temps du jeune bois de marronnier se comporte comme la solution de sulfate de quinine, et il avait découvert que les composés d'urane deviennent aussi *fluorescents* à un degré remarquable quand on les soumet à l'action de ces rayons. L'analyse que M. Becquerel a faite de ces phénomènes à l'aide de son phosphoroscope montre de la manière la plus évidente que ces brillants effets sont une véritable phosphorescence, mais une de ces phosphorescences qui ne durent que très-peu de temps après le moment où a cessé l'action directe de la lumière excitatrice.

Ainsi les radiations lumineuses, en agissant sur certains corps, peuvent, sans les porter à l'incandescence dans toute leur masse, leur donner la propriété d'émettre, pendant un temps plus ou moins considérable, des vibrations lumineuses; mais cette propriété disparaît à la longue comme les excès de température que ces corps recevraient de l'action d'un rayonnement calorifique énergique.

De ces phénomènes doivent être rapprochés des faits très-curieux découverts par M. Niepce de Saint-Victor.

« On expose aux rayons directs du soleil, pendant un quart d'heure au moins, une gravure qui a été tenue plusieurs jours dans l'obscurité, et dont une moitié a été recouverte d'un écran opaque. On applique ensuite cette gravure sur un papier photographique très-sensible, et après vingt-quatre heures de contact dans l'obscurité on obtient en noir une reproduction des blancs de la partie de la gravure qui dans l'acte de l'insolation n'a pas été abritée par l'écran... Et encore :

« On expose à la lumière une feuille de carton très-fortement imprégnée d'une solution d'acide tartrique ou de sel d'urane. Après l'insolation, on tapisse avec le carton l'intérieur d'un tube de fer-blanc assez long et que l'on ferme hermétiquement, et on peut constater que, même après un long laps de temps, le carton a gardé la propriété d'impressionner un papier sensible absolument comme le ferait une faible source lumineuse. »

Les résultats précédents concordent avec ceux que nous avons déjà fait connaître en parlant de la photographie, pour montrer une analogie complète entre les trois modes principaux d'action qui caractérisent les vibrations éthérées, savoir, l'action calorifique, l'action lumineuse et l'action chimique, et l'on se trouve ainsi conduit à admettre que les radiations chimiques proprement dites sont soumises aux mêmes lois que les radiations calorifiques et lumineuses, soit dans leur propagation à travers un milieu homogène, soit dans les modifications qu'elles éprouvent en passant

d'un milieu dans un autre. Tout ce que nous avons encore à dire sur les radiations chimiques ne fait que confirmer cette proposition importante.

L'action de la lumière sur le chlorure d'argent a été découverte par Scheele; et, de plus, il fut établi par les observations de ce physicien que toutes les régions du spectre ne possèdent pas au même degré l'activité chimique; le chlorure, soumis à l'expérience, noircissait en effet beaucoup plus vite dans les rayons bleus ou violets que dans tous les autres.

Trente ans après les travaux de Scheele, Ritter et Wollaston constatèrent l'existence de rayons ultra-violets, invisibles, en démontrant que du chlorure d'argent placé dans le prolongement d'un spectre solaire et un peu au delà du violet, y noircit encore très-rapidement. L'altération de cette substance serait nulle, au contraire, si on la plaçait dans le rouge ou dans cette région obscure, moins réfrangible que le rouge, qui possède à un haut degré la faculté d'échauffer les corps. Les rayons qui agissent le plus énergiquement sur les sels d'argent sont donc caractérisés par une réfrangibilité moyenne plus grande que celle de la partie la plus lumineuse du spectre.

Ces rayons sont soumis aux lois ordinaires des interférences lumineuses. Young l'a prouvé le premier en montrant qu'un système d'anneaux colorés projeté sur le chlorure d'argent s'y imprime. Plus tard, Arago reproduisit la même expérience sous une autre forme. Il fit voir que les franges de Fresnel se marquent très-bien sur le chlorure récemment préparé, et Fresnel, en rendant compte de cette expérience, fait remarquer qu'on en pourrait déduire la mesure des longueurs d'onde des rayons les plus réfrangibles du spectre solaire. En 1833, M. Abria obtint sur le chlorure d'argent l'empreinte des phénomènes que l'on observe avec la pince à tourmalines. Enfin, comme nous l'avons déjà indiqué, les figures 739, 740, 750 sont des reproductions d'épreuves photographiques. On peut obtenir ces épreuves en opérant dans la lumière prismatique bleue, et lorsque les appareils sont disposés de manière à obtenir ce résultat, il suffit de tourner légèrement le prisme pour ne plus jeter sur les verres que les rayons ultra-violets. L'impression ne s'en fait pas moins bien, et cette seule expérience étend toutes les lois de l'optique aux rayons chimiques invisibles.

Ainsi, tous les rayons qui émanent d'un corps incandescent sont soumis, dans leurs mouvements, aux mêmes lois générales. Seulement, des uns aux autres, varie la grandeur absolue des effets de réflexion, de réfraction, d'absorption qu'ils subissent

dans des circonstances identiques. Enfin, si dans toute l'étendue d'un spectre provenant de la dispersion d'un faisceau de radiations complexes on considère des tranches de même surface, l'ensemble des rayons qui passent par chacune d'elles possédera à des degrés très-différents la propriété d'échauffer les corps, d'éclairer l'œil ou de produire des actions chimiques. Dans un spectre formé avec un prisme de sel gemme, l'action échauffante est au maximum dans le rouge obscur, l'action éclairante dans le jaune, l'action sur le chlorure d'argent dans le bleu.

Les photographies des différents spectres que nous avons données p. 304 montrent et l'énergie de l'action chimique des vibrations les plus réfrangibles et l'existence des raies dans toute la partie ultra-violette des spectres formés par les radiations émanées du soleil ou des métaux soumis à l'action de courants énergiques.

On conçoit, du reste, qu'avec la nature de la substance impressionnable peut varier la région du spectre où réside le maximum d'action. Une des preuves les plus remarquables de l'exactitude de cette assertion se tire de l'action exercée par la lumière sur la résine de gayac. Prise à l'état naturel, cette résine bleuit lorsqu'on l'expose aux rayons ultra-violets, et une fois bleuie, elle se décolore sous l'influence des rayons jaunes et verts.

Ces observations sont de Wollaston.

Dans une série d'études faites sur le spectre solaire, M. Ed. Becquerel a confirmé l'exactitude de ces anciennes expériences, et, par de nouveaux exemples, il a donné plus de généralité aux conséquences qu'on en pouvait déduire. Il a vu que les actions exercées sur le chlorure d'or et sur le chromate de potasse présentent leur maximum d'intensité en des régions du spectre différentes l'une de l'autre, et différentes de celles où il a lieu pour le chlorure et l'iodure d'argent. M. Ed. Becquerel est aussi arrivé à ce résultat que les rayons rouges, incapables d'impressionner à eux seuls les sels d'argent, peuvent au contraire continuer une action commencée sous l'influence des vibrations de plus grande longueur d'onde.

Enfin, en poursuivant le cours de ces études sur les radiations chimiques, M. Becquerel est parvenu à obtenir des couches sensibles qui, soumises pendant quelques instants à l'action d'un spectre solaire, prennent en chacun de leurs points une teinte semblable à celle des rayons qui les touchent. M. Niepce de Saint-Victor, de son côté, est arrivé à des résultats semblables. Mais les teintes ainsi développées n'ont pas de stabilité ; tous les essais que l'on a faits pour les fixer sont restés jusqu'ici infructueux.

CHAPITRE XIV.

PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR VOIE DE CONDUCTIBILITÉ.

§ I. — PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX. — APPAREIL D'INGENHOUS.

Lorsqu'on chauffe un point, une portion déterminée d'un corps athermane, la chaleur se répand dans toutes les directions autour du centre d'échauffement; mais le mode de transmission diffère nécessairement de celui par lequel la chaleur rayonnante se propage dans les milieux diathermanes. Dans ce dernier cas, en effet, la propagation est presque instantanée, tandis qu'elle est ordinairement lente dans l'autre. Conformément aux usages reçus, nous dirons que dans les corps athermanes la chaleur se propage par voie de conductibilité, et nous allons indiquer quelques-uns des résultats auxquels on est arrivé dans l'étude de ce mode particulier de transmission de la chaleur.

Nous rappellerons d'abord, comme fait d'expérience générale, que les corps diffèrent beaucoup les uns des autres au point de vue de la facilité avec laquelle ils conduisent la chaleur : lorsqu'un charbon de bois de un décimètre de longueur est bien incandescent à l'une de ses extrémités, on peut le prendre par l'autre sans ressentir de sensation de chaleur particulière; il en serait tout autrement s'il s'agissait d'un cylindre de fer de même dimension.

On sait encore que l'on peut poser la main sur un bloc de bois de 20° plus froid que le corps sans éprouver de sensation désagréable, tandis qu'en opérant de même avec un bloc de cuivre ou même de marbre, on éprouverait un refroidissement qui deviendrait bientôt insupportable.

On emploie ordinairement, pour mettre en évidence les différences de conductibilité des corps pour la chaleur, un appareil dû à Ingenhous et qui consiste en une caisse de cuivre rectangulaire, oblongue, d'environ 2 ou 3 litres de capacité, et sur une des parois de laquelle sont implantés normalement de petits cylindres bien égaux entre eux, mais de natures différentes. On recouvre

ces cylindres dans toute leur longueur d'une mince couche de cire, et, quand elle est bien solidifiée, on verse de l'eau chaude dans la caisse. La chaleur se communique par conductibilité dans l'intérieur de tous les cylindres, mais la communication, très-rapide et très-parfaite dans les uns, l'est beaucoup moins dans les autres; ainsi, en très-peu de temps la cire est fondue sur le cylindre d'argent et de cuivre jusqu'à une distance considérable de l'origine, tandis que la fusion est à peine sensible sur les cylindres de verre et de bois.

§ 2. — PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN MUR DE LARGEUR INDÉFINIE. — DÉFINITION DU COEFFICIENT DE CONDUCTIBILITÉ.

Lambert paraît être le premier qui ait songé à étudier analytiquement le phénomène de la propagation de la chaleur dans les corps solides athermanes; mais ce sont surtout les travaux de Fourier sur ce sujet que l'on regarde comme le point de départ de la branche de science que l'on nomme souvent la théorie mathématique de la chaleur.

Dans leurs recherches sur la transmission de la chaleur par voie de conductibilité, les géomètres, jusqu'ici, partent d'un principe secondaire, quoique très-général, et qui consiste en ce que, dans un corps homogène, la quantité de chaleur qui passe dans un temps très-court, d'une molécule à une molécule voisine, est fonction de la distance des deux molécules et de la nature du corps, et qu'en outre elle est proportionnelle à la différence de température des deux molécules.

De ce seul principe on peut faire découler un grand nombre de conséquences importantes.

Supposons d'abord que l'on ait un mur AB (fig. 782) d'épaisseur e, et de largeur indéfinie; admettons que la face antérieure A soit entretenue à une température constante T, et la face postérieure à une autre température t, moindre que T; une transmission continue de chaleur s'établira entre les deux faces A et B, et, au bout d'un temps plus ou moins long, le mur, en sa totalité, sera arrivé à un certain état stationnaire. Quand cet état sera atteint, supposons que le mur soit divisé par des plans parallèles aux faces A et B, en n couches très-minces dont l'épaisseur constante pour toutes soit telle que la chaleur envoyée par la première se trouve complétement absorbée par la

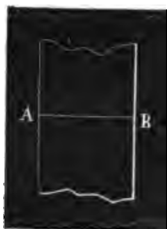


Fig. 782.

seconde, sans qu'aucune portion ne passe directement à la troisième. Supposons enfin qu'en tous les points de chaque tranche la température soit la même au même instant; alors il faudra que, dans un temps donné, chacune de ces tranches reçoive de celle qui la précède une quantité de chaleur égale à celle qu'elle donne à la suivante, et ainsi de suite. Il n'y a pas de perte extérieure puisque le mur a une largeur indéfinie; il faudra donc, d'après le principe énoncé à la page précédente, qu'entre deux couches consécutives quelconques la différence de température soit constante.

Cette différence sera ici égale à $\frac{T-t}{n}$ ou $\frac{T-t}{e}$, si l'on exprime l'épaisseur du mur en prenant pour unité celle d'une couche.

La quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, passe d'une couche à la suivante est précisément celle qui pendant cette unité sort du mur par la face extrême, dont la température est t.

Cette dernière quantité de chaleur est donc proportionnelle à $\frac{T-t}{e}$, en d'autres termes elle est proportionnelle directement à la différence des températures extrêmes, et réciproquement à l'épaisseur du mur; du reste elle change avec la nature de la substance dans ce dernier. On désigne sous le nom de *coefficient de conductibilité* d'un corps la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverserait l'unité de surface d'une section faite parallèlement aux bases, dans un mur de cette substance de largeur indéfinie, d'épaisseur égale à *un*, et dont les deux faces seraient maintenues à des températures différentes de un degré; on appelle en outre *coefficient de conductibilité extérieure* d'un corps la quantité de chaleur qu'il perdrait par unité de surface, tant par le contact de l'air que par rayonnement, si l'excès de sa température sur celle de l'enceinte où il se refroidit était un degré. La connaissance de ces coefficients est importante dans toutes les circonstances où il s'agit d'apprécier les déperditions de chaleur qui se font par des murs, par des parois de fourneaux, etc. Nous n'entrerons pas dans la discussion de toutes les différentes expériences qui ont été ou proposées ou faites pour déterminer directement ces nombres, et nous nous bornerons à montrer comment on peut déduire les premiers de l'observation de la propagation de la chaleur dans les barres, c'est-à-dire dans des cylindres ou prismes conducteurs.

§ 3. — PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE BARRE. — ÉQUATION DU PROBLÈME. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES DE M. DESPRETZ.

Le problème de la propagation de la chaleur dans une barre est un de ceux qui peuvent se traiter aisément *à priori*, au moins lorsqu'on admet que la température est la même dans toute l'étendue d'une section faite perpendiculairement à l'axe de la barre.

Soit, en effet, une barre conductrice homogène ayant même section S et même périmètre p dans toute son étendue. Supposons que l'une de ses bases soit maintenue à une température T supérieure à la température extérieure t; désignons par Q le coefficient de conductibilité intérieure de la barre, et par h son coefficient de conductibilité extérieure.

Soit, au bout du temps t, y la valeur de la différence qui existe entre la température de la couche située à une distance x de l'origine et celle de l'enceinte.

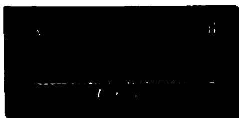


Fig. 783.

Si l'on considère dans la barre trois tranches consécutives a, b, c (fig. 783) d'épaisseur dx, et dont la première soit, comme il vient d'être dit, celle qui est située à une distance x de l'origine, elles auront respectivement pour excès de température à l'époque t:

$$y, \qquad y + \frac{dy}{dx}dx,$$

et

$$y + \frac{dy}{dx}dx + \frac{d\left(y + \frac{dy}{dx}dx\right)}{dx}dx$$

ou

$$y + 2\frac{dy}{dx}dx + \frac{d^2y}{dx^2}dx^2$$

et dans l'instant dt la couche b gagnera une quantité de chaleur égale à la différence qui existe entre ce qu'elle reçoit de la première et ce qu'elle perd, soit par contact de l'air et rayonnement extérieur, soit par transmission à la couche suivante.

La première de ces trois quantités, c'est-à-dire la chaleur reçue de la tranche a, est égale à $-\frac{\text{QS}\,dy\,dt}{dx}$, car elle est égale

à celle qui dans le temps dt traverse une portion S d'une section faite parallèlement aux bases dans un mur indéfini d'épaisseur dx, et ayant à ses deux extrémités des températures qui diffèrent entre elles d'une quantité égale à $\frac{dy}{dx}\,dx$.

Si l'excès de température y est assez petit pour que la loi de Newton soit applicable au refroidissement de la barre, la deuxième quantité, la perte que la barre éprouve à l'extérieur, a pour valeur $phy\,dx\,dt$. Enfin ce qu'elle transmet à la couche suivante est :

$$-\frac{QS}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\,dx+\frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2\right)dt.$$

Ce qui reste dans la tranche b pour en élever la température est donc.

$$\left(\frac{QS}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 - pdx\,hy\right)dt,$$

ou

$$(1)\qquad dx\left(QS\,\frac{d^2y}{dx^2}-phy\right)dt.$$

Cette quantité de chaleur produit dans l'instant dt un accroissement de température $\frac{dy}{dt}\,dt$.

Si donc on désigne par c et ρ la chaleur et le poids spécifiques de la barre, la quantité de chaleur que nous considérons pourra encore s'écrire :

$$(2)\qquad \frac{dy}{dt}\,dt\;c.\rho.S\,dx$$

et en égalant les expressions (1) et (2) on aura

$$dt\,dx\left(QS\,\frac{d^2y}{dx^2}-phy\right)=dx\,\frac{dy}{dt}\,dt\;c.\rho\,S.$$

Ainsi y est une fonction de x et t satisfaisant à la relation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{p}{QS}\,hy=\frac{dy}{dt}\,\frac{c\rho}{Q},$$

ou

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ph}{QS}\,y+\frac{c\rho}{Q}\,\frac{dy}{dt}.$$

La détermination de la forme de la fonction y est un problème en général assez compliqué, mais il se simplifie dans le cas particulier qui nous intéresse spécialement ici, celui où la barre est arrivée à l'état d'équilibre.

Alors, en effet, y ne variant plus avec t, l'équation devient simplement

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2y.$$

en posant

$$a^2 = \frac{hp}{QS}.$$

La forme générale de y qui satisfait à cette condition, ou si l'on aime mieux l'intégrale complète de l'équation, est

$$(5) \qquad y = \mathrm{M}e^{ax} + \mathrm{N}e^{-ax}.$$

e est la base des logarithmes népériens; M et N sont des constantes qui se déterminent d'après les conditions du problème, par exemple, d'après la condition que y soit égal à T pour $x = o$, et à T_1 pour $x = l$, l étant la longueur de la barre. Nous n'insisterons pas sur la démonstration analytique de cette assertion. Nous nous bornerons à faire remarquer que d'après les règles élémentaires du calcul des dérivées, la valeur de y donnée par l'équation (5) satisfait à l'équation (4), et que de plus elle renferme deux constantes arbitraires.

Vérifications expérimentales. — Recherches de M. Despretz. — L'équation $y = \mathrm{M}e^{ax} + \mathrm{N}e^{-ax}$ conduit à des conséquences qui se traduisent en lois physiques importantes.

D'abord, si l'on suppose la longueur l de la barre très-considérable, son extrémité non chauffée sera nécessairement à la température de l'enceinte, en d'autres termes, pour $x = l$, y sera nul. Cela ne pourrait être si M avait une valeur différente de zéro. Donc, en ce cas, l'équation générale se réduit à

$$\mathrm{Y} = \mathrm{N}e^{-ax}.$$

et N se détermine par la condition que y ait une valeur déterminée T, pour une valeur donnée de x, par exemple, pour $x = o$.

Dans ce cas, l'excès de température y décroît en progression géométrique quand la distance x croît en progression arithmétique. Biot et M. Despretz ont successivement vérifié cette consé-

quence en opérant sur de longues barres de différentes substances. Ces barres avaient la forme de cylindres ou de prismes droits; on y avait pratiqué, à distances égales entre elles, des cavités destinées à recevoir les réservoirs de thermomètres très-sensibles : un peu de mercure établissait le contact entre ces réservoirs et les parois des cavités où ils étaient renfermés.

Les températures de ces différents thermomètres étaient regardées et pouvaient l'être en effet, comme celles des couches correspondantes. Dans de bonnes conditions, les excès de ces températures sur celles de l'air décroissent en progression géométrique. De récentes expériences de M. Gouillaud sur ce point ont vérifié les résultats de M. Despretz.

Quand les barres ne sont plus assez longues pour que leur extrémité soit à la température de l'enceinte, l'équation qui donne y conserve la forme moins simple :

$$y = Me^{ax} + Ne^{-ax}.$$

Mais sous cette forme encore, elle conduit à un résultat qui a été vérifié expérimentalement. Voici en quoi il consiste : que l'on conçoive la barre divisée en tranches de même épaisseur, et que l'on mesure les excès de températures t_1, t_2, t_3, de trois consécutives quelconques d'entre elles, sur le milieu ambiant : si l'on divise la somme $t_1 + t_3$ des excès extrêmes par l'excès moyen t_2, on obtiendra toujours un quotient constant à quelque distance de l'origine que soient les trois tranches considérées; en d'autres termes, le quotient $\frac{t_1 + t_3}{t_2}$ sera le même dans toute l'étendue de la barre. Pour montrer comment ce résultat se déduit de l'équation :

$$y = Me^{ax} + Ne^{-ax}.$$

remplaçons successivement dans cette équation x par i, $i + d$, $i + 2d$, elle deviendra :

$$y_1 = Me^{ai} + Ne^{-ai},$$

$$y_2 = Me^{ai}e^{ad} + Ne^{-ai}e^{-ad},$$

$$y_3 = Me^{ai}e^{2ad} + Ne^{-ai}e^{-2ad},$$

on en tire :

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = \frac{Me^{ai}(e^{2ad} + 1) + Ne^{-ai}(e^{-2ad} + 1)}{Me^{ai}e^{ad} + Ne^{-ai}e^{-ad}},$$

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = \frac{(e^{2ad} + 1) + \frac{Ne^{-ai}}{Me^{ai}}(e^{-2ad} + 1)}{e^{ad} + \frac{Ne^{-ai}}{Me^{ai}}e^{-ad}},$$

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = \frac{e^{2ad} + 1 + \frac{Ne^{-ai}}{Me^{ai}} + \frac{Ne^{-ai}}{Me^{ai}}e^{-2ad}}{e^{ad} + \frac{Ne^{-ai}}{Me^{ai}}e^{-ad}},$$

Effectuons la division et nous obtiendrons au quotient :

$$e^{ad} + e^{-ad},$$

ce qui est en effet une quantité constante.

Or, la constante du quotient $\frac{y_1 + y_3}{y_2}$ est un fait qui résulte clairement d'un grand nombre d'expériences faites par M. Despretz, par la méthode décrite aux pages précédentes.

Les raisonnements par lesquels nous avons établi l'équation générale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ph}{QS}y + \frac{c\rho}{Q}\frac{dy}{dt},$$

supposent la fixité relative des tranches infinitésimales entre lesquelles on étudie les échanges de chaleur. Quand il s'agit de liquides, cette fixité n'a lieu que si les variations de température n'amènent aucun courant intérieur. M. Despretz a réussi à réaliser cette condition en opérant sur des colonnes liquides verticales chauffées à la partie supérieure par un vase rempli d'eau chaude sans cesse renouvelée. En ces conditions, mais en ces conditions seulement, les lois générales de la conductibilité s'appliquent aux liquides ; dans les cas ordinaires où les liquides sont chauffés ou latéralement ou par le bas, l'échauffement de la masse se fait à l'aide des mouvements qui s'établissent par suite de l'ascension incessante des couches échauffées.

Détermination des coefficients de conductibilité. Recherches de M. Despretz. — La constante que nous avons désignée par a dans le cours de cette théorie peut se déterminer numériquement dans les deux circonstances que l'on réalise habituellement.

Dans les cas des barres très-longues, celui où le décroissement des température se fait en progression géométrique le quotient q des excès de température de deux thermomètres successifs est égal d'après nos notations précédentes à e^{ad}, d'où l'on tire

$$ad \log e = \log q, \qquad a = \frac{\log q}{d \log e}.$$

Dans le cas le plus ordinaire, celui des barres de moyenne longueur, la valeur constante q du quotient $\frac{y_1 + y_3}{y_2}$ est donnée par la relation :

$$q = e^{ad} + e^{-ad},$$

ou en multipliant par e^{-ad} :

$$qe^{ad} = e^{2ad} + 1,$$

d'où l'on tire :

$$e^{ad} = + \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - 1},$$

Dans cette équation il faut prendre le signe $+$ du radical parce que e^{ad} doit être toujours plus grand que 1.
Or l'équation :

$$e^{ad} = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - 1},$$

conduirait forcément à la relation :

$$e^{ad} < \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - 1},$$

et en multipliant ces deux relations on obtiendrait :

$$e^{2ad} < 1,$$

et par suite :

$$e^{ad} < 1.$$

D'après la définition résumée dans l'équation $a^2 = \frac{hp}{QS}$, la constante a est d'une part directement proportionnelle à la racine carrée du quotient $\frac{p}{S}$ et à la racine carrée du coefficient de conductibilité extérieure, et d'autre part, elle est inversement proportionnelle à la racine carrée du coefficient de conductibilité intérieure. La première de ces trois proportions a été vérifiée d'abord par M. Despretz, dans ses recherches sur la conductibilité des liquides, et ensuite par M. Gouillaud dans le travail que nous avons déjà cité.

Quant à la troisième, elle sert de point de départ à la méthode que M. Despretz a employée pour trouver les valeurs relatives des coefficients de conductibilité de différents corps.

Pour comparer les conductibilités intérieures de deux substances différentes on fait faire avec ces substances des barres cylindriques ou prismatiques de mêmes dimensions, en sorte que p et S soient les mêmes pour l'une et pour l'autre. On les recouvre d'un même enduit; ce qui rend h constant pour toutes deux. Enfin, on détermine pour chacune la loi du décroissement de température et on en déduit les valeurs de a^2 correspondantes, a_1^2 et a_2^2. Le quotient $\frac{a_1^2}{a_2^2}$ est égal au rapport inverse $\frac{Q_2}{Q_1}$ des coefficients cherchés.

TABLE DES COEFFICIENTS DE CONDUCTIBILITÉ INTÉRIEURE, D'APRÈS M. DESPRETZ.

Or	1,000
Argent	973
Cuivre	898
Fer	374
Zinc	363
Étain	304
Plomb	180
Marbre	24
Porcelaine	12
Terre des fourneaux	11

Dans les recherches dont nous avons plusieurs fois parlé en ce chapitre, M. Gouillaud s'est aussi occupé de chercher comment les constantes M et N de l'équation $y = Me^{ax} + Ne^{-ax}$ varient avec les conditions de l'expérience. Il remarqua d'abord que ces

deux constantes et l'excès de température T de la source sont liées par la condition fondamentale :

$$Me^{0} + Ne^{-0} = T,$$

d'où,

$$N = T - M;$$

en sorte que l'équation qui donne y devient :

$$y = M\left(e^{ax} - e^{-ax}\right) + Te^{-ax}.$$

et ceci posé, il a établi expérimentalement que dans les conditions supposées pour la formation de l'équation différentielle du problème, le coefficient M varie proportionnellement à l'excès de la température de la source sur l'enceinte, et que de plus, cette constante décroît en progression géométrique quand la longueur de la barre croît en progression arithmétique. Tous ces résultats peuvent se déduire de la théorie et en sont de nouvelles vérifications. Nous renvoyons, pour plus de détails, au Mémoire de M. Gouillaud. (*Ann.*, série III, t. XLVIII.)

Lorsque l'on peut regarder la valeur h du coefficient de conductibilité extérieure comme égale à 0, on rentre dans le cas de la propagation à travers un mur indéfini (§ 1). Alors, quand l'état stationnaire est atteint, la distribution de température est donnée par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, d'où $y = Ax + B$, comme nous l'avons déjà vu. B est l'excès de température initiale T. Quant à la constante A, elle est déterminée si l'on donne l'excès T_1 de la couche située à une distance l de l'origine. On a alors en effet :

$$T_1 = Al + T, \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{T_1 - T}{l}.$$

Dans ce cas on a donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{T - T_1}{l}.$$

Or, la quantité de chaleur qui passe d'une tranche de la barre à la suivante est proportionnelle à cette valeur constante de $\frac{dy}{dx}$; elle est donc en raison inverse de l. D'ailleurs elle est évidemment proportionnelle à la section de la barre, et, d'après la définition du coefficient de conductibilité intérieure, elle est en raison directe de ce coefficient. C'est le cas de la page 689.

Il en résulte que si, dans une enceinte à température θ, entre une source à température $T + \theta$ et une autre à température $T_1 + \theta$, on établit la communication par deux fils pour lesquels h soit nul et qui aient d'ailleurs des longueurs, des sections et des conductibilités différentes, les quantités de chaleur qui dans le même temps traverseront la section droite de ces fils, seront, pour chacun, proportionnelles à l'expression $\frac{SQ}{l}$, c'est-à-dire directement proportionnelles au produit de la section S et de la conductibilité Q de ce fil, et en raison inverse de sa longueur l.

Et par suite ces quantités seront égales si pour les deux fils les produits $\frac{S_1Q_1}{l_1}$, $\frac{S_2Q_2}{l_2}$ sont égaux.

Concevons maintenant qu'entre les deux sources considérées la communication soit établie par un conducteur composé des deux fils précédents raccordés bout à bout; supposons qu'une fois l'état stationnaire atteint, il n'y a pas de changement brusque de température au point de raccordement des deux conducteurs, et qu'enfin les quantités de chaleur qui dans l'unité de temps traversent une section droite de chacun d'eux sont les mêmes. Dans le premier fil, cette quantité sera $-S_1Q_1\frac{dy_1}{dx}$, dans le second $-S_2Q_2\frac{dy_2}{dx}$, et par suite on aura déjà une relation simple entre les sections, les conductibilités des deux fils et la rapidité de la variation des températures dans chacun. Cette relation est :

$$S_1Q_1\frac{dy_1}{dx} = S_2Q_2\frac{dy_2}{dx}.$$

On peut aller plus loin. Admettons, en effet, qu'au point de raccordement, l'excès de température de la barre sur l'enceinte soit Z. Il sera facile de déterminer cet excès, car on aura les équations suivantes :

$$-S_1Q_1\frac{dy_1}{dx} = S_1Q_1\frac{T - Z}{l_1} \quad \text{et} \quad -S_2Q_2\frac{dy_2}{dx} = S_2Q_2\frac{Z - T_1}{l_2};$$

d'où

$$\frac{T - Z}{Z - T_1} = \frac{l_1}{S_1Q_1} \times \frac{S_2Q_2}{l_2}.$$

Tout ce qui précède est relatif à la propagation de la chaleur dans les corps homogènes, et dans lesquels on peut admettre

que les conditions de cette propagation ne dépendent pas de la direction dans laquelle elle s'opère.

Cette indépendance n'a plus lieu dans les corps qui sont cristallisés dans un système différent du système cubique. M. de Sénarmont a mis en évidence de la manière suivante l'inégale rapidité de cette propagation suivant les différentes directions. Il faisait tailler le cristal sur lequel il voulait opérer de manière qu'il présentât une face plane d'une certaine étendue, et dans sa partie moyenne il perçait normalement à cette face un trou étroit et cylindrique, puis il recouvrait de cire la face sur laquelle il voulait opérer, et quand cette cire était bien solidifiée, il introduisait une tige chaude dans la cavité cylindrique centrale. Au bout d'un certain temps la couche de cire se trouvait fondue à des distances différentes, suivant les différentes directions.

§ 4. — ÉCHAUFFEMENT DES GAZ.

La mobilité des gaz, leur grande diathermanéité, la faiblesse extrême de leur densité, rendent fort difficile toute étude directe sur la conductibilité propre de ces corps. On peut seulement affirmer que cette conductibilité est très-faible, car une couche gazeuse dont les mouvements ne peuvent plus librement s'accomplir, constitue une enveloppe éminemment propre à préserver les corps du refroidissement ou du réchauffement.

Ainsi, on ralentit beaucoup le refroidissement d'un corps chaud en l'entourant d'une couche épaisse de duvet et le plaçant, ainsi entouré, dans un vase métallique fermé et à parois bien brillantes. Le duvet ici gêne les mouvements de l'air. C'est pour une raison analogue qu'une couche de paille un peu épaisse préserve fort bien du froid de l'hiver les plantes qu'elle recouvre, ou empêche si efficacement l'été la chaleur de pénétrer dans les glacières.

Mais, malgré ce peu de conductibilité propre, les gaz, quand ils ont toute liberté de se mouvoir, peuvent devenir des causes puissantes de refroidissement, parce que les couches qui se sont échauffées au contact des surfaces chaudes sont incessamment remplacées par des couches plus froides, et, si faibles que soient les pertes de chaleur dues à chacun de ces contacts successifs, leur somme devient bientôt considérable.

D'après ces simples indications sur la manière dont s'exerce l'action refroidissante des gaz, on conçoit que les lois de cette action doivent être fort compliquées. Nous verrons dans le chapitre suivant à quels résultats on est arrivé en les étudiant dans quelques cas particuliers.

CHAPITRE XV.

LOIS DU REFROIDISSEMENT.

§ 1. — DÉFINITIONS, MESURE DES VITESSES DE REFROIDISSEMENT.

Définition de la vitesse de refroidissement. — Un thermomètre dont les dimensions ne sont pas exagérées, un vase plein d'un liquide sans cesse agité, sont des corps qui peuvent être regardés comme ayant sensiblement la même température en tous leurs points. Si ces corps sont placés dans une enceinte de température constante plus basse ou plus élevée que la leur, ils se refroidissent ou se réchauffent, et la différence T qui existe à chaque instant entre leur température et celle de l'enceinte, est une fonction du temps τ, compté à partir de l'époque où l'on commence l'observation du phénomène. Soit $\varphi(\tau)$ cette fonction. La valeur numérique que prend pour $\tau = \theta$ la dérivée $\varphi'(t)$ de $\varphi(\tau)$ est ce qu'on appelle la vitesse de réchauffement ou de refroidissement à l'époque θ.

Expression algébrique de la loi de Newton. — Dans le cas où la loi de Newton (voir t. I, p. 334) est applicable, on a, d'après l'énoncé même de cette loi, $\varphi'(\tau) = m\varphi(\tau)$, m étant un coefficient indépendant du temps, et, par suite, $\varphi(\tau) = Ae^{m\tau}$; A est l'excès de température initial et le coefficient m varie avec le poids, la nature et la forme du corps employé.

En d'autres termes, la différence de température varie en proportion géométrique lorsque le temps croît en progression arithmétique. Nous avons déjà développé cette proposition, mais nous avons aussi fait remarquer que dans le cas général, celui où l'excès de température initial a une valeur considérable, la loi de Newton n'est plus applicable.

Détermination de la vitesse de refrodissement. — Quant à la détermination des vitesses de refroidissement à une époque quelconque θ, elle se fait de la manière suivante.

On observe à des intervalles de temps égaux entre eux les excès successifs de température du corps et les temps correspondants,

depuis une époque $\theta - \delta$, un peu antérieure à θ, jusqu'à l'époque postérieure $\theta + \delta$, δ étant convenablement choisi. Soit, pendant cet intervalle de temps 2δ, $T_0 T_1 \ldots \ldots T_n$ les excès successifs correspondants aux époques 0, 1. . . . . 2δ. On cherche une formule empirique qui exprime les excès T_0, T_1. . . . . en fonction des temps correspondants; ordinairement il suffit d'une formule exponentielle simple de la forme $T = T_0 e^{m\tau}$, et avec cette formule, on calcule pour l'époque θ la dérivée $\frac{dT}{d\tau}$.

En opérant de même pour différentes époques θ', θ'' du refroidissement on a les vitesses correspondantes.

Au reste, il n'est pas inutile de remarquer que, dans la plupart des cas pour obtenir des nombres proportionnels aux vitesses V_θ $V_{\theta'}$ $V_{\theta''}$ de refroidissement que possède le corps aux époques θ, θ', θ'', il suffit de mesurer à ces différentes époques les abaissements de température qui ont lieu pendant un temps très-court et toujours le même, 20 ou 30″, par exemple.

§ 2. — RECHERCHES DE DULONG ET PETIT, RECHERCHES DE MM. DE LA PROVOSTAYE ET DESAINS.

Procédé d'expérience. — En 1817, Dulong et Petit ont publié les résultats de recherches importantes entreprises pour trouver les lois fondamentales du refroidissement.

Les corps sur lesquels furent faites leurs observations étaient de gros thermomètres à mercure. Ces thermomètres, chauffés à une température voisine de celle de l'ébullition du mercure, étaient portés rapidement dans une enceinte sphérique de cuivre noirci, d'un volume deux ou trois cents fois plus considérable que le leur. Leur réservoir en occupait le centre, la portion de la tige sur laquelle les divisions étaient tracées sortait au dehors et les lectures se faisaient aisément.

Corrections des vitesses. — Les vitesses successives de refroidissement de ces thermomètres se déterminaient par la méthode que nous venons d'indiquer. Seulement les excès de température lus directement devaient être corrigés comme on l'a indiqué tome I^{er}, page 237, parce que la tige pouvait être considérée comme ayant la température extérieure. Les vitesses, une fois calculées, devaient encore recevoir deux corrections. D'abord, le mercure froid qui rentre à chaque instant dans le réservoir accroît un peu la rapidité du refroidissement; pour

faire la correction relative à cette cause d'erreur; soit, pour une température absolue Z, α l'abaissement qui a lieu pendant un temps très-court θ, et soit t la température extérieure. La fraction de degré x, qui dans l'abaissement total α représente la part due à la rentrée du mercure froid, se détermine par l'équation :

$$\left(1 - \frac{Z}{6480}\right) x = \frac{\alpha}{6480} (Z - \alpha - t).$$

qui n'est autre chose que l'équation de la méthode des mélanges appliquée à ce cas. En effet $\left(1 - \frac{Z}{6480}\right)$ et $\frac{\alpha}{6480}$ représentent les poids entre lesquels le mélange s'effectue, x est la variation de température du premier, $Z - \alpha - t$ celle du second.

Enfin, si l'on veut que les vitesses de refroidissement soient, à toute époque, proportionnelles aux quantités de chaleur perdues dans le même temps par des surfaces égales, il faut remarquer que par suite des progrès du refroidissement, la surface du thermomètre diminue, et il en est de même de la capacité calorifique du mercure. Si l'on veut ramener les vitesses observées à ce qu'elles seraient si la surface et la capacité calorifique avaient constamment les valeurs qu'elles ont à zéro, il faudrait, à la température Z, multiplier la vitesse V dans le rapport $\frac{1 + \sigma}{1 + \xi}$, σ et ξ représentant les fractions dont varient la capacité calorifique et la surface en passant de zéro à Z.

Estimation de l'effet de l'air. — Si l'on pouvait placer les corps dans le vide absolu, l'observation de leur refroidissement en cette condition ferait connaître les lois du rayonnement, c'est-à-dire la manière dont ce rayonnement varie avec l'état de la surface du corps, l'excès de sa température sur l'enceinte et la température absolue de celle-ci.

Mais opérer dans le vide est une chose impossible, et tous les refroidissements que l'on observe sont des effets complexes provenant à la fois du rayonnement propre des corps et de l'action refroidissante que les gaz exercent sur eux. Dulong et Petit ont cherché à isoler l'une de l'autre ces deux parties du phénomène total. Nous allons indiquer la marche qu'ils ont suivie.

L'enceinte dans laquelle ces savants observaient le refroidissement était placée dans un bain d'eau. On pouvait dès lors, sans grand'peine, la maintenir pendant un temps aussi long qu'il était nécessaire à une température quelconque, comprise entre zéro et 80°, et il était aussi très-facile d'y amener, après l'introduction

du thermomètre, la pression à toutes les valeurs possibles comprises entre $0^m,760$ et $0^m,005$.

Ceci posé, admettons que, pour une température quelconque θ de l'enceinte, on observe le refroidissement du thermomètre d'abord sous la pression atmosphérique H et puis sous une pression très-faible *h*, et cela pour un grand nombre d'excès de température différents.

On en déduira, dans le premier cas, une série de vitesses

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots \quad V_n,$$

correspondantes à des excès

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \ldots \quad T_n,$$

et, dans le second, pour les mêmes excès on aura des vitesses plus petites

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots \quad U_n;$$

Les différences

$$V_1 - U_1, \quad V_2 - U_2, \quad V_3 - U_3, \quad \ldots$$

sont proportionnelles évidemment aux différences qui existent entre les quantités de chaleur que, pendant l'unité de temps et pour les excès T_1, T_2, T_3, le thermomètre perd par le contact du gaz aux pressions H et *h*.

Or, par quelques tâtonnements, on arrive à reconnaître premièrement que ces quantités varient proportionnellement à la puissance 1.233 de l'excès de température, et cela quelle que soit la température θ de l'enceinte et les pressions H et *h*. Puis, lorsque pour un excès quelconque T on fait varier H et *h* entre les limites 0,76 et 0,01, on trouve, si l'enceinte est 3 ou 400 fois plus volumineuse que le thermomètre, qu'entre les limites assignées les différences $V - U$ varient proportionnellement à la différence d'une certaine puissance des deux pressions. L'exposant de cette pression change d'un gaz à l'autre d'après Dulong et Petit. Il est :

Pour l'air	0.450
Pour l'acide carbonique	0.517
Pour l'hydrogène	0.380
Pour le gaz oléfiant	0.501

Ainsi, les différences $V_n - U_n$ sont représentées par une expression de la forme

$$N(H^\gamma - h^\gamma)T^{1,233},$$

γ étant un nombre qui varie avec la nature du gaz.

Le coefficient N varie avec le thermomètre employé; mais, pour un même thermomètre, il ne dépend pas de l'état de la surface, et cela est très-remarquable; car cette indépendance prouve que l'état de la surface d'un corps qui a une si grande influence sur la perte qu'il éprouve par rayonnement, n'en a aucune sur celle que lui fait éprouver le contact d'un gaz.

Observations de MM. de la Provostaye et P. Desains. — De ce que les différences $V_n - U_n$ croissaient, dans les conditions de leurs recherches, proportionnellement aux différences $H^\gamma - h^\gamma$, Dulong et Petit avaient cru pouvoir conclure que le pouvoir refroidissant d'un gaz est, pour toutes les valeurs des pressions, proportionnel à la puissance γ de ces pressions. Cette extension est inexacte, nous l'avons établi dans une longue série de recherches que nous avons faites, M. de La Provostaye et moi, dans le but précisément de discuter et d'étendre les résultats de Dulong et Petit.

Les enceintes que nous avons employées dans nos expériences

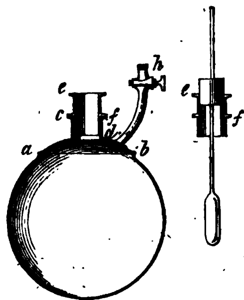


Fig. 784.

étaient tantôt des ballons de forme sphérique (fig. 784), tantôt de larges tubes cylindriques. Nos thermomètres renfermaient jusqu'à 300 grammes de mercure, leurs tiges passaient à frottement dur dans de gros bouchons d'excellente qualité, et ces bouchons eux-mêmes étaient fixés dans des pièces qui pouvaient,

à l'aide d'anneaux de serrage, être rapportées sur le col des enceintes.

Du reste la marche des expériences ne différait pas de celle qu'avaient adoptée Dulong et Petit; or, nous avons constaté que quand on diminue la pression du gaz renfermé dans l'enceinte, il arrive en général un moment où le pouvoir refroidissant du gaz devient indépendant de la pression, au moins pour une variation assez étendue de cette dernière; quelquefois même il augmente quand la pression diminue. Ces effets sont d'autant plus marqués que l'enceinte est plus petite; dans une enceinte qui n'était guère que 30 fois plus grande que notre thermomètre, le refroidissement de ce dernier dans l'air n'éprouvait aucune variation quand la pression variait de $0^m,070$ à $0^m,015$.

De tels résultats sont incompatibles avec l'hypothèse qui consisterait à regarder l'action refroidissante d'un gaz comme donnée par une expression de la forme $NH^{\gamma}T^{1.233}$; on ne peut donc plus admettre que pour un excès de température T, le refroidissement d'un corps placé dans un gaz à pression H, soit donné par la formule

$$V = R + NH^{\gamma}T^{1.233},$$

R étant l'effet dû au seul rayonnement, et jusqu'ici on n'a pas de méthode générale qui, de la seule observation du refroidissement, dans un gaz à différentes pressions, permette de déduire sûrement la mesure du rayonnement proprement dit.

Refroidissement dans le vide. — Toutefois, il faut ajouter que ces observations critiques sont surtout applicables au cas où le thermomètre est revêtu d'une couche ayant un pouvoir émissif très-faible. Quand il s'agit de thermomètres à surface vitrée ou noircie, l'incertitude qui reste sur la part due à l'air, calculée d'après la méthode de Dulong et Petit, est une faible fraction du refroidissement qui s'opère par l'émission propre du thermomètre.

Aussi, dans ces cas particuliers, on peut, très-approximativement au moins, obtenir la vitesse du refroidissement dans le vide, en opérant de la manière suivante : La température de l'enceinte étant réglée et maintenue constante, on observe les vitesses totales de refroidissement V et U du thermomètre pour un excès de température T et sous deux pressions H et H'; on pose l'équation $V - U = N(H^{\gamma} - H'^{\gamma})T^{1.233}$; de cette équation, on déduit la valeur de N; enfin, on calcule la différence $V - NH^{\gamma}T^{1.233}$. La valeur représente la vitesse cherchée.

Lois de Dulong et Petit. — En opérant de cette manière avec un thermomètre vitré, et dans une enceinte portée successivement à différentes températures, Dulong et Petit sont arrivés à un résultat très-remarquable. Ils ont trouvé que, pour un même excès de température, la fraction de la vitesse de refroidissement qui est due au seul rayonnement, croît en progression géométrique quand la température de l'enceinte croît elle-même en progression arithmétique.

Toutes les notions relatives aux échanges de chaleur qui avaient été introduites par Prévost et si habilement développées par Fourier, indiquaient que, dans une enceinte noire et vide d'air, les vitesses de refroidissement d'un thermomètre noirci, doivent être proportionnelles à la différence des valeurs que prend la fonction $f(Z)$ de la température qui représente le rayonnement du thermomètre, lorsqu'on y substitue successivement à Z la température t de l'enceinte et la température $t + T$ du thermomètre; en d'autres termes, ces notions indiquaient que l'on doit avoir

$$V = m \left\{ f(t + T) - f(t) \right\},$$

ou

$$V = mf(t) \left\{ \frac{f(t + T)}{f(t)} - 1 \right\}.$$

Or, d'après ces relations, il est évident que la loi de Dulong et Petit, citée à la page précédente, serait complétement reproduite si l'on admettait que la fonction $f(Z)$ fût de la forme a^Z; en effet, la valeur de V deviendrait alors $ma^t(a^T - 1)$, et cette expression croît en progression géométrique lorsque t croît en progression arithmétique.

L'équation $V = ma^t(a^T - 1)$ indiquerait aussi que les valeurs des vitesses qui, dans une enceinte vide et à température constante, correspondent à différents excès de température, doivent varier proportionnellement aux termes d'une progression géométrique diminués d'un nombre constant; qu'enfin la raison de cette progression ne change pas avec la température de l'enceinte, et qu'elle est la même que celle de la progression suivant laquelle croissent, pour un même excès de température, les vitesses de refroidissement observées dans des enceintes à températures croissantes. Or, tous ces résultats ont été aussi pleinement établis par Dulong et Petit, et dès lors on peut admettre qu'à toute température inférieure à 300°, le rayonnement d'un

corps noirci ou à surface vitrée peut être représenté par une expression de la forme ma^t ; on se rappelle, du reste, que nos expériences citées pages 595 et suivantes, concordent parfaitement avec cette manière de voir.

Seulement il faut ajouter une remarque. Ces dernières expériences, aussi bien que celles de Dulong, ont été faites à des températures bien inférieures au rouge, et dans les circonstances où la chaleur semble beaucoup plus homogène que quand elle émane de sources à températures élevées. En réalité, le rayonnement d'une source à température quelconque peut sans doute être représenté par une somme d'exponentielles analogues à celle qui suffit pour représenter approximativement les échanges de chaleur des corps noircis aux températures basses; ces exponentielles seraient d'ailleurs multipliées chacune par un coefficient particulier. Pour celles qui représentent les rayons qui dominent aux températures basses, les coefficients seraient plus forts, et la base de l'exponentielle serait moindre que pour les autres.

M. de La Provostaye, dans le Mémoire que nous avons déjà cité pages 675 et suivantes, a soumis au calcul le problème des échanges de chaleur, en adoptant cette manière générale de représenter la constitution des flux calorifiques, et dans un dernier travail publié aux *Comptes rendus* le jour même de sa mort, il montrait comment de ses calculs antérieurs on pouvait très-simplement déduire les conséquences suivantes :

1° Tous les corps noirs ou doués de pouvoir réflecteur régulier commencent à émettre un même rayonnement calorifique à même température;

2° Les quantités émises à une même température par des corps divers sont proportionnelles à leurs pouvoirs émissifs ou absorbants pour ce rayonnement particulier;

3° Il ne s'ensuit pas que ces rayonnements commencent à être sensibles aux thermoscopes ou à l'œil à une température très-voisine de celle à laquelle ils prennent naissance.

4° Il ne s'ensuit pas davantage que les rayonnements de même espèce émis par deux corps de pouvoir absorbant et émissifs divers deviennent appréciables à même température. C'est le contraire qui doit avoir lieu.

LIVRE IX

ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER

DÉCOUVERTES DE GALVANI ET DE VOLTA. PILES VOLTAÏQUES.

§ 1. — DÉCOUVERTES DE GALVANI ET DE VOLTA.

Différentes séries de recherches (voir t. I, page 454) exécutées dans la seconde moitié du siècle dernier avaient fait connaître la grande variété des effets que peut produire l'électricité. Mais on ne commença réellement à se faire une idée exacte de la puissance de cet agent, que quand Volta eut découvert l'appareil qui est maintenant connu sous le nom de *pile voltaïque*.

La découverte de la pile a été publiée en 1800; elle constitue l'un des faits les plus importants de la science moderne. Volta y fut conduit par l'étude de quelques phénomènes physiologiques observés d'abord par Galvani.

Lorsqu'un animal récemment tué a été dépouillé de sa peau, si l'on touche à la fois, avec un arc métallique, l'un des muscles mis à nu et quelqu'un des nerfs principaux qui s'y rendent, on observe souvent dans le muscle des contractions assez énergiques. Galvani avait observé le fait en opérant sur des grenouilles, et Volta reconnut que les contractions se produisent plus sûrement et plus énergiquement lorsque l'arc métallique employé pour établir la communication était formé de deux métaux différents inégalement oxydables et soudés bout à bout.

L'expérience se fait de la manière suivante : on coupe une grenouille par le milieu du corps; on rejette la portion formée de la tête, du thorax et des membres antérieurs; on dépouille l'autre rapidement et on la pose sur une lame de zinc décapé,

de façon que le contact soit bien établi entre le métal et les muscles des pattes et des cuisses; puis, avec un fil de cuivre, on touche d'une part la lame de zinc, d'autre part les nerfs qui sortent de la portion inférieure de la colonne vertébrale pour se rendre aux muscles des cuisses et des jambes. Aussitôt que le contact a lieu, des contractions violentes se manifestent dans tout le membre inférieur.

En cherchant à expliquer ces effets, Volta fut conduit à penser qu'au point de jonction des deux parties de l'arc métallique, il se développait une action électromotrice sous l'influence de laquelle les deux métaux se chargeaient de fluides contraires, lesquels se réunissaient, partiellement au moins, par la route conductrice que leur offraient les nerfs et les muscles de la grenouille. Il admit, en outre, que le contact des métaux avec le conducteur humide constitué par les membres de la grenouille n'était pas accompagné d'un développement d'électricité comparable à celui qui se produisait au point de jonction des deux métaux entre eux.

Pour établir l'exactitude de ces deux propositions, Volta employait l'électromètre condensateur dont nous avons donné la description, tome I^er^, page 451.

Après avoir bien décapé la partie inférieure du plateau collecteur de son instrument, il la touchait avec une lame de zinc ou de fer tenue à la main, et il mettait l'autre plateau en communication avec le sol. En ces conditions, le plateau collecteur se charge négativement; d'où il semblait résulter qu'au contact du cuivre avec le zinc ou le fer, il se développe une action électromotrice qui a pour effet de charger le cuivre négativement et le zinc ou le fer positivement.

Si au lieu de fer ou de zinc on prenait à la main soit une grenouille récemment préparée, soit un morceau de carton ou de drap imprégné d'eau salée ou acidulée, en touchant avec ce conducteur le plateau collecteur, on ne chargerait pas l'appareil d'une façon sensible.

Volta en concluait qu'au contact d'un métal et de ces conducteurs particuliers, il n'y avait qu'un développement de force électromotrice très-faible ou nul. — Nous reviendrons plus loin sur ces interprétations; mais, pour achever l'esquisse des idées qui ont conduit à la découverte de la pile, il convient d'ajouter le détail de quelques expériences devenues classiques.

Lorsqu'on veut employer le condensateur à l'étude des forces électromotrices développées au contact des métaux, on emploie souvent une lame formée de deux autres soudées bout à bout,

l'une en zinc, l'autre en cuivre. On prend le zinc à la main et l'on touche le plateau collecteur avec le cuivre ; ce plateau se charge alors comme à l'ordinaire de fluide négatif. Mais si, au contraire, on tenait par le cuivre, aucun effet ne serait produit. On n'en obtiendrait pas davantage en réunissant par un fil de cuivre la partie cuivre que l'on tient avec le plateau supérieur.

Enfin, si l'on voulait répéter avec cette double lame l'expérience première de Galvani, en plaçant les muscles de la grenouille sur l'élément cuivre, et touchant avec un fil de cuivre, d'une part, les nerfs lombaires de l'animal, et de l'autre, l'élément de zinc, les contractions, ou disparaîtraient complétement, ou tout au moins ne se feraient plus que d'une manière irrégulière.

Pour faire reparaître l'action sur le condensateur ou les contractions de la grenouille, il suffirait de mettre en communication le fil de cuivre et le zinc non plus directement, mais par l'intermédiaire d'un conducteur humide, une rondelle de drap imbibée d'eau salée ou acide, par exemple.

D'après cela, on voit que, pour recueillir les électricités produites d'après Volta par l'action électromotrice qui se développe au contact du zinc et du cuivre, on peut placer un disque de zinc sur un disque de cuivre de mêmes dimensions, et auquel sera attaché un conducteur de même métal, mettre sur le zinc une rondelle de carton ou de drap imbibée d'eau acidulée, et au-dessus un nouveau disque de cuivre muni d'un conducteur absolument comme le disque inférieur, et enfin toucher avec ces deux conducteurs les deux plateaux d'un condensateur. Le disque de cuivre inférieur s'il est isolé donne de l'électricité négative au condensateur ; c'est le *pôle négatif* de l'élément électro-moteur. Le cuivre qui est séparé du zinc par une rondelle humide est le *pôle positif*. Quand on réunit ces deux pôles par un conducteur, ce dernier donne passage aux électricités contraires, qui se recombinent, partiellement au moins, par son intermédiaire ; on dit alors que le conducteur interpolaire est traversé par un courant allant du pôle positif au pôle négatif.

On peut aller plus loin : si entre la première rondelle humide et le disque collecteur supérieur on place un élément complexe formé, comme le premier, d'un cuivre, d'un zinc et d'un intermédiaire humide, il ne se trouvera nulle part dans la série totale un seul couple de deux contacts successifs tendant à neutraliser réciproquement leurs effets, et de plus, dans le conducteur extérieur réunissant les deux extrémités de la chaîne, les courants

que produirait isolément chaque élément complexe seront de même sens et se superposeront; et en effet, si l'on introduit une grenouille dans le circuit, on obtiendra avec deux éléments des contractions plus fortes qu'avec un seul; avec trois éléments, les effets seraient plus énergiques encore...

Tel est à peu près l'enchaînement des idées et des expériences qui a conduit Volta à la construction de la pile.

§ 2. — PILES VOLTAÏQUES.

Piles à colonne. — La première pile que Volta ait réalisée est la pile à colonne. Pour la construire, on prend une série de disques de cuivre, de zinc et de drap ou de carton; on imbibe ces derniers d'eau légèrement acidulée, puis on place successivement l'un au-dessus de l'autre un disque de cuivre, un disque de zinc et une rondelle de drap, sans jamais intervertir l'ordre. Dans la figure 785, les disques de cuivre sont couverts de hachures, on les désigne par la lettre C. Les zincs par la lettre Z, les cartons par la lettre D. Des montants de verre assurent la stabilité de la colonne ainsi formée.

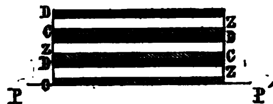


Fig. 785.

Pile en couronne. — La pile à colonne reçut rapidement de nombreux perfectionnements. Le poids des disques supérieurs exprimait le liquide des rondelles mouillées, et ce dernier, en coulant le long de la colonne, établissait entre toutes ses parties des communications latérales très-préjudiciables. Volta imagina alors la *pile en couronne*, dans laquelle tous les éléments liquides sont des verres pleins d'eau acidulée, placés les uns auprès des autres, et disposés en cercle, de façon que les extrémités de la chaîne soient voisines l'une de l'autre. Les éléments métalliques sont de petits arcs formés d'une lame de zinc et d'une lame de cuivre soudées ensemble. Dans le premier vase de la série plonge seul le cuivre d'un de ces arcs; là est le *pôle négatif* de la pile dans le second vase plonge le zinc du premier arc et le cuivre du suivant, et ainsi de suite. Des piles de ce genre d'une centaine d'éléments donnent de fortes commotions.

Pile à auge. — La deuxième modification de la pile de Volta fut la pile à auges (fig. 786). Pour la construire, on prend des auges rectangulaires en bois, ayant environ $0^m,50$ de long et 2 ou 3 décimètres carrés de section, une série d'éléments doubles composés d'une lame de cuivre et d'une lame de zinc ayant chacune

la forme et les dimensions de la section de l'auge et soudés ensemble sur tout leur pourtour. Ces éléments ont donc une face de cuivre et une de zinc. On les fixe dans l'auge perpendiculai-

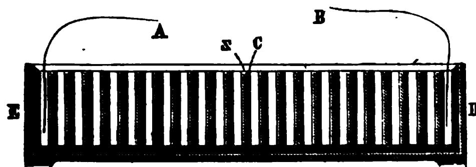


Fig. 786.

rement à sa longueur, en prenant soin que, dans tous, le cuivre soit tourné du même côté. Pour assurer la stabilité de leur position, on engage leurs bords dans des rainures pratiquées dans les parois de l'auge, et on achève de les fixer avec du mastic. L'auge principale se trouve ainsi divisée en une série d'augets secondaires qui ne communiquent pas entre eux. Lorsqu'on veut mettre l'appareil en activité, il suffit d'y verser de l'eau acidulée. Alors on peut charger une bouteille de Leyde en en touchant les deux armures avec les fils A et B ; et si l'on joint les extrémités de ces fils par un conducteur, on verra ce dernier devenir, suivant sa nature, siége des phénomènes lumineux, calorifiques ou chimiques que peuvent produire les décharges électriques.

Quand on a besoin d'appareils puissants, on dispose un certain nombre d'auges semblables à celle que nous venons de décrire ; on les place dans le voisinage l'une de l'autre, et l'on fait communiquer à l'aide d'une lame de cuivre l'auget qui forme le pôle positif de la première avec celui qui forme le pôle négatif de la deuxième, et ainsi de suite.

Pile de Wollaston. — La pile à auges n'est plus qu'une pile à colonne dont on a rendu l'axe horizontal ; la pile de Wollaston se rapproche plus de la pile en couronne. C'est pour ainsi dire une pile en couronne dont les éléments métalliques, tous fixés à une traverse de bois, peuvent être plongés ou retirés tous ensemble des vases destinés à recevoir l'eau acidulée. Seulement, dans l'élément de Wollaston, on donne à la portion cuivre de chaque élément plus de développement qu'au zinc. Le cuivre d'un élément quelconque C'C'' (fig. 787), entoure sans le toucher nulle part le zinc de l'élément suivant ; il est percé à sa partie inférieure d'un ou deux trous qui facilitent l'écoulement du liquide. Des bouchons ou de petits morceaux de bois empêchent le contact de ces deux métaux, entre lesquels il

ne doit pas y avoir de communication directe. Dans la fig. 787, TT' est la traverse à laquelle sont fixés les trois éléments ZC',

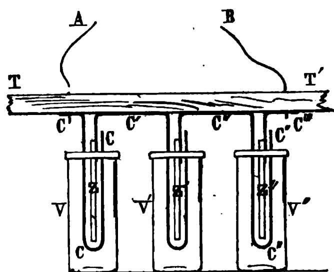


Fig. 787.

Z'C'', Z''C'''. CA, C'''C sont les lames et fils qui recueillent l'électricité aux deux pôles de la pile.

§ 3. — DU SIEGE DE LA FORCE ÉLECTROMOTRICE.

Le circuit d'un élément électromoteur de Volta présente, lorsqu'il est fermé, une succession de trois substances conductrices différentes. Il y a donc dans ce circuit trois contacts dissemblables, et, pour s'expliquer la circulation électrique, il suffit d'admettre que l'un d'eux, n'importe lequel, est le siége d'une force électromotrice plus grande, suivant le cas, que la somme ou la différence des deux autres. Pour Volta, le courant prenait naissance au point où se touchent les deux conducteurs métalliques. Maintenant, on admet généralement que l'électricité se développe surtout, là où le liquide de l'élément baigne le métal le plus attaquable. Une des raisons les plus simples que l'on puisse citer à l'appui de cette opinion, c'est que la puissance des piles ordinaires varie surtout avec les conditions dans lesquelles ce contact s'opère. L'action est maximum quand l'eau acidulée est récente et peut agir activement sur le zinc. Le courant diminue beaucoup ou cesse complétement lorsque cet intermédiaire humide n'est plus qu'une solution de sulfate incapable de dissoudre une nouvelle portion de métal, et pour faire renaître le contact, il suffit de verser un peu d'acide libre dans le liquide des auges.

D'ailleurs, rien dans l'expérience de Volta ne contredit cette manière de voir. Lorsque, en effet, on touche avec une lame de

zinc tenue à la main l'un des plateaux du condensateur, le zinc s'altère visiblement sous l'influence de l'humidité de la main. Il y a donc là une action chimique, et il en est de même de toutes les autres expériences dans lesquelles on charge un condensateur avec un élément électro-moteur.

Recherches de M. Becquerel. — M. Becquerel, plus que tout autre, a contribué, par ses découvertes électrochimiques, à faire abandonner l'opinion que Volta s'était faite touchant le siége du développement de l'électricité dans les éléments de pile. Il nous serait impossible de donner ici une idée complète de toutes ses expériences sur ce point; mais celles que nous allons décrire suffiront pour faire comprendre la méthode qu'il a le plus souvent adoptée, et pour prouver en même temps que dans l'élément de Volta l'électricité se développe réellement aux points où ont lieu des contacts accompagnés d'action chimique. On soutient dans un vase de verre deux lames d'or, auxquelles sont attachés des fils conducteurs en or, argent, platine, cuivre, peu importe, et dans le vase on verse un liquide conducteur qui n'ait pas d'action sur l'or, l'acide azotique par exemple; puis on met les deux fils en communication avec les deux extrémités du fil d'un rhéomètre semblable à celui que nous avons décrit page 580: aucun courant ne se manifeste. Mais si l'on vient verser quelques gouttes d'acide chlorhydrique près d'une des lames d'or, l'eau régale qui se forme attaque le métal, et il se produit un courant marchant dans le vase, du métal attaqué au liquide. Le courant s'arrête quand le peu d'eau régale formée est épuisée. Cette expérience est décisive, car la conductibilité du liquide, renfermé dans le vase, n'a pas sensiblement changé pendant l'expérience.

Lorsque dans l'expérience précédente, aux lames d'or et de platine, on en substitue deux autres de métaux différents et inégalement attaquables par le liquide qui les touche, le rhéomètre indique l'existence d'un courant, et par le sens de ce courant on peut constater que dans les actions chimiques qui font passer un métal à l'état d'oxyde, de chlorure, de bromure, d'iodure, le métal attaqué prend l'électricité négative et le liquide actif, au contraire, l'électricité positive; en sorte que, dans l'élément électromoteur, le courant marche du métal au liquide. Ce second résultat des expériences de M. Becquerel peut aussi se vérifier à l'aide du condensateur; il constitue un second principe fondamental de la théorie électrochimique des piles, et, comme nous l'avons déjà fait remarquer, il ne contredit pas les expériences de Volta.

CHAPITRE II.

ACTIONS CHIMIQUES DE LA PILE.

§ 1. — DÉCOMPOSITION DES COMPOSÉS BINAIRES.

Décomposition de l'eau. — Presque aussitôt après que Volta eut fait connaître la pile à colonne et décrit les phénomènes physiologiques qu'elle lui avait servi à produire, Carlisle et Nicholson remarquèrent que l'on peut décomposer l'eau en la faisant traverser par le courant électrique fourni par cet appareil, l'eau doit être rendue conductrice par l'addition d'un peu d'acide sulfurique ou de sel marin. Quand cette précaution est prise, il

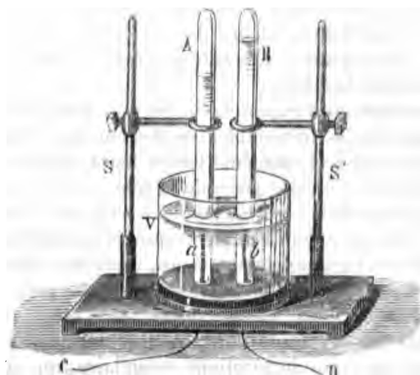


Fig. 788.

suffit d'y plonger à petite distance l'une de l'autre les extrémités des deux fils métalliques pour déterminer aussitôt l'apparition de bulles gazeuses autour de celui qui amène l'électricité négative; ce gaz est de l'hydrogène. Quant à l'autre conducteur, s'il est en cuivre, on ne le voit point se recouvrir de bulles gazeuses; il noircit et s'altère. S'il est en platine, il se couvre comme l'autre

de bulles gazeuses qui bientôt se dégagent à leur tour; ces bulles sont de l'oxygène.

Pour répéter commodément l'expérience, on emploie des appareils connus maintenant sous le nom de voltamètres; la figure 788 représente l'un des modèles adoptés. V est un vase de verre dont le fond est traversé par deux lames de platine *a* et *b*, bien assujetties à l'aide d'un mastic insoluble. A la partie extérieure de ces lames sont attachés deux fils de cuivre qui peuvent être mis en communication avec les deux pôles de la pile C et D. A et B sont deux éprouvettes graduées dont chacune peut être placée au-dessus d'une des lames *a* et *b*; le vase et les éprouvettes étant pleins d'eau acidulée, on fait passer le courant : l'hydrogène se dégage sur la lame négative, l'oxygène sur l'autre et les volumes des gaz sont entre eux comme les nombres 2 et 1.

Décomposition des alcalis. — Quelques années après cette brillante découverte, S. Humphry Davy en fit une autre de même ordre. Il fit passer à travers un fragment de potasse le courant d'une pile à auges de 2,000 éléments, et il vit apparaître au pôle négatif des globules métalliques qui s'enflammaient au contact de l'air. On disposa alors les appareils de manière à recueillir ces globules dans le mercure, et l'on obtint un amalgame qui, par distillation, laissa comme résidu un métal inconnu jusqu'alors : le potassium. Les autres terres alcalines furent réduites de la même manière.

Dans ces mémorables expériences, on voit deux combinaisons binaires, deux oxydes très-stables se décomposer sous l'action du courant, et l'on voit en même temps leurs éléments séparés se porter chacun à l'un des pôles de la pile. Ce fait est général; toutes les combinaisons binaires conductrices que l'on a pu soumettre à l'action de courants électriques convenables se sont comportées d'une façon analogue. Ainsi, dans les chlorures, bromures ou iodures fondus, le métal se porte au pôle négatif, le chlore, le brome ou l'iode au pôle positif, etc., etc.

Les résultats des décompositions électrochimiques se compliquent souvent par suite de réactions secondaires qui se développent dans le voisinage des pôles où les éléments séparés tendraient à s'isoler. La décomposition de l'eau elle-même n'est pas toujours exempte de pareilles complications. Lors, en effet, qu'après avoir acidulé ce liquide avec un peu d'acide sulfurique on le fait traverser par le courant en prenant soin de maintenir le voltamètre à une température peu élevée, on ne trouve plus dans l'éprouvette positive la quantité normale d'oxygène, et l'on peut constater dans le liquide la présence de l'eau oxygénée ; ce résultat important

a été établi par les recherches de M. Leblanc et de M. Meidinger.

§ 2. — DÉCOMPOSITION DES DISSOLUTIONS SALINES. PRODUITS SECONDAIRES.

Les résultats de l'action des courants sur les dissolutions salines sont plus compliqués, et cela se conçoit, puisque avec le nombre des éléments simples qui se trouvent en présence sous l'influence des forces électriques, s'accroît rapidement le nombre des effets possibles. La nature des corps qui s'isolent ou se produisent dépend alors de l'intensité des courants employés, de la stabilité des éléments binaires du sel employé, de l'état physique des combinaisons qui peuvent se produire. Toutefois, malgré cette complication apparente, il est des groupes de cas dans lesquels les phénomènes se formulent assez facilement. Avec des courants de force moyenne, si le sel est à base alcaline et renferme un acide stable comme l'acide sulfurique ou l'acide phosphorique, on s'aperçoit bientôt que la liqueur devient très-acide autour du pôle positif et alcaline autour du pôle négatif. Tout se passe donc comme s'il y avait eu séparation des deux corps que l'on avait combinés pour former le sel. Pour rendre cet effet très-visible, on emploie ordinairement un simple tube en U (fig. 789),

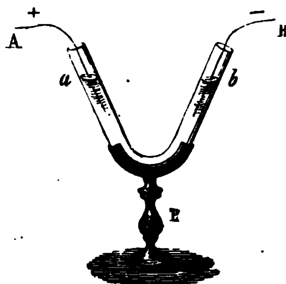


Fig. 789.

dans chacune des branches duquel on fait plonger l'une des électrodes. Le tube étant plein de la solution, on met un peu de tournesol dans la branche où l'on a dessein de faire plonger le pôle positif et un peu de curcuma dans l'autre ; au bout de quelques instants, les deux teintures sont devenues rouges, et si l'on veut alors les ramener à leurs teintes premières, il suffit d'intervertir pendant quelques instants le sens du courant. On fait encore l'expé-

rience d'une autre manière. On place trois verres à expérience l'un à côté de l'autre, et dans chacun on met une solution de sulfate de soude. On fait communiquer le verre du milieu avec chacun des deux autres par l'intermédiaire de petits siphons pleins eux-mêmes du liquide à décomposer; on fait plonger les deux électrodes dans les vases extrêmes et l'on établit le courant; au bout d'un temps suffisant, presque tout l'acide de la solution se trouve dans le vase où plonge l'électrode positive presque tout l'alcali est dans l'autre.

Si dans cette expérience on substituait le sulfate de cuivre au sulfate alcalin que nous avons considéré jusqu'ici, ce ne serait pas ordinairement l'oxyde de cuivre, mais bien le cuivre lui-même qui se déposerait sur l'électrode négative, et l'oxygène mis en liberté viendrait se dégager autour de l'électrode positive; si l'on opérait avec une solution d'azotate d'argent, on aurait de l'azote et de l'argent révivifié à l'un des pôles, tandis qu'à l'autre se dégagerait de l'oxygène.

Toutes ces expériences se font aisément dans les cours. Il ne faut pas forcer le nombre des éléments de pile employés, parce que l'on serait gêné par une décomposition trop rapide de l'eau dans laquelle les sels sont dissous. Il faut, en outre, avoir soin de prendre des électrodes en platine ou en or, sans quoi elles pourraient être attaquées elles-mêmes, et il en résulterait de nouvelles complications dans les résultats obtenus. Ainsi, dans la décomposition du sulfate de cuivre, l'électrode positive, si elle était en cuivre, pourrait se dissoudre ou se recouvrir de sous-sulfate de cuivre. En général, comme nous le disions au commencement de ce paragraphe, lorsque autour d'une électrode se trouvent en présence plusieurs éléments susceptibles de contracter entre eux des combinaisons, il arrive souvent que plusieurs de ces combinaisons se forment et persistent, lorsque par leur peu de conductibilité ou par quelque autre cause, elles peuvent échapper à l'action dissociante du courant.

Expériences de M. Becquerel. — Ces réactions secondaires peuvent être utilisées. M. Becquerel, dans la longue série de ses recherches électrochimiques les a souvent employées pour reproduire à l'état cristallin des produits que les réactions chimiques ordinaires donnent plus ordinairement à l'état amorphe.

Nous indiquerons comme exemple la préparation de l'hydrate de peroxyde de plomb et celle du chlorure d'argent cristallisés.

Pour préparer l'hydrate de peroxyde de plomb, on place dans un vase de porcelaine dégourdie une solution de protoxyde de plomb dans la potasse, et le vase lui-même dans un bocal de

verre renfermant de l'acide azotique concentré, une lame de platine est plongée dans la solution d'oxyde de plomb, l'autre dans l'acide; on met cette dernière en communication avec le pôle négatif d'une pile de un ou deux couples de Daniel, l'autre avec le pôle positif; sur cette dernière se rend l'oxygène venant de la décomposition de l'acide azotique, et le peroxyde hydraté s'y forme à l'état de cristaux.

Pour obtenir le chlorure d'argent cristallisé, on attache à une lame d'argent un morceau d'anthracite, traité préalablement par les acides, puis on plonge le tout dans l'acide chlorhydrique; il s'établit alors un courant qui va du métal à l'acide et revient ensuite au métal par le charbon. Sous l'influence de ce courant l'argent s'attaque peu à peu à sa surface, se recouvre d'octaèdres de chlorure, qui au bout d'un an ou deux ont plusieurs millimètres de côté.

Enfin nous ajouterons encore que si l'on fait passer un courant peu énergique à travers une solution d'azotate d'argent ordinaire, une portion de l'oxygène résultant de la décomposition du sel au lieu de se dégager au pôle positif y transforme une certaine quantité de protoxyde en péroxyde qui cristallise en aiguilles tétraédriques longues de sept à huit millimètres.

Expériences de M. Riche.—Dans ces dernières années, M. Riche a employé de nouveau les courants voltaïques à la préparation de combinaisons importantes. Ainsi, il a constaté que dans l'action d'un courant sur une solution étendue d'acide chlorydrique, la suroxydation du chlore par l'oxygène qui provient de la décomposition de l'eau se fait si facilement qu'elle constitue la méthode la plus commode de préparation de l'acide perchlorique.

D'autres observations ont fait découvrir à M. Riche une méthode toute particulière pour la préparation de l'acide chloracétique.

Si l'on mêle deux volumes d'alcool concentré et un volume d'acide chlorhydrique, et qu'on soumette ce mélange à l'action d'une pile de quatre éléments, il se produit d'abord par oxydation de l'aldéhyde et puis de l'acide acétique. Le chlore naissant intervient alors et change ce dernier en acide chloracétique qui ne se produit d'ordinaire qu'à l'aide du soleil et d'une température de 120°.

Expériences de M. d'Almeida. — Comme nouvel exemple des effets dus aux réactions secondaires, nous citerons encore un phénomène, dont l'explication longtemps cherchée fut donnée par M. d'Almeida dans un travail publié en 1856.

Souvent, lorsque une solution saline est soumise à l'action d'un courant, le sel détruit disparaît en proportions inégales autour des deux pôles, et rien, au premier abord, ne semble pouvoir

donner la raison de cette inégalité. Dans les recherches qu'il exécuta, d'une part pour mettre à l'abri de toute incertitude la réalité du fait que nous signalons, et d'autre part pour en donner une explication, M. d'Almeida prit d'abord le soin d'empêcher tout mélange entre les portions de la solution saline qui entouraient les deux pôles, et dans ce but il renfermait le liquide sur lequel il opérait dans deux vases de verre voisins l'un de l'autre, et qui ne communiquaient que par une petite ouverture réunissant leurs parties supérieures. Le pôle positif plongeait dans l'un d'eux, le pôle négatif dans l'autre. Avec cette disposition, M. d'Almeida vit qu'en effet, lorsque la solution saline est acide, comme cela arrive souvent, elle se détruit plus vite autour du pôle positif, mais il vit en même temps que toute inégalité disparaît quand les solutions sont neutres. Or, quand le courant se transmet a travers la solution acide, il y a beaucoup d'eau décomposée, et l'hydrogène naissant réduit au pôle négatif une abondante proportion de sulfate, tandis que cette réaction secondaire n'a pas lieu dans le vase positif.

Quand la solution ne contient pas d'acide étranger à la composition du sulfate, le dégagement d'hydrogène au pôle négatif ne tend plus à se produire, au moins d'une manière sensible, et le sel est également réduit autour des deux électrodes.

L'étude des actions chimiques ainsi produites par les courants voltaïques a conduit à des applications industrielles très-importantes que nous indiquerons dans ce chapitre même : en outre, elle a guidé dans la recherche des moyens à employer pour l'amélioration des appareils électromoteurs eux-mêmes; mais avant d'entrer dans le détail des applications dont il s'agit, il est encore quelques principes généraux d'une grande importance théorique, et qu'il convient de faire connaître.

§ 3. — LOIS DE M. FARADAY, TRAVAIL INTÉRIEUR DES PILES.

Lois de M. Faraday. — Lorsque le courant électrique, produit par une pile à auges ou une pile de Wollaston traverse un voltamètre, les quantités de gaz dégagées dans des temps successifs égaux ne sont pas constantes en général, ce qui indique des variations correspondantes dans l'énergie des courants produits. Mais quelles que soient ces variations, si l'on a disposé dans le circuit plusieurs voltamètres les uns à la suite des autres, on constate que dans tous les quantités de gaz dégagées dans le même temps sont égales entre elles. Ainsi l'action chimique du courant est la même en tous les points du conducteur qu'il parcourt.

Si maintenant, entre deux quelconques, A et B, des points du circuit, on établit la communication par plusieurs conducteurs secondaires, formés chacun d'un voltamètre et d'un fil de cuivre, on constate que la somme des volumes de gaz développés en un certain temps dans tous ces voltamètres est égale au volume unique des gaz que l'on recueille pendant le même temps dans un voltamètre unique placé en un point quelconque des portions du circuit qui ne présentent pas de bifurcation.

Ainsi quelle que soit la manière dont l'électricité se partage entre les différentes routes qui lui sont offertes pour aller de A en B, la somme des effets chimiques qu'elle y produira sera constante et égale à celui qu'elle développe dans un voltamètre unique qu'elle traverse tout entière.

Après avoir constaté qu'un courant électrique transmis successivement à travers plusieurs voltamètres produit dans tous un effet chimique identique, M. Faraday a cherché s'il existerait quelque relation simple entre les grandeurs des effets de décomposition qui seraient produits toujours par un même courant dans plusieurs appareils voltamétriques, placés encore les uns à la suite des autres, mais renfermant des combinaisons binaires différentes. Cette étude nouvelle l'a conduit à des résultats fort importants que nous allons indiquer.

Lorsqu'on fait passer un courant médiocrement énergique à travers une solution concentrée d'acide chlorhydrique ou bromhydrique, l'eau n'est pas décomposée; ce qui le prouve, c'est qu'il ne se dégage pas d'oxygène et qu'il ne se forme pas de produits secondaires oxygénés; en ces circonstances, la quantité d'hydrogène que le courant met en liberté dans un temps donné est précisément égale à celle que donne pendant le même temps un voltamètre ordinaire placé dans le circuit. Le chlorure, l'iodure de plomb, anhydres et fondus, soumis de même à l'action du courant, sont également décomposés et abandonnent en un temps donné une quantité de plomb qui serait transformée en protoxyde par l'oxygène que le courant employé met en liberté dans le voltamètre type.

Ces premières observations de M. Faraday demandaient à être confirmées et surtout à être étendues. Elles ne donnaient en effet aucun renseignement sur ce qui arriverait dans les cas où l'on ferait passer le courant à travers une solution dans laquelle le dissolvant et le corps dissous pourraient être à la fois décomposés, soit que cette solution fût simple comme une solution étendue d'acide chlorhydrique, soit qu'elle fût plus complexe comme les solutions salines ordinaires.

On ne pouvait non plus prévoir quels résultats on obtiendrait en transmettant un même courant à travers des combinaisons binaires de compositions atomiques dissemblables, par exemple un protochlorure et un bichlorure du même métal.

De nombreuses recherches, dues à M. Faraday lui-même, à M. Buff, à M. Soret, à M. Ed. Becquerel, ont apporté de nouvelles données sur l'importante question des décompositions électrochimiques, et il paraît maintenant certain que si un même courant traverse successivement des chlorures, des bromures, des iodures, des oxydes et des solutions d'oxydes, les quantités de chlore, de brome, d'iode, d'oxygène, séparées dans le même temps des corps auxquels elles se trouvaient primitivement unies sont telles qu'avec un même poids d'hydrogène elles formeraient de l'eau ou quelqu'un des acides chlorhydrique, bromhydrique et iodhydrique. Enfin, si dans un des voltamètres un chlorure et un oxyde étaient à la fois décomposés, la somme du chlore et de l'oxygène séparés dans ce voltamètre des corps auxquels ils étaient primitivement unis, transformerait complétement en eau et acide chlorhydrique une quantité d'hydrogène égale à celle qui est dégagée dans le voltamètre type pendant la durée de l'expérience.

Travail intérieur de la Pile. — Lorsqu'une pile fonctionne il y a des décompositions chimiques produites dans ses différents éléments; ordinairement la décomposition dont nous parlons est celle de l'eau dont l'hydrogène se dégage tandis que l'oxygène se porte sur le zinc pour l'oxyder. Or, si le courant extérieur est lui-même employé à faire des décompositions chimiques, ainsi que nous l'avons supposé dans tout l'alinéa précédent, y a-t-il quelque rapport simple entre les quantités d'hydrogène dégagées dans chacun des éléments de la pile et celle qui se produit dans un voltamètre extérieur?

M. Matteucci s'est posé la question et, dans un travail imprimé en 1834, il a fait voir que toutes ces quantités d'hydrogène sont égales, pourvu toutefois que l'action chimique intérieure soit complétement efficace au poiut de vue du développement du courant, c'est-à-dire pourvu qu'aucune portion de l'électricité dont le dégagement accompagne cette action chimique, ne se recompose sur place sans passer par le circuit extérieur.

Il semble *à priori* qu'il doit être fort difficile de savoir si dans une pile en activité toute l'action chimique est efficace, ou tout au moins d'évaluer la part d'hydrogène dégagée par suite de l'oxydation de la portion de zinc qui disparaît sans accroissement dans le courant. Mais le phénomène suivant donne la solution de la difficulté.

Quand le circuit d'un élément de pile n'est pas fermé, tout l'hydrogène produit se dégage sur le zinc. Quand, au contraire, le circuit est fermé, une portion de ce gaz se dégage sur la lame de cuivre ou de platine par laquelle l'électricité positive sort du liquide, absolument comme dans un voltamètre placé sur le trajet du circuit extérieur.

Ce sont précisément ces quantités d'hydrogène recueillies sur les cuivres des divers éléments qui sont égales entre elles et à celles que donnent les voltamètres extérieurs.

Enfin, actuellement, la vérification de la loi de M. Matteucci peut se faire sans que l'on soit aucunement gêné par la difficulté que nous venons de signaler, on doit à M. de La Rive d'une part, et à M. Kemp d'autre part, des observations fort importantes et qui permettent de construire des éléments voltaïques dans lesquels toute l'électricité dégagée dans l'oxydation du zinc se trouve employée à produire le courant.

Le zinc ordinaire amalgamé peut être plongé dans une solution étendue d'acide sulfurique sans s'y dissoudre en proportions appréciables. Un élément voltaïque fait avec du zinc amalgamé peut néanmoins charger un condensateur, il le charge aussi bien que le ferait un élément tout semblable et dans lequel le zinc serait naturel; mais après que cet effet s'est produit, sans doute sous l'influence d'une action chimique, mais d'une action si peu prolongée que le dégagement d'hydrogène correspondant est inappréciable, l'oxydation s'arrête. L'amalgame de zinc est alors constitué dans un état électrique négatif, et l'on conçoit que dans cet état particulier il puisse résister à la cause oxydante qui avait agi efficacement sur lui alors qu'il était à l'état naturel; mais si l'on vient à fermer le circuit, l'amalgame se trouve ou complétement ou partiellement soustrait à l'influence de cette cause qui lui permettait de résister à l'action oxydante du liquide; l'action chimique s'établit alors d'une manière permanente, mais elle est complétement efficace, et la loi de M. Matteucci se vérifie alors très-simplement. Les travaux de MM. Daniell, de Bucy, Despretz, ne laissent aucun doute sur ce point.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que depuis la connaissance des propriétés du zinc amalgamé, on prend soin de n'en plus employer d'autre dans la construction des piles.

§ 4. — PILES A INTENSITÉ CONSTANTE.

Éléments de M. Becquerel. — L'intensité des effets que pro-

duisaient les piles à auges décroissait très-rapidement; ainsi, au bout d'un quart d'heure de mise en activité, des appareils de cette espèce ne décomposaient plus en une minute qu'une faible fraction de la quantité d'eau qu'ils décomposaient dans le même intervalle de temps au moment où leur action avait commencé, et, on le conçoit sans peine, si l'on considère d'une part que la faible quantité d'acide sulfurique qui se trouvait dans chacun des augets successifs devait être rapidement épuisée par la combinaison avec l'oxyde provenant de l'oxydation du zinc; et d'autre part, que la surface du cuivre se recouvrait rapidement de bulles d'hydrogène qui diminuaient beaucoup la conductibilité du circuit; les piles de Wollaston présentaient les mêmes inconvénients, quoique à un degré moindre. Aussi, pour ce motif autant que par raison d'économie, on prenait soin de ne plonger les éléments métalliques dans l'eau acidulée qu'au moment même où l'on voulait produire les phénomènes à étudier. On conçoit dès lors que la construction des piles à intensité à peu près constante fut un progrès véritable dans la science de l'électricité. On le doit à M. Becquerel. L'élément qu'il construisit d'abord était formé d'un tube en U, analogue à celui de la figure 789. La partie inférieure était remplie d'argile bien pure; la partie supérieure de l'une des branches renfermait de l'acide azotique, l'autre une solution concentrée de potasse. Ces liquides pénétraient l'argile, réagissaient l'un sur l'autre, et leurs points de contact se chargeaient de fluides contraires que l'on recueillait sur des fils ou lames de platine immergés à la partie supérieure des branches.

Pile de Daniell. — L'élément de Daniell est celui dans lequel se trouvent le mieux réalisées les conditions propres à assurer la constance de l'état des surfaces métalliques et à rendre aussi peu variables que possible la composition des liquides intérieurs, ou tout au moins l'influence fondamentale qu'ils exercent dans le développement des courants. Cet élément est essentiellement à deux liquides, et présente en conséquence deux cavités distinctes séparées l'une de l'autre par une cloison qui permet aux deux liquides de se mettre en rapport par contact tout en rendant leur mélange très-difficile et très-lent; il est représenté en coupe fig. 790. CC', est un vase de cuivre rouge, portant à sa partie supérieure et externe une sorte de rebord en forme de gouttière circulaire, qui communique à l'intérienr par un grand nombre de trous assez étroits; VV est un vase de porcelaine dégourdie, et Z une lame de zinc dont la partie supérieure est reliée par une pince P munie d'une vis de pression à une lame de cuivre L qu'on peut mettre en communication, soit avec

le vase CC′ lui-même, soit avec celui d'un autre élément semblable.

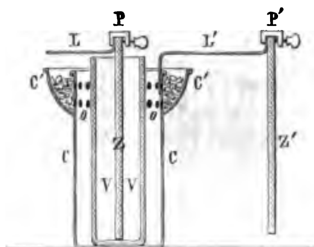


Fig. 790.

Dans le vase poreux on met une dissolution d'acide sulfurique très-étendue; dans le vase de cuivre une solution saturée de sulfate de cuivre; des cristaux de ce même sel remplissent la gouttière supérieure, ils sont baignés par la solution renfermée dans le vase principal et la maintiennent toujours à l'état de saturation. Le zinc doit avoir sa surface soigneusement amalgamée.

Si l'on réunit la lame L au vase de cuivre C, le circuit voltaïque est complet : en P, jonction du zinc et du cuivre, et entre Z et C un conducteur liquide.

Lorsque le courant est établi, le sulfate de cuivre est décomposé, l'oxygène et l'acide qui proviennent de cette décomposition se portent sur le zinc, qui se dissout. Quant au cuivre, il se dépose sur le vase de cuivre lui-même. En sorte que la seule modification à la constitution de l'élément provient de ce que l'eau qu'il renferme se charge de plus en plus de sulfate de zinc.

Quelquefois, dans l'élément que nous venons de décrire, on substitue à l'acide sulfurique étendu une solution de sulfate de zinc. Le courant a moins d'intensité, mais plus de constance.

On peut encore monter la pile de Daniell d'une façon un peu moins parfaite, peut-être, mais plus économique. On met le sulfate de cuivre dans le vase poreux, et l'on fait plonger au milieu des morceaux de ce sel une lame de cuivre telle que Z (fig. 791). Le vase poreux est placé au milieu d'un vase de verre dans lequel on place l'eau acidulée et la lame de zinc : cette dernière a la forme d'un cylindre CC; on peut la faire communiquer, soit

avec la lame L pour fermer le circuit par l'élément lui-même, soit avec le cuivre L'' d'un autre élément.

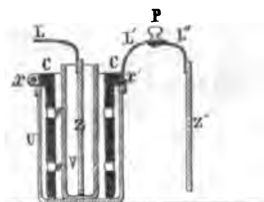


Fig. 791.

Pile de Bunsen. — Si, dans l'élément de Daniell, pris sous cette seconde forme, on remplace la lame de cuivre Z par une plaque de charbon reliée à sa partie supérieure à une lame de cuivre, et si, en outre, au sulfate de cuivre on substitue de l'acide azotique du commerce, on aura l'élément construit par M. Bunsen.

La figure 792 représente plusieurs éléments de Bunsen réunis pour former une pile. Les cylindres de zinc sont désignés par les lettres Z, Z', les vases de verre par les lettres AA' A_1.

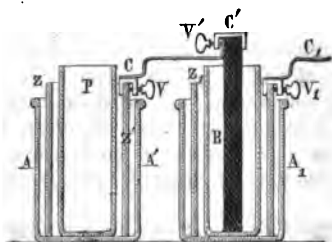


Fig. 792.

Un seul charbon est représenté en B; C, C', C_1, sont les lames de cuivre destinées à établir les communications; V, V', V_1, les vis de pression des pinces qui servent à fixer les lames de cuivre C aux plaques de charbon ou aux cylindres de zinc.

L'élément de Bunsen avait été précédé par celui de Grove dans lequel, pour la première fois, furent mis en usage les vases de terre poreuse, et dans lequel surtout l'acide azotique fut, pour la première fois, employé pour brûler l'hydrogène provenant de

la décomposition de l'eau. Dans cet élément, au lieu de charbon, Grove employait des lames de platine. Les piles de Grove ont une grande puissance, malheureusement le prix en est fort élevé.

Les piles de Bunsen sont très-avantageuses pour les expériences des cours. Cinquante éléments de dimensions moyennes sont plus que suffisants pour faire manœuvrer, pendant une journée entière, la lampe électrique dont les usages ont été indiqués page 250. La décomposition de la potasse se fait très-bien avec un nombre moindre d'éléments. Les combustions des métaux s'obtiennent avec la plus grande facilité, et quelques éléments sont suffisants pour reproduire tous les effets que nous désignerons sous le nom de phénomènes électro-dynamiques ou électro-magnétiques.

La solution d'acide sulfurique se fait en mélangeant dix volumes d'eau avec un d'acide; elle doit être renouvelée tous les jours. Quant à l'acide azotique, il peut servir plusieurs fois; on le change quand il ne marque plus que 26° à l'aréomètre de Beaumé.

Dans les télégraphes on emploie ordinairement des éléments de Daniell, dans lesquels le zinc plonge dans de l'eau presque pure. Ces éléments peuvent fonctionner pendant des mois entiers sans être démontés. On se trouve aussi très-bien, pour des expériences de ce genre, des piles à sulfate de mercure imaginées par M. Marié-Davy.

Pour obtenir une pile de cette espèce, il suffit de remplacer dans une pile de Bunsen l'acide azotique par une bouillie de sulfate de mercure. Quand l'élément est épuisé, ce qui n'arrive qu'après un temps fort long, on retrouve au fond des pots le mercure du sulfate revivifié.

§ 5. — DORURE ET ARGENTURE ÉLECTRO-CHIMIQUES. — GALVANOPLASTIE.

L'étude des décompositions électro-chimiques a conduit à des applications très-importantes; nous citerons spécialement la dorure et l'argenture galvaniques, la galvanoplastie et le dépôt des oxydes de fer et de plomb sur les objets métalliques.

Dorure et argenture; recherches de M. de la Rive. — Lorsqu'un courant agit sur une solution métallique des dernières sections, le métal revivifié se précipite sur l'électrode négative; mais l'état sous lequel il y apparaît est très-variable; avec une action très-lente, il s'agrége souvent en cristaux. Ainsi, que l'on fixe au bouchon d'un flacon une lame de zinc à laquelle

sont attachés des fils de cuivre; si l'on verse de l'acétate de plomb dans le flacon de manière que les fils de cuivre et la partie inférieure du zinc soient plongés dans le liquide, on voit, au bout de quelques semaines, les fils de cuivre couverts de très-beaux cristaux de plomb. D'autres fois, au contraire, le précipité se fait en poudre, ainsi qu'il arrive lorsqu'on plonge dans une solution d'argent les deux électrodes d'une pile un peu forte. M. de la Rive, le premier, a cherché par quelles dispositions on pourrait arriver à obtenir l'or et l'argent, précipités en couches homogènes suffisamment épaisses et assez adhérentes pour supporter l'action du brunissoir, et il y est arrivé en employant des solutions convenablement étendues, des courants faibles, une grande constance dans les conditions de l'expérience et un décapage parfait des pièces à recouvrir du métal précieux.

Procédés de MM. de Ruolz et Elkington. — Les travaux de MM. de Ruolz et Elkington ont apporté d'heureux perfectionnements aux procédés de M. de la Rive, et, depuis une vingtaine d'années, la dorure et l'argenture électro-chimiques sont devenues une industrie des plus importantes.

Les solutions que l'on emploie de préférence aujourd'hui sont ordinairement des solutions étendues de cyanure d'or ou d'argent dans le cyanure de potassium. Il faut avoir soin de maintenir ces solutions toujours dans le même état de saturation, et l'on y arrive en prenant pour électrode positive une lame du métal qui se dépose; enfin il est essentiel de ne mettre la pièce à dorer ou à argenter en communication avec le pôle négatif que quand l'autre électrode est déjà reliée au pôle positif.

Quant aux opérations nécessaires au nettoiement préalable des pièces, elles consistent à les recuire, à enlever les oxydes à l'aide d'une immersion dans un bain d'acide et les graisses par l'action de la potasse. Mais notre plan n'est pas d'entrer dans une description complète des procédés que la pratique a montrés les meilleurs. Cette description serait trop étendue pour trouver place ici.

Nous ajouterons pourtant que les pièces argentées par ces procédés doivent, au sortir des bains, être plusieurs fois plongées dans un bain de borax et chauffées à un point suffisant pour décomposer un peu de sous-cyanure d'argent, qui se dépose en même temps que le métal, et s'altérerait ensuite assez rapidement en donnant à la pièce une teinte désagréable.

Galvanoplastie. — Les couches d'or et d'argent déposées, comme nous venons de l'indiquer, sont adhérentes et très-minces. L'art de la galvanoplastie, au contraire, a pour objet la précipitation du cuivre sur des moules convenables, sous la

double condition que la couche déposée reproduise dans toute leur finesse les détails du moule et qu'elle puisse se détacher de ce dernier sans éprouver la moindre déformation.

La solution de ce problème, acquise à la science par les travaux de MM. Spencer et Jacobi, permet de reproduire en cuivre non-seulement des médailles ou des statues, mais même des feuilles et des fleurs.

Pour reproduire une médaille, il faut commencer par en prendre une empreinte en creux. A cet effet, on passe d'abord sur sa surface un linge fin très-légèrement mouillé d'huile, puis on prend une bande de carton mince ou de fort papier que l'on enroule autour de son rebord, de manière à constituer ainsi un vase plat dont la médaille est le fond; on verse dans ce vase improvisé de la stéarine fondue, ou encore une bouillie de plâtre fin, et on laisse la solidification s'opérer dans un repos absolu. On enlève alors la carte. La médaille se détache très-aisément, laissant son empreinte en creux sur la stéarine. Pour rendre conducteur le moule ainsi obtenu, on passe légèrement sur sa surface un pinceau de blaireau trempé préalablement dans de la plombagine très-fine. On prend soin, toutefois, de ne *métalliser* ainsi que le dedans du moule et sa surface latérale, mais point du tout la base opposée à l'empreinte. Le moule ainsi préparé, on l'attache à un fil de cuivre rouge assez fin, que l'on tourne autour de la surface latérale du moule. Cela fait, on verse dans un vase de verre une solution saturée de sulfate de cuivre à laquelle on ajoute quelque peu d'acide sulfurique, et, dans ce vase, on fait plonger une lame de cuivre en communication avec le pôle positif d'une pile formée d'un ou deux éléments de Daniell. On plonge alors le moule en face de la lame de cuivre, et on établit la communication entre le fil conducteur qui l'entoure et l'électrode négative de la pile; au bout d'un temps suffisant, vingt-quatre, quarante-huit heures, par exemple, le dépôt de cuivre est assez abondant pour pouvoir être enlevé du moule. La lame de cuivre qui forme l'électrode positive se dissout graduellement et maintient la solution toujours au même état de saturation.

Dépôts d'oxydes métalliques. — M. Becquerel a montré que l'on peut aussi, à l'aide des courants voltaïques, déposer sur des pièces métalliques préalablement décapées des couches de peroxyde de plomb et de peroxyde de fer parfaitement adhérentes. Ces dépôts pourraient être employés comme enveloppes préservatrices; celui du peroxyde de fer surtout aurait de réels avantages, à cause de sa grande inaltérabilité. Enfin, quand elles

sont suffisamment minces, les pellicules d'oxydes dont il s'agit se comportent à la manière des lames minces transparentes et présentent de très-beaux effets de coloration.

Nous extrayons du traité d'électricité publié par M. Becquerel la règle à l'aide de laquelle on peut recouvrir les surfaces métalliques d'un dépôt de peroxyde de plomb qui présente des teintes aussi vives que celles des lames minces : « On attache l'objet à colorer au pôle positif d'une pile de deux ou trois éléments et on le plonge dans un vase renfermant une solution d'oxyde de plomb dans la potasse, puis on prend à la main un fil de platine communiquant au pôle négatif et on le promène dans le liquide à une certaine distance de la lame. Aussitôt le dépôt commence et présente les couleurs successives des lames minces. »

Pour obtenir la solution d'oxyde de plomb, « on dissout dans un ballon 260 grammes de potasse caustique dans deux litres d'eau distillée, on ajoute 150 grammes de litharge, on fait bouillir pendant une demi-heure, on laisse reposer la dissolution, on décante et on étend le liquide décanté d'un volume d'eau égal au sien. »

CHAPITRE III.

MESURE DE L'INTENSITÉ DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

---

§ 1. — APPAREILS DE M. POUILLET. — BOUSSOLE DES SINUS. — BOUSSOLE DES TANGENTES.

Pour pouvoir exposer les méthodes employées dans l'étude de la chaleur rayonnante, nous avons déjà dû faire connaître la grande découverte d'Œrsted et montrer la manière dont Schweiger en avait fait une application des plus heureuses à la construction des rhéomètres multiplicateurs. En ce chapitre, nous allons insister de nouveau sur l'emploi que l'on peut faire des aiguilles aimantées dans toutes les questions relatives à la mesure des intensités des courants, et décrire les principales boussoles employées à cet usage. Mais avant d'entrer sur ces points dans aucun détail spécial, nous rappellerons la règle par laquelle Ampère

a résumé toutes les indications données par Œrsted touchant le sens de la déviation que prend, sous l'influence d'un courant voisin, une aiguille aimantée mobile autour de son centre de gravité; seulement, dans cet énoncé, nous nous bornerons aux cas qui nous sont spécialement utiles, savoir : 1° celui où l'aiguille est mobile dans un plan perpendiculaire au courant, et, 2°, celui où l'aiguille, mobile dans un plan parallèle au courant, a son centre de gravité situé sur la projection du courant sur ce plan.

En ces conditions, si l'on imagine placée sur le conducteur qui transmet le courant, et parallèlement à sa direction, une figure humaine dont les pieds soient tournés vers le pôle positif et dont le visage regarde l'aiguille, le pôle austral de l'aiguille se dirigera toujours vers la gauche de la figure indicatrice.

Lorsque l'aiguille aimantée a été rendue astatique, c'est-à-dire lorsqu'elle est soustraite à l'influence de toute action directrice provenant du magnétisme terrestre, elle se met en croix sur le courant, et cela quelle que soit l'intensité de ce dernier. Dans les cas ordinaires, au contraire, elle s'arrête en équilibre, dans une position plus ou moins inclinée, sous les actions combinées de la terre et du courant; et la déviation est une certaine fonction de l'intensité de ce dernier. Nous ne chercherons pas ici l'expression générale de cette fonction, mais nous insisterons sur la forme qu'elle prend dans deux cas particuliers que M. Pouillet a spécialement examinés, et nous verrons comment, en interprétant physiquement les deux solutions particulières qu'il a données du problème général, M. Pouillet a été conduit à construire deux appareils extrêmement utiles : la boussole des sinus et celle des tangentes.

Boussole des sinus. — Soit un cadre rectangulaire en bois et une aiguille aimantée *ab*, mobile autour d'un axe *dc* parallèle aux côtés AD, BC, et passant par le centre O du rectangle. Ce centre O coïncide avec le centre de gravité de l'aiguille, l'axe *dc* est vertical.

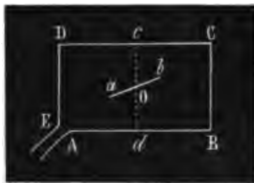


Fig. 793.

Soit, en outre, un courant marchant dans le sens ABCDE dans un conducteur enroulé sur le cadre; les quatre portions AB, BC, CD, DE du courant tendront toutes les quatre à pousser le pôle *a* de l'aiguille en avant du plan de la figure.

Quelle que soit l'orientation du cadre dans l'espace, si l'on force l'aiguille à rester dans son plan, les points *a* et *b* étant symétriques par rapport à O, l'action du courant se réduira à un couple dont les forces F auront une grandeur déterminée et une direction également déterminée par rapport au plan du cadre. Et, de plus, si dans ces conditions l'on désigne par H la composante horizontale de l'action terrestre sur l'aiguille, et φ l'angle formé par le plan du cadre avec le méridien magnétique, H sin φ sera l'expression de la force avec laquelle la terre agit sur chacun des pôles de l'aiguille pour la ramener dans le méridien. Par suite, pour toute valeur de F inférieure à H, il y aura nécessairement une valeur de φ inférieure à 90° pour laquelle l'action de la terre forcera l'aiguille à rester dans le cadre, et alors l'équation d'équilibre sera $H \sin \varphi = K F$, K étant égal à l'unité si, comme cela arrive en effet, la force F est perpendiculaire au plan du cadre.

D'après cela, on voit que si le cadre A B C D est traversé successivement par différents courants pour lesquels l'action exercée sur chacun des pôles supposés dans le plan du cadre soit successivement égale à F_1, F_2, F_3, les angles φ_1, φ_2, φ_3, que le cadre devra faire avec le plan du méridien pour que l'aiguille se trouve, en effet, maintenue dans le plan de ce cadre, seront liés entre eux par les relations $F_1 = H \sin \varphi_1$, $F_2 = H \sin \varphi_2$. En d'autres termes, les forces F_1, F_2, seront proportionnelles aux sinus des déviations φ_1, φ_2.

D'après ces considérations, on conçoit que si le cadre ABCD de la figure 793 est mobile autour de l'axe *dc*, et si l'on a un moyen commode de mesurer sa distance angulaire au méridien magnétique, on estimera très-exactement le rapport des actions F_1, F_2, F_3 exercées dans des conditions identiques sur l'aiguille *ab* par différents courants traversant successivement le fil enroulé sur le cadre.

La boussole des sinus imaginée pour satisfaire à ces conditions est représentée fig. 794.

Ici, le cadre AA' autour duquel le fil s'enroule est circulaire. L'axe qui le supporte s'engage dans une colonne creuse P portée par un pied à vis calantes VV', et le mouvement se mesure sur le cercle azimuthal DD'. L'aiguille est contenue dans une boite B fermée à la partie supérieure par une glace. Elle est portée sur un pivot. Le bouton *b* permet de la mettre en expérience. Elle porte une aiguille d'ivoire légère *aa'* (fig. 795), sur l'extrémité amincie de laquelle est un trait qui, dans toutes les lectures, doit toujours pointer sur un même repère, celui où il se trouve

lorsque le cadre est dans le plan du méridien magnétique, tout courant étant supprimé.

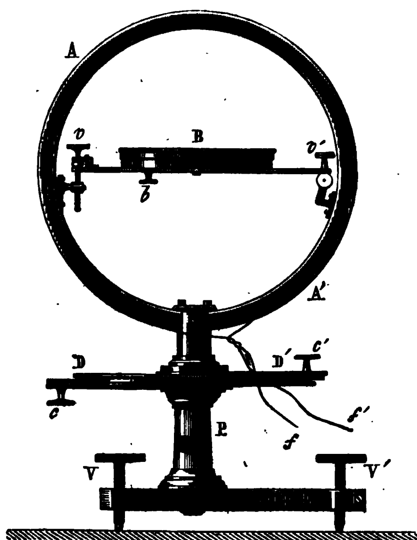


Fig. 794.

Boussole des tangentes. — Si l'on dirige le cadre ABCD (fig. 793) en une position telle que l'axe *dc* soit parallèle à la direction de l'action magnétique terrestre dans le lieu de l'expérience, l'aiguille *ab* se placera dans une direction perpendiculaire au cadre aussitôt qu'un courant traversera le fil, et, si on l'écarte de cette position, elle y reviendra par une série d'oscillations isochrones. Il en résulte que, pour la position d'équilibre de l'aiguille et pour les positions voisines, l'action totale du cadre sur chaque pôle est une force d'intensité constante et toujours perpendiculaire au plan du cadre. Si l'aiguille est courte, il en sera de même dans toutes les positions qu'elle pourra occuper, car alors, lorsqu'elle passe d'une de ces positions à une autre, l'action exercée sur le pôle par un des éléments quelconques du courant n'éprouve pas de variation sensible, et il en est de même de la résultante totale. En partant de ce principe, il est facile de voir que si, après avoir fixé à demeure dans le plan du méridien magnétique le cadre d'une boussole

semblable à celle de la fig. 794, on transmet à travers le fil conducteur des courants provenant de sources très-différentes, les tangentes des déviations données à l'aiguille seront proportionnelles aux intensités des actions exercées dans chaque cas sur les pôles de l'aiguille.

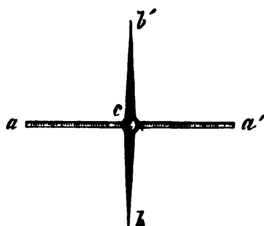


Fig. 795.



Fig. 796.

Soit, en effet, F l'intensité de l'une quelconque de ces actions et φ l'angle d'écart correspondant; la composante, dans une direction à la fois horizontale et normale à l'aiguille déviée, de la force avec laquelle la terre agit sur le pôle *a* (fig. 796) est $H \sin \varphi$. Celle de l'action du courant sur le même pôle est $F \cos \varphi$. Il en résulte que pour l'équilibre on doit avoir $H \sin \varphi = F \cos \varphi$, ou $F = H \operatorname{tg} \varphi$.

On peut aussi, du reste, à l'aide d'une boussole des sinus, vérifier qu'avec le nouvel appareil que nous venons de décrire, les tangentes des déviations sont proportionnelles aux intensités des actions totales que le circuit circulaire exercerait sur un pôle magnétique près de son centre. Il suffit pour cela de placer dans un même circuit une boussole des sinus et une boussole des tangentes. Les sinus des déviations obtenues avec le premier appareil sont proportionnels aux tangentes des déviations données par le second.

§ 2. — MESURE DE L'INTENSITÉ DES COURANTS PAR LES OSCILLATIONS DE L'AIGUILLE AIMANTÉE. — VOLTAMÈTRES. — RHÉOMÈTRES MULTIPLICATEURS.

Méthode des oscillations. — Dès l'année 1823, Œrsted et Fourier, dans leurs recherches sur les phénomènes thermo-électriques, avaient fait servir l'observation des mouvements de l'aiguille aimantée à la mesure de l'*intensité* des courants; leur procédé était tout différent de celui que nous venons de développer.

Les appareils étaient disposés de manière que la direction des courants à mesurer fût perpendiculaire à celle du méridien magnétique, et que, par conséquent, les actions de ces derniers concordassent avec celle de la terre pour maintenir l'aiguille dans sa position d'équilibre, ou pour l'y ramener lorsqu'elle en était écartée. Alors on comptait le nombre d'oscillations faites par l'aiguille dans l'unité de temps, quand, toutes les soudures du circuit étant à même température, la terre agissait seule pour produire le mouvement oscillatoire; puis on déterminait le développement de courants de différentes intensités ; on comptait de nouveau les oscillations faites par l'aiguille dans le même temps, et l'on pouvait, des nombres obtenus, déduire les rapports des intensités des courants transmis successivement dans le circuit (voyez tome I^er, page 514).

Voltamètres. — Avant la découverte d'Œrsted, le dégagement du gaz dans les voltamètres était le seul phénomène dont l'observation pût donner des indications sur l'intensité des courants. Depuis les travaux d'Œrsted, de Fourier et de M. Pouillet, on a constaté expérimentalement qu'il y a proportionnalité entre la grandeur des effets chimiques que les courants peuvent produire et celle des actions qu'ils exercent sur une aiguille aimantée dans des conditions identiques. Ainsi, que l'on fasse passer successivement des courants inégaux dans un circuit qui contient un voltamètre et une boussole des sinus, et il sera facile de constater que, dans ces différentes expériences successives, les quantités d'eau décomposée dans le même temps sont proportionnelles aux sinus des déviations observées ; il en résulte que si l'on convient de prendre pour unité l'intensité du courant qui peut décomposer un gramme d'eau à la minute, et de regarder en conséquence comme égale à 2, 3, l'intensité des courants qui décomposent 2, 3 grammes d'eau dans ce même temps, deux courants dont les intensités seront entre elles comme m et n imprimeront à l'aiguille d'une boussole des sinus des déviations dont les sinus seront entre eux comme ces quantités m et n. Mais il ne faudrait pas conclure de cette concordance, que l'observation des voltamètres constitue une méthode commode et généralement applicable dans les recherches électriques. Le développement des gaz, leur mesure, présentent souvent des lenteurs et des causes d'incertitude, et surtout il est un grand nombre de cas où les courants que l'on étudie sont beaucoup trop faibles pour produire des effets chimiques mesurables, tandis qu'ils agissent encore très-énergiquement sur l'aiguille aimantée.

Un des exemples les plus frappants que l'on puisse citer à l'appui de cette assertion se rencontre dans l'étude de ces phénomènes thermo-électriques dont nous avons déjà parlé assez longuement, pages 581 et suiv. Le courant d'un couple bismuth-cuivre, même pour une différence de 100 entre les soudures, est complétement arrêté par la plus mince couche d'eau acidulée, tandis qu'il agit très-énergiquement sur l'aiguille aimantée, et cela sans qu'il soit besoin d'avoir recours à aucun artifice pour accroître son action. Pendant longtemps, en effet, pour manifester l'existence de ces courants, on a employé un appareil qui consistait en une lame de cuivre ABCD deux fois recourbée, soudée en A et D aux deux bouts d'un cylindre de bismuth. On dirigeait le cadre dans la direction du méridien magnétique, et après avoir placé en un de ses points, horizontalement et sur un pivot vertical, une petite aiguille aimantée *ab* mobile, on chauffait la soudure D; aussitôt l'aiguille s'écartait plus ou moins de la direction de la lame AB.



Fig. 797.

Multiplicateurs. — Lorsque dans des recherches électroscopiques on veut profiter de tous les avantages de la méthode électro-magnétique, il faut, comme nous l'avons déjà indiqué, employer les appareils multiplicateurs de Schweiger. Ce que nous avons dit au commencement de ce chapitre, et précédemment aux pages 579 et suivantes, fait connaître les points essentiels de la disposition de ces instruments. Une discussion plus approfondie de leurs conditions de sensibilité sera faite ultérieurement; ici nous nous bornerons à ajouter une remarque. Les actions exercées sur l'aiguille extérieure au cadre par la partie supérieure et par la partie inférieure de chaque spire du fil sont de sens contraires, mais les premières l'emportent sur les autres, et le sens du mouvement qu'elles tendent à lui imprimer concorde avec celui dans lequel est poussée l'aiguille intérieure. Tout se trouve donc combiné de manière à accroître la délicatesse de ces appareils; mais il ne faut pas oublier que, pour devenir des électromètres, ils doivent recevoir une graduation spéciale. Nous avons déjà insisté sur ce point à propos de l'appareil thermoscopique de Nobili et Melloni. Nous y reviendrons encore.

§ 3. — COMPARAISON DES QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ MISES EN JEU DANS DES COURANTS D'INTENSITÉS DÉTERMINÉES. — THÉORÈME DE M. POUILLET.

Lorsque le fil d'une boussole est, par l'une de ses extrémités, en contact permanent avec l'un des pôles d'une pile, si, avec l'autre extrémité du même fil, on touche le second pôle à des intervalles de temps un peu éloignés et se succédant périodiquement, de seconde en seconde par exemple, on voit l'aiguille de la boussole osciller d'une façon continue. Mais quand les contacts deviennent très-nombreux dans l'unité de temps, l'aiguille peut prendre une déviation fixe sous l'influence des impulsions successives qu'elle reçoit. Seulement, la déviation fixe ainsi obtenue est inférieure à celle que produirait le courant de la pile s'il passait sans interruption dans le conducteur. M. Pouillet, à qui l'on doit l'observation et la discussion de ce phénomène, le fit servir à établir un principe du plus haut intérêt.

Quelle que soit l'idée que l'on puisse se former d'un courant, on ne peut se refuser à admettre que si un même conducteur établit la communication entre les pôles d'une pile constante, d'abord pendant un temps t, et puis pendant un temps $2t$, il sera dans le second cas traversé par une quantité d'électricité double de celle qui le traverse dans le premier. Ce point de départ admis, il suit que si, grâce à des interruptions très-nombreuses et convenablement espacées, on s'arrange de manière que, pendant un certain temps, le circuit d'une pile soit aussi longtemps ouvert que fermé, la quantité d'électricité qui y circulera pendant ce temps sera juste moitié de celle qui le traverserait sans les interruptions dont nous parlons. Or, les expériences de M. Pouillet prouvent, en effet, qu'en ces conditions l'action électro-magnétique du courant périodiquement interrompu est moitié de celle de l'autre.

Cette expérience fondamentale fut faite de la manière suivante :

L'une des extrémités du fil d'une boussole des sinus était en communication permanente avec le pôle d'une pile de Daniell, l'autre extrémité était soudée à une languette métallique qui touchait la jante d'une roue destinée à jouer le rôle d'interrupteur. Cette roue portait 120 dents de même largeur, 60 de bois isolant et 60 en métal. Ces dernières communiquaient métalliquement avec l'axe de la roue, et par celui-ci au second pôle de la pile. Le circuit était fermé quand la languette touchait une dent métallique, et ouvert dans le cas contraire. Tant que la roue ne fai-

sait pas au moins cinq tours à la minute, l'aiguille oscillait; mais, pour toutes les vitesses de rotation supérieures, elle prenait une position d'équilibre parfaitement fixe, et l'intensité de l'action électro-magnétique correspondante était juste moitié de celle qu'exerçait le courant transmis sans interruption à travers le même circuit. Avec une autre roue dans laquelle les dents métalliques présentaient une surface double de celle des dents de bois, l'action du courant se trouvait réduite dans la proportion de 3 à 2, lors du mouvement de la roue.

Le théorème de M. Pouillet a depuis été étendu aux courants produits par l'électricité des machines.

Lorsque le fil d'un galvanomètre est très-long et qu'il communique au sol par une de ses extrémités, on peut faire dévier l'aiguille en donnant une étincelle à l'autre extrémité. Il faut seulement, pour réussir l'expérience, avoir soin de parfaitement isoler les unes des autres les différentes spires du circuit. Lorsque le fil du rhéomètre n'est pas très-long, on obtient encore la déviation pourvu qu'on prenne soin d'interposer une colonne d'eau ou une corde humide sur le trajet que l'électricité a à parcourir.

Si, au lieu d'une étincelle unique, on transmet à travers le circuit une série d'étincelles successives égales en intensité se succédant à de très-courts intervalles, on obtient une déviation permanente. Ainsi, que l'on mette, comme l'a fait M. Buff, le fil d'un galvanomètre en contact d'une part avec le sol, et d'autre part avec l'armure externe d'une bouteille de Lannes, et que l'on charge celle-ci avec une machine. Quand les étincelles de la bouteille se succéderont assez rapidement, si leur nombre est constant dans l'unité de temps, l'aiguille s'arrêtera dans une position fixe. Toutes choses égales d'ailleurs, la déviation croîtra avec le nombre des étincelles produites dans l'unité de temps; et si le rhéomètre est une boussole des tangentes, les tangentes des déviations fixes seront proportionnelles au nombre des étincelles qui éclatent en l'unité de temps entre les deux armures de la bouteille.

En comparant la tangente de la déviation obtenue dans une expérience de ce genre à celle qui serait produite par un courant capable de décomposer un gramme d'eau en une minute, on peut comparer la quantité d'électricité capable de produire ce dernier effet à celle qui, accumulée sur une bouteille de Leyde de dimension connue, produit une étincelle de décharge de longueur déterminée.

La comparaison conduit à un rapport d'une grandeur extraordinaire.

Ainsi, d'après M. Becquerel, « pour décomposer un milligramme d'eau, il faudrait la charge d'un carreau armé ayant une superficie d'environ *deux hectares,* et donnant des étincelles d'un peu plus de un centimètre de longueur.

CHAPITRE IV.

DE L'INFLUENCE EXERCÉE SUR L'INTENSITÉ DES COURANTS PAR LA RÉSISTANCE DU CIRCUIT EXTÉRIEUR ET PAR CELLE DE L'ÉLÉMENT. CONDUCTIBILITÉ DES CORPS POUR LES COURANTS.

§ 1. — INFLUENCE DU CIRCUIT EXTÉRIEUR SUR L'INTENSITÉ DES COURANTS.

L'intensité du courant que produit un électro-moteur déterminé varie avec les dimensions et la nature du circuit extérieur à travers lequel se complète la circulation électrique.

On emploie très-commodément les rhéomètres ordinaires pour démontrer cette proposition ; mais l'exactitude en avait été établie longtemps avant la découverte de l'action des courants sur les aimants. Ainsi, d'après Biot (*Traité de physique expérimentale et mathématique*), une pile très-propre à donner des commotions assez énergiques à un observateur qui en touchait les deux pôles avec les mains mouillées, ne produisait plus d'effets physiologiques sensibles lorsqu'on introduisait dans son circuit une colonne d'eau de faible section et de quelques centimètres de long.

D'autre part, à l'époque où Biot écrivait le récit de cette observation, Gay-Lussac et Thénard avaient déjà remarqué que la quantité de gaz dégagée dans un voltamètre en un temps donné varie considérablement, suivant la nature des substances dissoutes dans l'eau dont ce voltamètre est rempli. Dans leurs expériences, elle devenait nulle quand le liquide interposé entre les pôles n'était plus que de l'eau pure.

Enfin, la grande pile de l'École polytechnique, en se déchargeant à travers une chaîne de quelques personnes, ne donnait qu'une faible secousse aux expérimentateurs situés au milieu de

la chaîne, tandis que Gay-Lussac fut souffrant pendant plus de vingt-quatre heures pour avoir pris seul la décharge de cet appareil. Mais c'est surtout quand on emploie pour source d'électricité les éléments thermo-électriques que l'on voit les moindres variations dans le circuit extérieur accompagnées, toutes choses d'ailleurs égales, de changements considérables dans l'intensité des courants produits; aussi Fourier et Œrsted insistent fortement sur ce point dans leur Mémoire de 1823.

Lois de Davy. — Un même appareil électromoteur donnant dans un conducteur extérieur des courants dont l'intensité varie avec les dimensions et la nature de ce dernier, il y avait à chercher sous quelles conditions deux conducteurs différents employés successivement pour réunir les deux pôles d'une même pile sont traversés de courants égaux. En d'autres termes, il y avait à chercher dans quelles conditions deux conducteurs sont équivalents et peuvent se substituer l'un à l'autre dans un circuit sans qu'il en résulte aucun changement dans l'intensité du courant qui le parcourt.

Davy se posa le premier la question, et, pour la résoudre, il opéra de la manière suivante : l'appareil électro-moteur était une pile de Wollaston d'un assez grand nombre d'éléments, et dont l'intensité affaiblie par une action déjà prolongée était devenue sensiblement constante. Le courant passait à travers un voltamètre et décomposait l'eau. En réunissant par un fil additionnel deux points du circuit, A et B, situés, l'un avant, l'autre après le voltamètre, on pouvait, en donnant aux fils de jonction des dimensions convenables, diminuer peu à peu l'intensité du courant transmis à travers le voltamètre, et faire en sorte que l'action chimique disparût; quand cette condition était remplie, il suffisait d'allonger un peu le fil de jonction pour que les gaz se dégageassent de nouveau.

Davy regardait comme équivalents, au point de vue de la conductibilité, les fils qui, interposés ainsi dans le circuit entre les points A et B, éteignaient l'action chimique dans le voltamètre, et il reconnut que deux fils de même substance sont équivalents entre eux quand les sections sont proportionnelles à leurs longueurs. Cette loi fondamentale est identique à celle que nous avons déjà énoncée page 697, touchant la conductibilité calorifique.

Davy chercha aussi quelles sont les longueurs qu'il faut donner à des fils de même section et de natures différentes pour qu'ils soient équivalents, et il prit les rapports inverses de ces longueurs pour mesures des rapports existant entre les conductibilités des

métaux dont étaient formés les fils sur lesquels portaient ses observations. D'après cette définition, si l'on représenté par c la conductibilité propre d'une substance, par l et s la longueur et la section d'un fil qui en soit formé, de même par c', s', l' les mêmes éléments pour un cylindre d'un autre corps, l'équivalence de ces deux fils, au point de vue de la facilité avec laquelle ils transmettent l'électricité, sera complète si l'on a $\frac{sc}{l} = \frac{s'c'}{l'}$. En ces circonstances, on dit que les deux fils offrent même résistance au courant, et on prend l'expression $\frac{l}{cs}$ pour mesure de cette résistance.

Expérience de M. Becquerel. Rhéomètre différentiel. — M. Becquerel, dans un travail imprimé aux *Annales de physique et chimie* en 1826, a fait un emploi remarquable du rhéomètre multiplicateur à la vérification de la loi de Davy d'une part, et à la mesure des conductibilités d'autre part.

Concevons un élément électro-moteur AB (fig. 798), et supposons que les conducteurs D et C qui recueillent l'électricité aux pôles A et B, se bifurquent chacun en deux autres, c et c' pour l'un, d et d' pour l'autre, sous la condition que le circuit Ccn' soit identiquement pareil au circuit D$d'm'$, et que de même C$c'm$ soit identique à Ddn.

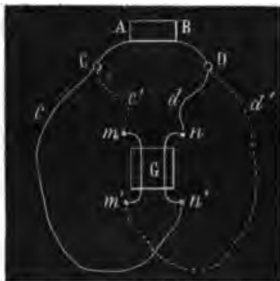


Fig. 798.

Puis supposons deux autres fils, F et F', identiques entre eux et d'une longueur assez considérable; enroulons ces deux fils F et F' sur le cadre d'un même rhéomètre G, de manière qu'ils forment un même nombre de tours et que les deux circuits qui résulteront de leur enroulement agissent d'une manière identique sur l'aiguille de l'appareil, au cas où ils seraient traversés par des courants égaux.

Concevons enfin quatre godets, m, m', n, n', pleins de mercure.

En m et m' on fait plonger les deux extrémités du fil F, en n et n' celles du fil F', puis on fait plonger c' et d' en m et m', et c et d en n' et n; c et c' étant identiques avec d et d', les deux fils F et F' sont traversés par des courants identiques; dirigés en sens inverses, l'aiguille reste au repos.

Établissons maintenant entre m et m' d'une part, entre n et n de l'autre, des communications à l'aide de deux nouveaux fils que nous appellerons T et T'.

Lorsqu'en faisant varier la longueur de l'un d'eux, on aura ramené l'aiguille au repos, ces fils T et T' seront équivalents au point de vue de leur action sur le courant. Pour ces deux fils, les produits $\frac{cs}{l}$, $\frac{c's'}{l'}$, considérés et définis à la page précédente, seront égaux, et de l'équation $\frac{sc}{l} = \frac{s'c'}{l'}$, on déduira le rapport $\frac{c}{c'}$. Nous ne nous arrêterons pas sur la discussion de ce procédé, mais nous appellerons l'attention sur le principe duquel il dérive, savoir, que quand un courant se partage entre plusieurs circuits, il leur donne des courants partiels égaux lorsque leurs résistances sont identiques.

§ 2. — MESURE DES CONDUCTIBILITÉS ÉLECTRIQUES.

Expériences de M. Pouillet. — M. Pouillet a employé une méthode différente pour comparer entre elles les facultés conductrices des différents métaux. Il prenait d'abord un rhéomètre différentiel semblable à celui de M. Becquerel, et dont les deux fils, aussi identiques que possible en nature et en dimensions, se trouvaient disposés bien exactement de la même manière par rapport à l'aiguille.



Fig. 799.

Il se procurait ensuite deux sources thermo-électriques bien pareilles. Pour cela, il fondait dans le même moule deux éléments de bismuth de la forme indiquée fig. 799, et à chaque bout il soudait des fils de cuivre de même section, de même longueur, et tirés d'un même paquet Aa et Db.

Lorsqu'on établissait une même différence de température entre les soudures de ces deux éléments, ils développaient dans des circuits identiques des courants qui l'étaient eux-mêmes; aussi, quand on les faisait passer en sens inverse à travers les fils du rhéomètre différentiel, ils en maintenaient l'aiguille au zéro. Ceci posé, tandis que l'aiguille était maintenue au zéro par les actions contraires de ces deux courants égaux, on intercalait dans un des deux circuits un fil de métal de nature déterminée, de longueur l, de section s et de conductibilité c; dans

le second, un fil de platine de section s' et de conductibilité c', et l'on faisait varier la longueur efficace de ce dernier jusqu'à ce que l'équilibre du rhéomètre eût été rétabli. — Soit alors l' la longueur du fil de platine intercalé dans le circuit. Le rapport $\frac{c}{c'}$ était donné par l'équation

$$\frac{cs}{l} = \frac{c's'}{l'}.$$

Après avoir comparé ainsi les conductibilités des divers métaux à celle d'un fil de platine déterminé, M. Pouillet chercha le rapport de cette dernière à celle du mercure pur à zéro, et cette comparaison le conduisit aux nombres suivants.

CONDUCTIBILITÉ DES MÉTAUX D'APRÈS M. POUILLET.

Noms des substances.	Conductibilité.
Mercure	100
Platine	855
Cuivre pur	3838
Or pur	3975
Argent à 963	5152

Expériences de M. Ed. Becquerel. — M. Ed. Becquerel, dans ses recherches sur les conductibilités, a employé avec d'heureux perfectionnements la méthode qui avait été primitivement donnée par son père, et il l'a en particulier appliquée à la solution d'une question difficile, celle de la mesure de la conductibilité des

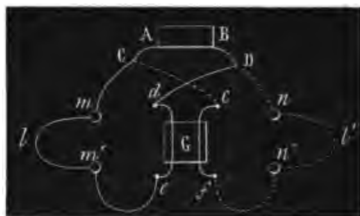


Fig. 800.

liquides. M. Ed. Becquerel bifurque le courant d'un élément hydro-électrique A B (fig. 800) à intensité à peu près constante, et, faisant passer en sens inverse les deux courants partiels qui en résultent à travers les fils d'un rhéomètre différentiel G, il fait en sorte d'amener l'aiguille au zéro. Cet effet, une fois ob-

tenu, persiste tant qu'on n'apporte aucune modification aux deux circuits traversés par l'électricité, et cela indépendamment des variations que peut subir l'élément électro-moteur. Mais si dans ces deux circuits on introduit des conducteurs nouveaux l et l', qui en accroissent la résistance, l'aiguille quitte le zéro, et elle n'y revient que si les résistances ajoutées ainsi de part et d'autre sont égales, c'est-à-dire si, pour les deux conducteurs que l'on compare, les produits $\frac{sc}{l}$, $\frac{s'c'}{l'}$, déjà considérés à la page précédente, sont égaux entre eux.

Conductibilité des liquides. — Ce procédé de M. Becquerel se prête de la façon la plus commode à la vérification des lois de Davy. Quand on veut l'employer pour comparer la conductibilité d'un liquide à celle d'un métal, on introduit dans chacun des circuits un appareil connu sous le nom de rhéostat à liquide. Cet appareil consiste en une éprouvette cylindrique dans laquelle plonge un tube de verre ouvert aux deux bouts, un peu plus étroit que l'éprouvette et concentrique avec elle. Dans ce tube, qui est bien vertical et exactement calibré, peut se mouvoir de haut en bas ou de bas en haut un disque de platine horizontal soutenu par une tige de platine entourée d'un corps isolant sur toute sa longueur. Au fond de l'éprouvette et près de la partie inférieure du tube, se trouve un second disque de platine horizontal comme le premier, et qui se relie métalliquement au reste du circuit. L'électricité entre par la tige centrale et passe du disque qu'elle soutient au second en traversant une colonne liquide dont on peut faire varier la longueur en enfonçant plus ou moins le disque mobile. Ce mouvement de la tige peut être exactement mesuré.

Si l'on intercale dans chaque circuit deux appareils de ce genre, il sera toujours facile d'en régler les tiges de façon que l'aiguille indicatrice revienne au zéro. Mais si l'on ajoute d'un côté un fil de platine, l'équilibre sera de nouveau rompu ; il faudra, pour le rétablir, introduire dans l'autre circuit une colonne liquide équivalente, ce à quoi l'on arrive en faisant un peu mouvoir la tige du rhéostat de ce circuit.

Dans les expériences relatives à la mesure de la conductibilité des liquides, il est indispensable d'intercaler dans chacun des deux circuits des rhéostats à liquides bien pareils entre eux ; cela tient à ce que, sous l'influence du courant, les surfaces métalliques en contact avec ces liquides se couvrent de gaz, et éprouvent des modifications qui gênent et compliquent le mouvement électrique. Si ces modifications se développent exclusivement dans l'un des circuits, elles changent les conditions de l'expé-

rience; mais leur influence se neutralise lorsqu'elle se fait sentir également de part et d'autre.

Le tableau suivant fait connaître, d'après M. Becquerel, les rapports des conductibilités de différents liquides à celle de l'argen prise pour unité.

TABLEAU DE LA CONDUCTIBILITÉ DE QUELQUES LIQUIDES, CELLE DE L'ARGENT ÉTANT PRISE ÉGALE A 100.

Noms des substances.	Température.	Conductibilité.
Argent	0°,00	100,000,000 0
Acide azotique à 36°	13 ,10	0,000,093 7
Eau salée saturée	13 ,40	0,000,031 5
Sulfate de cuivre saturé	9 ,15	0,000,005 4
Eau distillée		0,000,000 1

Variations des conductibilités avec la température. — Les nombres du tableau précédent sont, comme nous l'avons indiqué, relatifs à des températures basses. On sait trop peu de chose sur la nature d'un courant électrique pour prévoir *à priori* si la conductibilité est ou non dépendante de la température. Mais l'expérience a démontré que cette dépendance existe, et le tableau suivant prouve qu'elle se fait sentir d'une façon très-notable entre les limites de la glace fondante et de l'eau bouillante.

TABLEAU DES CONDUCTIBILITÉS DES MÉTAUX A ZÉRO, 100 ET 200°, D'APRÈS M. LENTZ.

	A zéro.	A 100.	A 200.
Argent	136	94, 45	68, 72.
Cuivre	100	73,	54, 82.
Fer	17, 74	10, 87	7
Platine	14, 16	10, 93	9

Enfin, avant de terminer ces indications relatives à la conductibilité des corps pour l'électricité, nous ajouterons que les déterminations qui semblent mériter le plus de confiance indiquent que les rapports des conductibilités des corps pour l'électricité sont les mêmes que pour la chaleur, et ce fait important constitue une des analogies si nombreuses qui existent entre les lois de la propagation de ces deux agents dans les corps athermanes.

§ 3. — RÉSISTANCE DE L'APPAREIL ÉLECTRO-MOTEUR. — RECHERCHES DE OHM ET DE M. POUILLET. — RHÉOSTATS.

Dans le développement d'un courant voltaïque, l'élément de pile exerce une double influence. Il agit d'abord comme appareil producteur d'électricité, mais en outre il modifie, par la résistance propre qu'il oppose au mouvement électrique, l'intensité du courant qu'il tend à produire en vertu de sa force électromotrice.

Aussi l'on diminue beaucoup l'intensité de ce courant lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, on fait seulement décroître la conductibilité de l'appareil électro-moteur lui-même.

« ... Pour en avoir la preuve, montez une pile avec un conducteur humide tel que de l'eau saturée de muriate de soude, et donnez-lui seulement le nombre d'étages nécessaires pour qu'elle commence à décomposer l'eau saturée du même sel. Cela fait, montez une autre pile pareille composée d'un même nombre de couples métalliques; mais, au lieu d'interposer une seule rondelle humide entre chaque couple, placez-en plusieurs les unes sur les autres, toujours imprégnées de la même solution. Vous formerez un système d'une conductibilité moins parfaite que le précédent... En multipliant suffisamment les alternatives, vous finirez par ne plus pouvoir obtenir la décomposition de l'eau. — Les effets physiologiques et les étincelles auront été également affaiblis. *Cependant, vous n'avez altéré que la faculté conductrice de la pile, et nullement le principe de son électricité.* » (Biot, *Phys. exp. et math.*, t. II, 1816.)

Les éléments thermo-électriques ont une conductibilité propre incomparablement plus grande que celle des éléments hydro-électriques ordinaires; par suite, leur résistance propre doit devenir négligeable dans le circuit dès l'instant que les conducteurs extérieurs, qui servent à conduire l'électricité qu'ils produisent, ne sont point des lames ou des cylindres métalliques de très-courte longueur ou de section considérable. Mais quand ces conditions exceptionnelles se trouvent remplies, un accroissement dans la longueur ou une diminution dans la section des éléments thermo-électriques employés se traduit, toutes choses égales d'ailleurs, par une diminution dans l'intensité des courants obtenus.

La démonstration de cette proposition résulte d'expériences rapportées par Œrsted et Fourier dans le Mémoire dont nous avons déjà parlé. Ils avaient construit deux piles thermo-électriques

formées d'éléments en même nombre, de même nature, de même section. Ces piles fermaient elles-mêmes leurs circuits. Or, dans des conditions d'échauffement identiques, celle des deux piles dont les éléments étaient les plus longs donnait un courant de moindre intensité.

De tout ce qui précède, il résultait que l'on diminue l'intensité du courant produit dans un circuit voltaïque lorsqu'on fait varier, soit la résistance du conducteur extérieur, soit celle de l'élément électro-moteur lui-même, sans rien changer toutefois dans « le principe de sa force électro-motrice, » ainsi que le marquait Biot au passage cité plus haut. Quelle relation y a-t-il entre l'intensité du courant qu'un électro-moteur donné peut produire dans un circuit et les résistances des deux parties distinctes dont le circuit est formé ?

La solution de ce problème important résulte de deux séries de recherches exécutées, les unes en Allemagne par Ohm, les autres en France par M. Pouillet peu de temps après la publication des travaux d'Œrsted et de Fourier. — Elle se résume dans la loi suivante :

Si l'on réunit successivement par différents conducteurs les deux pôles d'un appareil électro-moteur constant, les intensités des courants produits sont en raison inverse de la résistance totale du circuit, c'est-à-dire en raison inverse de la somme des résistances de l'élément lui-même et du conducteur interpolaire.

Les expériences de Ohm ont été faites avec des éléments thermo-électriques; elles ont été insérées en 1826 au journal de Schweiger; celles de M. Pouillet ont été exécutées avec des éléments hydro-électriques. Voici comment M. Pouillet les résume au tome II de son *Traité de physique*, 1re édition (1828) :

« Dans une série d'expériences que j'ai faites avec une grande pile d'un seul élément, le courant de la pile avait à traverser : 1° deux gros fils en cuivre, 2° un grand cercle en cuivre au centre duquel était suspendue une aiguille aimantée dont on observait les déviations, 3° enfin, un fil de cuivre plus ou moins long et destiné à fermer le circuit.

« Les forces électro-magnétiques qui servaient de mesure à la conductibilité se trouvaient proportionnelles aux tangentes des déviations de l'aiguille, et, en employant successivement les longueurs l, l', l'' d'un même fil, les tangentes t, t', t'' des déviations n'étaient jamais en raison inverse de ces longueurs; mais elles étaient, en raison inverse de ces longueurs,

augmentées chacune d'une même quantité λ; ainsi on avait :

$$\frac{\lambda + l}{\lambda + l'} = \frac{t'}{t} \qquad \frac{\lambda + l}{\lambda + l''} = \frac{t''}{t} \qquad \frac{\lambda + l'}{\lambda + l''} = \frac{t''}{t'}.$$

« Cette quantité λ, qui restait constante pour différentes longueurs d'un même fil, changeait avec la nature de la substance, et, pour chaque substance, elle était en raison inverse de la section du fil. Il me semble, par conséquent, que la conductibilité totale du circuit est rigoureusement en raison inverse de la longueur des fils, pourvu qu'on tienne compte de la résistance qu'éprouve le courant à traverser le liquide qui sépare les éléments de la pile et à parcourir les divers conducteurs qui doivent l'amener aux fils qui sont directement soumis à l'observation. Ainsi, quand on opère, par exemple, sur un fil d'argent de 1 millimètre de diamètre, il faut concevoir que tous les conducteurs dont je viens de parler réduisent la force du courant autant que pourrait le faire un fil d'argent de 1 millimètre de diamètre et d'une certaine longueur, 1 mètre par exemple. Alors, si l'on force le courant à passer successivement par deux fils pareils, l'un de 1 mètre et l'autre de 2 mètres, les tangentes des deux déviations seront entre elles comme 2 est à 3, et non pas comme 1 est à 2, qui sont les deux longueurs véritablement soumises à l'expérience. »

Détermination de la résistance d'un élément. — D'après ce qui précède, on conçoit comment on peut déterminer la longueur d'un fil de section et de nature déterminées, et dont la résistance R équivaut à celles d'un élément électro-moteur et d'une boussole pris ensemble. Si l'on connaît d'ailleurs la conductibilité, la section et la longueur du fil qui constitue la boussole dont il s'agit, la résistance propre de cette dernière se calcule, et par suite, en la retranchant de R, on a la résistance de l'élément seul.

Résistance d'une boussole. — Lorsqu'on n'a pas de données sur la construction d'une boussole ou d'un rhéomètre, on en détermine la résistance en la comparant à celle d'un fil de conductibilité connue, par les procédés de M. Pouillet ou de M. Becquerel.

Graduation d'un rhéomètre. — La loi fondamentale établie par Ohm et par M. Pouillet conduit à une méthode simple pour graduer un rhéomètre dont la résistance a été mesurée ainsi que nous venons de l'indiquer.

On prend un élément dans lequel la force électro-motrice puisse être regardée comme constante. On en transmet le courant d'abord à travers le rhéomètre seul, puis à travers des circuits formés du rhéomètre et de fils dont les résistances propres r', r'', r''' ont été déterminées à l'avance. La somme R des ré-

sistances de l'élément et du rhéomètre est également connue. — Soient I, I', I'', I''' les intensités des courants produits dans chaque cas; elles seront liées entre elles par les relations

$$\frac{I'}{I} = \frac{R}{R + r'} \qquad \frac{I''}{I} = \frac{R}{R + r''} \qquad \frac{I'''}{I} = \frac{R}{R + r'''}.$$

On pourra donc les estimer toutes en fonction de la plus faible d'entre elles prise pour unité, et comme d'aileurs l'observation fera connaître les déviations correspondantes, on aura tous les éléments de la table de graduation cherchée.

Rhéostats. — L'ensemble des expériences décrites en ce chapitre même, montre qu'il est souvent nécessaire de pouvoir introduire commodément et rapidement dans un circuit un fil de résistance connue. Pour arriver à ce but, on emploie souvent le rhéostat adopté par M. Pouillet dans ses recherches sur la conductibilité des liquides. Cet appareil consiste en un fil de platine de section connue, tendu le long d'une règle divisée. Lorsque, après avoir relié une de ses extrémités avec l'un des bouts d'un arc conducteur, on met un autre de ses points en contact bien intime avec la deuxième extrémité de l'arc, on forme évidemment un circuit dont la résistance est égale à la résistance de l'arc, accrue de celle que présente la longueur de fil comprise entre les deux points de contact. Or cette dernière se mèsure immédiatement sur la règle divisée.

On peut encore employer avec avantage un système de bobines graduées, 10 bobines, par exemple, de 1 mètre à 10 mètres de fil connu. Elles sont toutes montées sur une planche, et l'on peut, à l'aide de viroles convenables, les introduire séparément dans le circuit. On peut aussi les combiner entre elles deux à deux, trois à trois; ainsi, dans l'hypothèse de 10 bobines graduées comme nous le supposons, on peut très-aisément accroître la résistance totale de celle d'un nombre quelconque entier de mètres de fil, pourvu que ce nombre ne dépasse pas $1 + 2 + \ldots + 10$, ou 55; enfin, à l'aide d'un mètre du même fil tendu le long d'une règle divisée comme dans l'expérience de M. Pouillet, on peut y introduire une quelconque des résistances précédentes, accrue d'une fraction arbitraire de mètre du même fil.

M. Despretz a souvent employé pour rhéostat un fil de cuivre de longueur très-considérable, 500 mètres par exemple, enroulé en hélice sur une sorte de châssis non conducteur ayant la forme de colonne prismatique creuse; les spires successives ne pouvaient se toucher, et à l'aide de deux pinces convenables il était facile d'introduire dans le circuit une portion quelconque de ce fil.

Rhéostat de M. Wheatstone. — On emploie aussi pour arriver au même résultat le rhéostat imaginé par M. Wheatstone. Cet appareil (fig. 801) se compose de deux cylindres de mêmes dimensions, l'un en cuivre, AB, l'autre en bois A'B', et d'un fil de laiton de faible diamètre. Les deux cylindres sont très-voisins l'un de l'autre ; ils ont leurs axes parallèles, et peuvent tourner sur eux-mêmes. Pour déterminer ce mouvement, on tourne à la main une manivelle fixée à l'axe de l'un d'eux, et alors, à l'aide d'un engrenage de renvoi, le mouvement se transmet à l'autre, sous la condition que dans chaque instant les rotations soient égales en grandeur absolue, mais de sens inverse pour les deux.

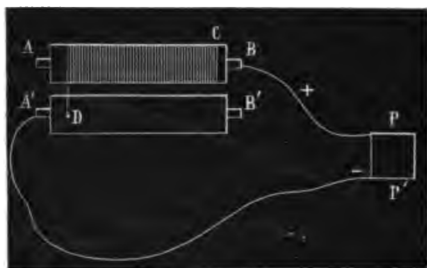


Fig. 801.

Le cylindre métallique a sa surface parfaitement unie, et la résistance qu'il oppose au mouvement de l'électricité est négligeable. Son axe communique par l'une de ses extrémités B à l'un des pôles de la pile PP'. L'autre extrémité est isolée. Le cylindre de bois est sillonné dans toute son étendue d'une gouttière hélicoïdale dans laquelle peut se loger le fil de résistance ; ce fil est primitivement enroulé tout entier sur le cylindre métallique, seulement le bout voisin de l'extrémité isolée A du cylindre métallique s'attache au commencement D de la gouttière du cylindre de bois, et de là il communique métalliquement à l'extrémité A' de l'axe de ce cylindre, laquelle extrémité A' est métallique, et communique au second pôle de la pile.

Lorsqu'on fait tourner les cylindres, on fait par cela même passer de AB en A' B' une longueur de fil proportionnelle à l'arc de rotation, et on augmente d'autant la résistance du circuit. La rotation est marquée sur un cadran. La longueur qui répond à chaque tour est connue. puisqu'elle est égale à la circonférence de base de chaque cylindre.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES PILES.

§ 1. — CAS OU LES ÉLÉMENTS SE SUCCÈDENT COMME DANS LA PILE A COLONNE.

Outre les résultats que nous avons déjà indiqués, Œrsted et Fourier ont encore consigné dans leur mémoire sur les phénomènes thermo-électriques un fait de la plus haute importance.

Que l'on se procure un assez grand nombre d'éléments thermo-électriques aussi identiques entre eux qu'il est possible, et qu'on les assemble en nombres différents, de manière à constituer plusieurs piles, fermant chacune son circuit. Dans des conditions d'échauffement identiques, toutes ces piles donneront des courants de même intensité, quels que soient les nombres d'éléments dont elles sont composées.

Or, comme par la disposition même des appareils la longueur totale de chaque circuit est proportionnelle au nombre des éléments qui le composent, aussi bien que la somme des forces qui tendent à y développer l'électricité, on peut affirmer que « l'intensité du courant total produit est en raison inverse de la longueur totale du circuit, et en raison directe du nombre des éléments qui concourent à sa production. » (De Montferrand, *Manuel d'électricité dynamique*, 1824.)

Des deux principes que résume cette proposition, l'un, le principe de la superposition des effets, ne diffère pas essentiellement de l'idée qui conduisit Volta à la découverte de la pile; l'autre est un cas particulier de la loi fondamentale que nous avons fait connaître à la fin du chapitre précédent.

Ces deux lois, ces deux principes, renferment toute la théorie des piles. Soient, en effet, plusieurs éléments qui aient pour résistances propres R, R', R'', et qui soient capables de développer respectivement, dans un circuit de résistance totale égale à l'unité, des courants dont les intensités soient E, E', E'', ou en d'autres termes qui aient des *forces électro-motrices* E, E',

E'', car on appelle ordinairement *force électro-motrice* d'un élément l'intensité du courant qu'il produit dans un circuit de résistance égale à l'unité ; soit, en outre, ρ la résistance d'un conducteur quelconque A. Si l'on assemble les divers éléments comme ils le sont dans une pile de Volta, et qu'ensuite on relie les deux pôles par le conducteur A, on devra, d'après le principe de la superposition des effets, trouver que le courant total qui traverse le conducteur interpolaire a une intensité égale à la somme des forces électro-motrices des différents éléments divisée par la résistance totale du circuit. Et en effet, les expériences de Fechner, et surtout celles de M. Pouillet ont vérifié complétement cette importante conséquence.

Ainsi, en admettant que les éléments de la pile soient en nombre *n*, qu'ils aient tous même résistance individuelle R et même force électro-motrice E, l'intensité I du courant total produit dans un conducteur de résistance ρ sera donnée par l'équation

$$I = \frac{nE}{nR + \rho}.$$

D'après cette formule, on voit que si la résistance ρ du conducteur extérieur est très-faible par rapport à celle de chacun des éléments de la pile, l'intensité du courant qui le traversera ne s'accroîtra pas sensiblement avec le nombre des éléments, puisque la résistance totale du circuit croîtra de son côté à peu près proportionnellement à ce même nombre. Il en serait tout autrement si la résistance ρ était fort grande par rapport à R ; alors chaque nouvel élément ajouté à la pile accroîtrait pour son compte la quantité d'électricité mise en jeu dans le circuit sans faire varier la résistance de ce dernier d'une fraction sensible de sa valeur totale.

Ce dernier cas est celui qui serait réalisé dans les circuits thermo-électriques dont le fil interpolaire aurait une longueur un peu considérable, et par suite une résistance relativement grande.

Le premier cas, au contraire, est celui que l'on observe lorsqu'on réunit par des fils métalliques courts les pôles d'une pile hydro-électrique dont les éléments ont une faible conductibilité.

De ces remarques suit une conséquence importante relative à l'emploi des rhéomètres. Dans l'étude des courants hydro-électriques, on peut employer avec avantage des rhéomètres ayant un fil très-long et replié un grand nombre de fois autour du cadre. Alors, en effet, l'accroissement de résistance qui répond à chaque nouveau tour du fil n'est qu'une très-minime fraction de

la résistance totale du circuit, et par conséquent, jusqu'à une limite très-éloignée, chaque nouveau tour amène un accroissement sensible d'action.

Il en est tout autrement quand la source est une pile thermo-électrique dont la résistance propre est ordinairement assez faible. Le fil du rhéomètre peut être court, assez gros et ne faire autour du cadre qu'un petit nombre de révolutions.

Soit, pour préciser, E la force électro-motrice de l'élément, R sa résistance, I l'intensité du courant qu'il donne dans le rhéomètre, n le nombre des spires, et R' la résistance de chacune. Si l'on admet que l'action F, exercée sur l'aiguille, soit proportionnelle à l'intensité I et au nombre des spires, ce qui arrive dans la boussole des sinus, on aura pour la déterminer la relation

$$F = KnI = Kn \frac{E}{nR' + R}.$$

K est une constante; dès que R est petit par rapport à nR', la valeur de F se réduit simplement à $K \frac{E}{R'}$, et ne dépend plus de n.

§ 2. — CAS OU LES ÉLÉMENTS SONT ASSEMBLÉS EN PLUSIEURS SÉRIES PARALLÈLES.

Quand la résistance du circuit extérieur est très-faible par rapport à celle des éléments que l'on veut mettre en jeu, il faut, si l'on veut avoir dans le circuit extérieur un courant très-intense, réunir tous les rhéophores positifs des divers éléments; par exemple, les amener tous dans un godet unique plein de mercure A; réunir de même, en un autre godet A', tous les rhéophores négatifs, et enfin joindre A et A' par le conducteur sur lequel on veut faire agir l'électricité. Les avantages de cette disposition sont connus depuis longtemps.

Pour expliquer ce point important de la théorie des piles, Ohm fait remarquer que, dans le cas dont il s'agit, le courant de chaque élément se partage en deux parties, l'une qui suit le conducteur interpolaire, l'autre qui passe à travers l'arc conducteur formé par tous les autres éléments, et le courant qui traverse le fil interpolaire est la somme de tous les courants partiels donnés à ce fil par les divers éléments. Dès lors, le calcul de l'intensité du courant qu'il faut estimer se ramène au problème suivant :

Théorie des courants dérivés. — On joint deux points p et q du circuit d'un appareil électro-moteur par deux fils a et b de

résistances r et r' (fig. 802). La force électro-motrice de l'appareil est E, et sa résistance propre R, compte tenu des portions de fils Pp, Nq. On demande quelles seront les intensités des courants transmis par les fils a et b.



Fig. 802.

Les fils a et b équivalent respectivement à deux autres de longueur et de conductibilité égales à l'unité et dont les sections s et s' seraient données par les relations

$$\frac{1}{s} = r, \quad \frac{1}{s'} = r' \quad \text{ou} \quad s = \frac{1}{r}, \quad s' = \frac{1}{r'}.$$

Leur ensemble équivaut donc à un fil unique de longueur et de conductibilité égales à 1, et dont la section serait

$$s + s' = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

La résistance d'un pareil fil est

$$\frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}} = \frac{rr'}{r + r'},$$

et la résistance totale du circuit de l'élément est

$$R + \frac{rr'}{r + r'} \quad \text{ou} \quad \frac{Rr + Rr' + rr'}{r + r'} = Z;$$

par suite l'intensité du courant total qui traverse les parties simples du circuit est

$$\frac{E}{Z} \quad \text{ou} \quad E\,\frac{r + r'}{Rr + Rr' + rr'}.$$

Quand ce courant se bifurque en p et q, on admet qu'il se partage entre les fils a et b en portions inversement proportionnelles aux résistances propres de ces fils, en sorte que si l'on appelle m et n ces deux portions, on aura, pour les déterminer, les relations

$$m + n = \mathrm{E}\,\frac{r + r'}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'}$$

et

$$mr = nr'.$$

On en déduit

$$m\left(1 + \frac{r}{r'}\right) = \mathrm{E}\,\frac{r + r'}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'},$$

$$m = \mathrm{E}\,\frac{r'}{r + r'}\,\frac{r + r'}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'}$$

et

$$n = \mathrm{E}\,\frac{r}{r + r'}\,\frac{r + r'}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'}$$

ou encore

$$(1) \qquad m = \frac{\mathrm{E}r'}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'},$$

$$(2) \qquad n = \frac{\mathrm{E}r}{\mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr'}.$$

Applications. — Ces formules s'appliquent sans difficulté au calcul de l'intensité du courant que donne dans un conducteur unique une pile formée de plusieurs séries parallèles.

Supposons, pour simplifier, que tous les éléments considérés aient même résistance R et même force électro-motrice E; alors chacun équivaut à un fil de longueur et de conductibilité égales à l'unité, et dont la section aurait pour valeur $\frac{1}{\mathrm{R}}$; $n - 1$ de ces éléments équivalent donc à un fil unique dont la section serait $\frac{n-1}{\mathrm{R}}$ et la résistance $\frac{\mathrm{R}}{n-1}$. Soit ρ la résistance du fil extérieur, pour obtenir l'expression du courant partiel m_1 que l'un quelconque des éléments donnera dans ce fil, il faudra, dans la

formule (1), remplacer r' par $\frac{R}{n-1}$, et r par ρ, ce qui donnera

$$m_1 = \frac{E\frac{R}{n-1}}{R\rho + R\frac{R}{n-1} + \frac{R\rho}{n-1}} = \frac{ER}{nR\rho + R^2} = \frac{E}{n\rho + R},$$

et la somme de tous ces courants sera

$$\frac{nE}{n\rho + R} = I.$$

Si ρ est très-petit par rapport à R, on aura simplement

$$I = \frac{nE}{R}.$$

Au contraire, si R était fort petit par rapport à ρ, on aurait eu

$$I = \frac{E}{\rho},$$

ce qui est parfaitement d'accord avec les résultats d'expérience cités plus haut.

CHAPITRE VI.

FORCES ÉLECTRO-MOTRICES.

§ 1. — DÉTERMINATION DES FORCES ÉLECTRO-MOTRICES.

Méthode générale. — Considérée à un point de vue purement théorique, la détermination de la force électro-motrice d'un élément de pile ne semblerait pas devoir présenter de difficulté spéciale. On transmettrait successivement le courant de l'élément à travers un circuit formé de longueurs inégales d'un même fil de cuivre et d'une boussole des sinus sur le cadre de laquelle serait enroulée une longueur connue de ce même fil. De la mesure des intensités obtenues dans ces différentes expériences, on déduirait la résistance de l'élément et, par suite, celle du circuit, et

enfin, par le calcul, on aurait l'intensité du courant, qui serait produit par l'élément éprouvé, si la résistance totale était égale à l'unité.

En réalité, quand il s'agit d'éléments thermo-électriques, les choses se passent à peu près ainsi.

Méthode de M. Wheatstone. — Dans ce dernier cas, et en général quand les éléments que l'on considère restent bien identiques à eux-mêmes pendant un temps un peu considérable, on peut aussi arriver à comparer leurs forces électro-motrices sans employer d'autre appareil rhéométrique que le rhéomètre multiplicateur ordinaire.

Soit le cas de deux éléments : on ferme successivement le circuit du premier par un rhéomètre ordinaire et deux longueurs de fils, l et l', et l'on mesure les déviations produites d et d'.

On opère de même avec le deuxième élément, et l'on mesure les nouvelles longueurs, l_1 et l_1', qu'il faut introduire dans son circuit, toujours avec le même rhéomètre, pour avoir les mêmes déviations, d et d'. Soient E et E' les forces électro-motrices des deux couples, i et i' les intensités de courant qui répondent aux déviations d et d', et L et L' les longueurs de fil équivalentes dans chaque cas au rhéomètre et à l'élément employé, on a successivement :

$$i = \frac{E}{L + l} \qquad i' = \frac{E}{L + l'}$$

et

$$i = \frac{E'}{L' + l_1}, \qquad i' = \frac{E'}{L' + l_1'};$$

on en déduit

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i'} = \frac{(l - l')}{E} = \frac{l_1 - l_1'}{E'} \dots$$

et par suite

$$\frac{E'}{E} = \frac{l_1 - l_1'}{l - l'}.$$

Mais lorsqu'il s'agit de courants hydro-électriques, on a à lutter contre une difficulté analogue à celle qui se présente dans la mesure des conductibilités des liquides; par suite même de la circulation du courant, les parties métalliques de l'élément, ou au moins l'une d'elles, se recouvrent de gaz. La conductibilité générale s'en trouve diminuée, et de plus, ces lames, ainsi altérées superficiellement ou *polarisées*, deviennent capables de produire

dans le circuit des contre-courants, plus faibles sans doute que le courant principal, mais qui enfin l'altèrent; et, ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les intensités de ces actions secondaires perturbatrices varient avec l'intensité même du courant principal; elles changent chaque fois que change la résistance totale du circuit lui-même. La méthode générale n'est plus ici applicable, puisqu'elle suppose essentiellement l'identité de l'élément électro-moteur, pendant toute la durée des expériences nécessairement un peu longues auxquelles on se trouve conduit.

Méthode de M. J. Regnauld. — Pour résoudre la difficulté, M. J. Regnauld a employé une autre méthode qui présente souvent de grands avantages. On la désigne sous le nom de méthode d'opposition. On prépare un grand nombre d'éléments thermo-électriques identiques entre eux, puis on ferme le circuit de l'appareil dont il faut déterminer la force électro-motrice, par un conducteur formé d'un rhéomètre sensible et d'un certain nombre de ses éléments thermo-électriques, disposés en série linéaire ou, si l'on aime mieux, en pile ordinaire. Les soudures de rang pair sont toutes maintenues à une température constante, les autres à une autre température également fixe et différente de la première. Ces éléments sont orientés de façon que le courant qu'ils produisent dans le circuit soit de sens inverse à celui de l'électro-moteur étudié, et l'on en détermine le nombre de façon que le courant dans le rhéomètre soit très-faible.

Ce résultat atteint, on rompt le circuit, on remet l'élément que l'on étudie dans son état initial, en enlevant, soit par des lavages convenables, soit par échauffement ou autre procédé, toute polarité électrique à celles de ses parties qui avaient pu en acquérir; puis on ferme de nouveau le circuit et l'on voit si le courant du rhéomètre est toujours faible et passe du positif au négatif lorsqu'on accroît ou qu'on diminue d'une unité le nombre des éléments thermo-électriques employés.

Supposons cette condition satisfaite, et soit n le nombre des éléments thermo-électriques pour lequel elle est remplie; soit E la force électro-motrice de l'électro-moteur soumis à l'étude, et e celle de chacun des éléments thermo-électriques; soit, enfin, R la résistance totale du circuit, et δ l'intensité très-faible du courant dont l'existence est accusée par le rhéomètre. On a : $\frac{E - ne}{R} = \delta$, ou simplement $E = ne$, si l'on admet $\delta = 0$.

Quoique en général les éléments hydro-électriques éprouvent

ces effets de polarisation que l'on cherche à éviter dans les déterminations qui nous occupent, il est de ces éléments pour lesquels les effets dont il s'agit sont très-faibles. M. J. Regnauld a observé qu'on obtient un élément de ce genre en séparant un vase en deux parties par une cloison poreuse, mettant d'un côté une solution de sulfate de zinc, de l'autre une solution de sulfate de cadmium, plongeant une lame de zinc dans la première, une lame de cadmium dans l'autre, et en complétant le circuit à l'ordinaire. Des éléments de ce genre ont une force électro-motrice beaucoup plus grande que celle des éléments thermo-électriques, et dès lors, quand on veut employer la méthode d'opposition que nous venons de décrire, on peut remplacer un certain nombre d'éléments thermo-électriques par un élément à sulfate de cadmium, préparé comme l'indique M. J. Regnauld. La force électro-motrice de cet élément aura été à l'avance soigneusement comparée à celle des éléments thermo-électriques que l'on se propose d'y adjoindre.

Méthode de M. Poggendorff. — Pour obtenir les mesures des forces électro-motrices indépendamment des effets de polarisation, M. Poggendorff avait proposé une méthode théoriquement moins simple que celle de M. Gaugain, mais qui pratiquement présente aussi des avantages. M. Poggendorff se propose de comparer la force électro-motrice x d'un élément Q' à celle d'un électro-moteur Q, dont on connaît la force électro-motrice E, et la résistance R.

On forme avec les éléments Q et Q' (fig. 803), et aussi avec un rhéomètre G, un circuit de résistance totale $R + R_1$, et dans lequel les courants de Q et Q' aillent en sens inverse, puis on réunit en outre les deux pôles de Q par un fil dont on peut faire varier rapidement et à volonté la longueur. Dans tous les cas, et pour toute longueur, on suppose connue la résistance r de ce fil additionnel. Si l'élément Q est convenablement choisi, on pourra toujours, en faisant varier r, amener facilement à zéro l'aiguille du rhéomètre. A ce moment, le courant principal que donne Q' dans le circuit total est détruit par le courant partie que donne Q dans l'arc PP_1P' de résistance R_1.

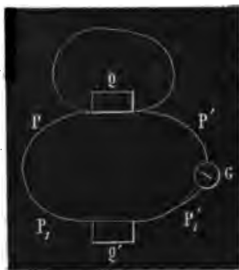


Fig. 803.

Cette condition s'écrit aisément en forme algébrique.

L'élément Q' donne, dans l'arc PP_1P' (v. page 755), un courant total dont l'intensité est

$$x \frac{R + r}{R_1R + R_1r + rR},$$

L'élément Q donne dans ce même arc un courant :

$$E \frac{r}{RR_1 + Rr + rR_1}.$$

Quand l'égalité a lieu, on a donc

$$x = E \frac{r}{R + r}.$$

Quelques essais préalables abrégent beaucoup le temps de la détermination de r, et rendent ainsi très-faible l'influence de la polarisation.

§ 2. — LOIS DES FORCES ÉLECTRO-MOTRICES.

Éléments hydro-électriques. — La force électro-motrice d'un élément hydro-électrique dépend de la nature des corps solides et liquides qui le composent.

Quant à l'étendue des contacts entre le liquide actif et le métal attaqué, elle est sans influence, au moins quand on écarte les effets de polarisation, et cela semble prouver que la rapidité avec laquelle la force électro-motrice amène l'électro-moteur à son maximum de charge est incomparablement plus grande que celle avec laquelle l'électricité se propage dans le conducteur interpolaire.

Il a été fait un grand nombre de recherches sur la détermination des forces électro-motrices des éléments de pile de natures diverses. Nous extrayons des Mémoires publiés par M. Ed. Becquerel sur cette matière, deux tableaux dont le premier est relatif aux éléments simples, le second aux éléments multiples. Dans l'un comme dans l'autre de ces tableaux, on a représenté par 100 la valeur de la force électro-motrice d'un élément formé par une lame de zinc pur, et par une lame de platine bien dépolarisée, plongées toutes deux dans un mélange de 9 parties d'eau contre une d'acide sulfurique concentré. On dépolarise la lame de platine en la lavant à l'acide azotique et la portant au rouge.

TABLEAU I.

FORCES ÉLECTRO-MOTRICES D'ÉLÉMENTS SIMPLES.

MÉTAUX ATTAQUÉS.	LIQUIDE.	MÉTAL INATTAQUÉ.	FORCE ÉLECTRO-MOTRICE.
Zinc amalgamé..	Eau acidulée par acide sulfurique : 9 d'eau et 1 d'acide..........	Platine..	103
Zinc pur........	Id..................	Id......	100
Cadmium........	Id..................	Id......	79
Plomb..........	Id..................	Id......	67
Étain...........	Id..................	Id......	66
Fer.............	Id..................	Id......	61
Aluminium......	Id..................	Id......	51
Antimoine.......	Id..................	Id......	35
Cuivre..........	Id..................	Id......	35
Argent..........	Id..................	Id......	22
Or..............	Id..................	Id......	0
Platine.........	Id..................	Id......	0

TABLEAU II.

FORCES ÉLECTRO-MOTRICES D'ÉLÉMENTS A DEUX LIQUIDES.

DISPOSITION DES COUPLES.	FORCES ÉLECTRO-MOTRICES.
Zinc pur. Eau acidulée par SO^3 au 1/10.............. Platine. Acide azotique ordinaire.....................	128
Zinc amalgamé. Eau acidulée par SO^3 au 1/10...... Cuivre. Eau saturée de sulfate de cuivre...........	76,24
Zinc amalgamé. Dissolution de potasse : eau, 4; potasse, 1.. Platine. Acide azotique...........................	161

Nous avons déjà fait remarquer, page 713, que dans tout élément électro-moteur il y a une série de contacts différents. Les actions électro-motrices qui se développent à chacun d'eux diffèrent en général par leurs intensités et par le sens dans lequel elles s'exercent. Dans tous les cas, l'effet total que l'on observe, c'est-à-dire la force électro-motrice de l'élément, doit-être représentée par la somme algébrique de ces actions. Entre toutes les séries d'expériences que l'on pourrait citer à l'appui de cette opinion, nous en choisirons une de M. Poggendorff.

M. Poggendorff détermina les forces électro-motrices de trois éléments simples ainsi formés :

Zinc, acide sulfurique, cuivre;
Zinc, acide sulfurique, fer;
Fer, acide sulfurique, cuivre.

Dans les couples n° 1 et n° 3, l'action de l'acide sur le cuivre tend à donner un courant inverse de celui qui résulte de l'action de cet acide sur le zinc ou le fer; et, dans l'élément intermédiaire, l'action exercée sur le fer produit dans le circuit un courant de sens opposé à celui qui résulte de l'action exercée sur le zinc. D'après cela, on doit s'attendre à voir la force électro-motrice du premier élément égale à la somme des deux autres: C'est précisément ce qui a lieu. Elle est égale à 13,79; celle du second à 7,39; celle du troisième à 6,00.

Expériences de M. Kohlrausch. — Dans le travail dont nous avons deja indiqué plusieurs résultats, M. Kohlrausch a comparé les charges que peuvent donner à un même électromètre condensateur différents éléments hydro-électriques, dont il avait d'ailleurs déterminé les forces électro-motrices, et il a trouvé que les charges dont il s'agit sont exactement proportionnelles aux forces électro-motrices correspondantes. Dans ces expériences, le fil de cuivre ou de platine soudé au métal attaquable était en contact avec l'un des plateaux du condensateur. Quant au fil qui recueillait l'électricité de la couche liquide, il se terminait par une plaque de même nature que lui et plongeant dans ce liquide.

Toutes les valeurs que nous avons précédemment données résultent d'expériences dans lesquelles on annulait la polarisation. Si on la laissait se développer, on pourrait obtenir des résultats complétement différents, car il est des éléments dont elle peut faire varier la force électro-motrice dans le rapport de 2 à 1.

Piles de Ritter. Piles de Grove. — L'expérience qui met le mieux en évidence le développement des courants secondaires de polarisation est due à M. Grove. On dispose les uns à la suite

des autres une série de voltamètres à lames de platine, et on les fait traverser par un courant; lorsque les éprouvettes contiennent une suffisante quantité de gaz, on interrompt toute communication entre les lames et la pile, et on réunit les voltamètres extrêmes par un circuit formé d'un fil et d'un rhéomètre. Aussitôt on voit l'aiguille du rhéomètre accuser un courant de sens inverse à celui qui avait primitivement circulé à travers l'appareil, et en même temps on voit disparaître graduellement les gaz des éprouvettes; le courant secondaire s'arrête quand ces gaz ont disparu complétement. Cette expérience curieuse est la suite naturelle d'une expérience analogue et faite anciennement par Ritter. Ce physicien, ayant formé une colonne par la superposition de rondelles de cuivre et d'intermédiaires humides sans autre métal, la fit traverser par un courant qu'il interrompit au bout de quelque temps. Réunissant alors les extrémités de la colonne par un conducteur, il vit ce dernier traversé par un nouveau courant inverse du premier et assez intense pour décomposer l'eau et donner des commotions.

Éléments thermo-électriques. — Les méthodes des pages 606 et 607 s'appliquent immédiatement à la détermination des forces électro-motrices des éléments thermo-électriques, puisque avec de tels éléments les effets de polarisation ne sont plus à craindre. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de déterminer la force électro-motrice que possède celui qui est représenté fig. 799, lorsque, l'une des soudures étant à zéro, l'autre est portée à 100°. On reliera les deux bouts *a* et *b* des fils de cuivre de l'élément aux extrémités d'un circuit renfermant une boussole des sinus, et dont on pourra faire varier la résistance. On portera l'une des soudures, D par exemple, à 100°; on maintiendra à zéro la seconde soudure, les points d'attache des fils de l'élément à ceux de la boussole, et autant que possible le reste du circuit; enfin, on achèvera l'opération à l'ordinaire. Les fils de l'élément pourraient être d'une nature autre que celle du fil de la boussole, sans que la méthode perdît rien de son exactitude, dès l'instant que leurs contacts avec les fils de celle-ci s'opèrent dans des conditions identiques entre elles.

Influence de la température. — Lorsqu'on chauffe graduellement une des soudures d'un élément thermo-électrique, le reste du circuit étant à zéro, on constate que, pour un certain nombre de couples, l'intensité du courant produit croît proportionnellement à la température de la soudure chaude, jusqu'à une centaine de degrés. Toutefois, cette proportionnalité n'est pas une loi générale; ainsi, d'après M. Becquerel, si l'on opère avec

un élément zinc et or, l'intensité du courant cesse de croître quand la température de la soudure chaude atteint 70° ; au delà elle diminue, devient nulle à 150°, puis reparaît en sens inverse.

Un phénomène qui se rapproche du précédent a été observé par M. Pouillet dans ses études pyrométriques. En opérant avec un élément fer-platine, M. Pouillet a constaté que la force électro-motrice moyenne correspondant à chaque degré va en décroissant depuis la température moyenne jusqu'à celle du rouge naissant; ensuite elle augmente pour reprendre vers 1,000° la valeur qu'elle avait à zéro.

Pour achever de définir l'influence des températures des différentes parties des circuits thermo-électriques, nous ajouterons, d'après M. Becquerel, que lorsqu'on a déterminé les intensités des courants produits dans un circuit à zéro par un élément dont une des soudures est portée successivement à toutes les températures comprises entre 0 et T, on peut calculer l'intensité du courant que l'on développerait dans le même circuit maintenu à t en élévant à t_1 la soudure chaude, pourvu que t et t_1 soient tous deux inférieurs à T. Il suffit, pour cela, de retrancher l'une de l'autre les intensités i_1 et i relatives aux températures t_1 et t; la différence $i_1 - i$ sera l'intensité cherchée.

Influence de la nature des métaux du couple sur le sens du courant. — Dans des conditions données de température, le sens du courant produit par un élément thermo-électrique change avec la nature des métaux qui le composent. M. Becquerel a tiré de ses expériences une règle très-simple, et qui permet de trouver immédiatement le sens du courant produit par un grand nombre d'éléments thermo-électriques différents. Le circuit est à zéro et la soudure chaude à 20° : « Que l'on considère la liste suivante, où sont rangés systématiquement les noms d'un certain nombre de métaux :

1 Bismuth.	5 Cuivre.	8 Zinc.
2 Platine.	6 Or.	9 Fer.
3 Plomb.	7 Argent.	10 Antimoine.
4 Étain.		

Si l'on accouple un quelconque M de ces métaux avec un de ceux qui le précèdent, M', et qu'on chauffe la soudure ainsi formée, il se produira un courant qui traversera la soudure chaude en passant de ce dernier métal M' au premier. De telle sorte que, dans le circuit extérieur, le métal qui occupe le rang le plus élevé dans le tableau sera comme le pôle positif de l'élément. Ainsi, dans un circuit fer-cuivre, le courant à la soudure chaude

va du cuivre au fer, et dans le circuit qui joint extérieurement le fer au cuivre il va du fer au cuivre.

Influence de la nature des métaux sur la force électro-motrice d'un élément thermo-électrique. — M. Becquerel a déterminé les forces électro-motrices relatives des couples que l'on peut former avec les différents métaux inscrits au tableau de la page précédente. La soudure chaude était toujours à 20° et le reste du circuit à zéro. Les résultats de ses expériences sont consignés dans le tableau suivant :

FORCES ÉLECTRO-MOTRICES RELATIVES DE DIFFÉRENTS COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

La soudure chaude est à 20°, le circuit à zéro.

POLE POSITIF.	POLE NÉGATIF.	INTENSITÉ DU COURANT.
Fer.	Étain.	31,24
Cuivre.	Platine.	8,55
Fer.	Cuivre.	27,96
Argent.	Cuivre.	2,00
Fer.	Argent.	26,20
Fer.	Platine.	36,07
Cuivre.	Étain.	3,50
Zinc.	Cuivre.	1,00
Argent.	Or.	0,50

Ces nombres satisfont à une relation remarquable. Ils montrent que si l'on considère trois quelconques des métaux auxquels ils se rapportent, la force électro-motrice de l'élément que l'on formerait avec deux d'entre eux est, dans les conditions de l'expérience, égale à la somme algébrique des forces électro-motrices des éléments que l'on obtiendrait en réunissant le troisième à chacun des deux autres. Par suite, si l'on réunit par un circuit extérieur, tout entier maintenu à zéro, les deux extrémités d'une chaîne formée de fils des différents métaux cités au tableau précédent, en chauffant à 20° toutes les soudures de cette chaîne on obtiendra le même courant que si la chaîne thermo-électrique, tout en conservant la même résistance totale,

n'était formée que des deux métaux extrêmes, et ne présentait par conséquent qu'une seule soudure à 20°.

Volta, comme nous l'avons dit, admettait que le contact de métaux hétérogènes est, indépendamment de tout échauffement, une cause de dégagement d'électricité. Pour lui, la force électro-motrice qui se développe en de pareils contacts était la *source principale* de l'électricité des piles. Sur ce dernier point, on a abandonné les idées de Volta, mais on ne serait pas fondé à dire que le contact de deux corps hétérogènes, sans action chimique sensible, ne peut pas être une cause de développement d'électricité. Dès lors, il n'est pas inutile de rappeler ici que, d'après Volta, quand on veut charger un condensateur en le touchant avec une lame de zinc tenue à la main, il est indifférent que le zinc touche directement le plateau, ou qu'il soit mis en communication avec lui par une chaîne quelconque de métaux hétérogènes soudés bout à bout.

Par des expériences analogues à celles de Volta, Peclet a constaté que l'on peut charger un condensateur en établissant communication entre ses deux plateaux par un arc formé de colonnes liquides de natures différentes en contact entre elles, et il a constaté qu'en ces conditions la charge de l'appareil est toujours la même que si les liquides extrêmes étaient directement en contact entre eux au lieu d'être réunis par une chaîne de plusieurs liquides différents.

Récemment enfin, M. Raoult a vérifié, au moins pour un nombre de cas assez considérable, l'exactitude de la proposition énoncée par Peclet.

« On dispose une rangée de verres à boire en contact. Les vases extrêmes renferment, l'un une lame de cuivre plongeant dans du sulfate de cuivre, l'autre une lame de zinc plongeant dans du sulfate de zinc. Les verres intermédiaires contiennent des liquides dont on peut faire varier la nature, et deux consécutifs quelconques d'entre eux sont mis en communication par des tubes en U renversés, pleins de liquides conducteurs et fermés par des membranes. Tout cet ensemble constitue un élément dont on peut mesurer la force électro-motrice. Or, en opérant avec 10 liquides intermédiaires différents et les arrangeant de toutes les manières possibles, M. Raoult a toujours obtenu même force électro-motrice qu'en unissant directement les vases extrêmes par une colonne de sulfate de cuivre.

Courants thermo-électriques dans un circuit formé entièrement d'un même métal. — Nous terminerons ce chapitre en disant que, d'après les observations de M. Becquerel, on peut

obtenir des courants thermo-électriques dans un circuit formé d'un seul et même métal. Il suffit que, de part et d'autre du point chauffé, il y ait une différence notable entre l'état moléculaire intérieur, ou les conditions physiques générales du conducteur, et par suite une propagation de chaleur se faisant dans des conditions convenablement différentes.

CHAPITRE VII.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ, SOIT DANS LES PILES ELLES-MÊMES, SOIT DANS LES CONDUCTEURS INTERPOLAIRES.

§ 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX DE VOLTA ET DE BIOT. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES DE M. BECQUEREL ET DE M. GAUGAIN.

Distribution de l'électricité dans l'intérieur de la pile. — La distribution de l'électricité dans l'appareil voltaïque et dans le conducteur qui en joint les pôles a été étudiée avec grand soin par Volta lui-même et par Biot, et les recherches plus récentes de M. Becquerel et surtout de M. Kohlrausch ont confirmé, précisé et étendu les résultats auxquels Volta était arrivé.

Les idées de Volta sur la nature de la force électro-motrice pouvaient se traduire de la manière suivante : que l'on conçoive deux éléments complexes, identiques entre eux et formés chacun, 1° d'un cuivre, 2° d'un intermédiaire humide, 3° d'un zinc ; ces éléments étant primitivement isolés, et à l'état naturel, si on les superpose en les prenant avec une pince isolante, il y aura, après l'établissement du contact entre le zinc du premier et le cuivre du second, une certaine quantité d'électricité positive, a, sur le premier de ces éléments, et sur le second une quantité de fluide négatif égale aussi en valeur absolue à a, c'est-à-dire pouvant recomposer du fluide neutre avec l'électricité positive a du premier élément ; on peut dire alors que la différence des états électriques de ces couples est $2a$. Elle se reproduirait sans aucun changement, lors même qu'avant d'être superposés les éléments seraient chargés de quantités quelconques q et q' d'électricités de même nom ou de noms contraires.

Enfin, quand plusieurs éléments semblables sont réunis sous forme de pile, cette différence constante, qui tend à s'établir entre les états électriques de deux consécutifs quelconques d'entre eux, par suite même de l'action de la force électro-motrice, n'est aucunement altérée par les réactions des fluides accumulés aux différents couples de la série.

On déduit aisément de ces principes :

1° Que dans une pile en contact avec le sol par une de ses extrémités, la quantité de fluide libre sur chacun des éléments successifs croît en progression arithmétique à mesure que l'élément considéré s'éloigne de celui qui, communiquant au sol, se trouve par cela même à l'état naturel;

2° Que dans une pile isolée il se trouve aux deux éléments extrêmes des quantités égales de fluides contraires. Ces quantités sont chacune moitié de celle qui se trouverait à l'un des pôles si l'autre communiquait au sol. Au milieu de la pile, il n'y a pas d'électricité libre. L'une des moitiés est chargée de fluide positif, l'autre de fluide négatif, et d'un élément à l'autre la variation de la charge se fait toujours en progression arithmétique.

Pour montrer comment s'établissent toutes ces conséquences de l'idée de Volta, soit le cas de la pile isolée et $2n$ le nombre de ses éléments complexes, si on la monte sans établir de communication entre ses diverses parties et le sol, il y aura finalement autant de fluide positif libre dans l'appareil qu'il y en aura de négatif, soit X la quantité de fluide positif qui se trouve au pôle positif, les charges des éléments successifs seront

$$X, \quad X - 2a, \quad X - 4a, \ldots, \quad X - 2a(2n - 1),$$

la somme égale

$$[2X - 2a(2n - 1)]n,$$

et, comme elle doit être nulle, on aura

$$X = a(2n - 1),$$

et, sur l'élément de rang p, on aura

$$a(2n - 1) - 2a(p - 1).$$

Si $p = n$, cette différence devient

$$a(2n - 1) - 2a(n - 1) = a;$$

et, sur le suivant, elle sera de $-a$.

Ajoutons que tous ces raisonnements, ces calculs et les conséquences auxquelles ils conduisent subsistent sans modification dans la théorie qui place le siége principal du développement d'électricité au contact du liquide et du métal le plus attaquable.

Expériences de Biot. — Dans le cas de la pile non isolée, les considérations qui précèdent prouvent que la quantité d'électricité libre sur l'élément supérieur croît proportionnellement au nombre des éléments. Biot a obtenu de nombreuses vérifications de cette proposition. Il formait des piles avec des éléments identiques entre eux, mais pris en nombres différents. Il mettait l'un des pôles de ces piles en communication au sol, puis il chargeait un même condensateur de Volta, en le mettant successivement en contact avec celui des pôles des piles considérées qui ne communiquait pas au sol. Enfin il mesurait à la balance électrique les charges communiquées au condensateur. En opérant ainsi, Biot s'est assuré qu'avec les éléments de pile ordinaire le temps pendant lequel le condensateur restait, pour se charger, en contact avec le pôle de la pile n'avait pas d'influence sur la grandeur absolue de la charge. Il a aussi constaté que dans une pile isolée la charge est nulle au milieu et se développe symétriquement de part et d'autre de ce point. Seulement, elle est positive d'un côté et négative de l'autre.

Expériences de M. Gaugain. Électromètre gradué. — Dans des expériences plus récentes, M. Gaugain a vérifié l'exactitude des résultats de Biot, en employant pour appareil de mesure un électromètre gradué.

La table de graduation d'un électromètre donne immédiatement les valeurs relatives des charges qui répondent aux divers degrés d'écartement des lames d'or. Nous avons déjà indiqué au tome I de ce traité une méthode que l'on a quelquefois employée pour arriver à une pareille graduation. Il en est une autre plus commode et fondée sur l'emploi de la balance de Coulomb. — On charge l'électroscope d'une certaine quantité d'électricité, et l'on observe l'écartement correspondant α, puis, après avoir touché la boule avec un plan d'épreuve, on mesure à la balance électrique la charge A de ce plan d'épreuve. Immédiatement après on le remet à l'état naturel et on le fait rapidement toucher $n-1$ fois de suite à la boule de l'électroscope, en le remettant toujours à l'état naturel à chaque opération ; seulement, après le dernier contact, au lieu de ramener le plan à l'état naturel, on le reporte dans la balance pour mesurer son état électrique.

Soit μ la fraction de la charge de l'électroscope que le plan

d'épreuve prend à chaque contact, et Q la charge primitive de cet électroscope ; on a, abstraction faite des pertes par l'air,

$$\frac{\mu Q}{\mu Q(1-\mu)^{n-1}} = \frac{A}{A'} = \frac{1}{(1-\mu)^{n-1}},$$

μ étant calculé de cette manière, on en déduit les charges que possédait l'électroscope après chacun des n contacts successifs, et si dans chaque cas on a mesuré l'écartement des lames, on a tous les éléments de la table de graduation à construire. Mis successivement au contact des différents points d'un corps électrisé, et dont l'état électrique est invariable, un électroscope gradué comme nous venons de le dire y prend des quantités de fluide proportionnelles à celles qui s'y trouvent. On peut le démontrer expérimentalement, puisque avec le plan d'épreuve on peut déterminer les rapports des quantités d'électricité qui existent aux différents points du corps dont il s'agit.

En un mot, l'électroscope gradué se met en équilibre électrique avec les différents points du corps, comme, dans les expériences faites sur la conductibilité calorifique, les thermomètres, au contact des différentes couches des barres conductrices, se mettaient en équilibre de température avec ces couches. Dans ce qui va suivre, nous appellerons tension électrique d'une tranche d'un conducteur traversé par un flux d'électricité la charge que prend en contact avec cette tranche un électroscope gradué comme nous venons de l'indiquer, et auquel nous supposons une sensibilité suffisante.

Distribution de l'électricité dans le conducteur interpolaire. — Quant à la distribution dans le conducteur interpolaire, les expériences de Volta l'établissent de la façon la plus nette. Nous extrayons la description de ces expériences du *Traité de physique expérimentale* de Biot (t. I, 1824).

« La première chose à faire dans cette analyse est de considérer l'état électrique des milieux interposés entre les pôles de la pile. Cet état est rendu sensible par une expérience de Volta, qui consiste à joindre les pôles de la pile par un conducteur assez imparfait ; par exemple, une longue bande de papier imprégnée d'eau pure. Après que la communication a été établie pendant quelques instants entre les deux pôles, si l'on touche successivement les différents points de la bande avec un condensateur, on trouve que lorsque la pile est isolée chaque moitié est chargée de l'espèce d'électricité qui est propre au pôle auquel elle adhère, et l'intensité de ces charges va en diminuant depuis chaque pôle jusqu'au milieu de la bande qui se trouve à l'état neutre, au

moins en supposant la conductibilité constante dans toute la longueur: car si l'on rend l'écoulement de l'électricité plus facile sur une des parties de la bande que sur l'autre, comme on peut le faire en y versant quelques gouttes d'une solution saline plus conductrice, les charges électriques de cette moitié deviennent plus fortes à égale distance du pôle, et le point neutre se rapproche du pôle opposé.

Si la pile communique au sol, le point neutre est au sol même.

Des choses analogues doivent se passer lorsque les pôles sont joints par une colonne liquide. »

Expériences de M. Becquerel. — Tous ces résultats ont été vérifiés depuis, et, dès l'année 1826, M. Becquerel en avait donné une confirmation remarquable, en suivant une méthode toute différente de celle de Volta.

Après avoir marqué sur un fil conducteur (fig. 804) une série de points consécutifs équidistants, M. Becquerel (*Ann. de chimie et phys.*, 1826) avait soudé en tous ces points d'autres fils *l*, *l'*, *l''*, ..., identiques entre eux, puis il établit à l'aide du conducteur principal la communication entre les deux pôles d'un appareil électro-moteur d'intensité constante. Cela fait, il mit successivement les deux extrémités du fil d'un rhéomètre en contact avec celles de deux fils de dérivation consécutifs *a* et *b*, *b* et *c*, *c* et *d*..., et il put constater que le courant dérivé ainsi produit était toujours identique à lui-même, ce qui concorde très-bien avec les résultats obtenus par Volta sur la distribution des fluides dans le conducteur interpolaire.

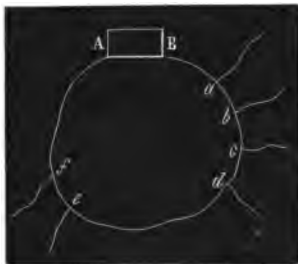


Fig. 804.

§ 2. — ASSIMILATION DE LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ A CELLE DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR PAR VOIE DE CONDUCTIBILITÉ.

Recherches de Ohm. — Les résultats ainsi obtenus en étudiant la distribution de l'électricité dans un conducteur réunissant directement les deux pôles d'une pile manifestaient une première série d'analogies entre la propagation de l'électricité et celle de la chaleur dans les corps qui peuvent donner passage à ces agents.

Les recherches de Davy sur la conductibilité électrique ren-

dirent ces ressemblances plus évidentes. Ces recherches établissaient en effet que pour la propagation de l'électricité, comme pour celle de la chaleur, deux fils de même nature sont équivalents lorsque leurs sections sont proportionnelles à leurs longueurs.

Dans le travail qu'il a fait paraître en 1827 sur la théorie mathématique des courants, Ohm développe l'idée d'une identification complète de la théorie de la propagation de l'électricité et de celle de la chaleur dans les corps conducteurs athermanes.

Soit un conducteur de section S, de périmètre p, de longueur l et de conductibilité Q, établissant la communication entre deux sources dont les tensions soient constantes et égales à A pour la première et à A' pour la seconde, et supposons $A > A'$. Considérons, comme à la page 690, trois tranches consécutives a, b, c, dont les distances à celles dont la tension est A soient respectivement x, $x + dx$, $x + 2dx$, les tensions seront respectivement

$$y, \qquad y + \frac{dy}{dx}\,dx, \qquad y + \frac{2dy}{dx}\,dx + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,$$

Dans l'instant dt la couche b gagnera une quantité d'électricité égale à la différence qui existe entre celle qu'elle reçoit de a et celle qu'elle perd soit par sa surface extérieure, soit par transmission à la suivante.

Admettons que la quantité reçue de la tranche a soit proportionnelle à la différence $-\dfrac{dy}{dx}\,dx$ des tensions actuelles de ces deux couches. Admettons que la perte à l'extérieur soit proportionnelle à la tension y, et à la surface extérieure pdx de la tranche, de sorte qu'elle ait une expression de la forme $hpdx$, h étant une onstante. Admettons enfin que la quantité d'électricité transmise de b à c soit aussi proportionnelle à la différence

$$-\left(\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2\right)$$

des tensions de ces couches. La quantité d'électricité qui restera dans la tranche b pour en accroître la tension, aura une expression de la forme

$$\left(\frac{QS}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 - hpydx\right)dt$$

ou

$$dx\left(QS\,\frac{d^2y}{dx^2} - phy\right)dt.$$

Cette quantité d'électricité donne dans l'instant dt à la tranche b un accroissement de tension $\frac{dy}{dt}\,dt$ qui lui est proportionnel, en sorte que, finalement, ici comme à la page 691, on arrive, et cela de la manière absolument identique, à l'équation différentielle

$$(1)\qquad dx\,\frac{d^2y}{dx^2} = dx\left(\frac{phy}{QS} + \frac{qS}{QS}\,\frac{dy}{dt}\right).$$

$qSdx$ étant la quantité d'électricité qu'il faut donner à une couche du conducteur, de longueur dx, pour en faire croître la tension électrique d'une quantité égale à l'unité.

Si l'on pose

$$\frac{ph}{QS} = a^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{q}{Q} = \mu,$$

l'équation (1) devient :

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2y + \mu\,\frac{dy}{dt}.$$

Elle est identique avec l'équation (3) de la page 691, et rien de plus naturel, puisque de part et d'autre on fait des hypothèses identiques sur les lois de la propagation par voie de conductibilité intérieure, et sur la déperdition par voie de conductibilité extérieure.

Expériences de M. Kohlrausch. — De nombreux travaux publiés depuis une trentaine d'années ont vérifié l'exactitude de l'idée de Ohm, dont les pages précédentes contiennent le développement. M. Kohlrausch, dans une série de recherches insérées en 1839 aux *Ann. de Pogg*, a étudié la distribution finale des tensions dans le fil d'une pile en communication avec le sol. Ici, par définition, $\frac{dy}{dt}$ était toujours nul, et l'on pouvait aussi supposer $h = 0$, c'est-à-dire négliger la perte par l'air.

L'équation se reduisait donc à la forme simple $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, d'où $y = A - Bx$. Et en effet, toutes les expériences de M. Kohlrausch indiquent que y varie en progression arithmétique, quand x varie suivant une loi de cette espèce.

Le procédé à l'aide duquel M. Kohlrausch a étudié la distribution de l'électricité dans le circuit voltaïque ne différait pas essentiellement de celui de Biot. Son appareil se composait de deux parties distinctes.

La première était un condensateur semblable à celui de l'électromètre de Volta, à cela près toutefois que le plateau supérieur n'était pas verni. On avait seulement pris la précaution de déposer sur sa surface inférieure trois fines gouttelettes de gomme laque disposées les unes par rapport aux autres comme les trois sommets d'un triangle équilatéral, et formant trois pieds par lesquels il s'appuyait sur la lame isolante qui recouvrait le plateau inférieur.

La seconde partie de l'appareil était une sorte de balance de Coulomb de faibles dimensions.

Pour montrer comment M. Kohlrausch opérait, nous indiquerons spécialement les expériences dans lesquelles il a déterminé la distribution de l'électricité dans le circuit d'une pile dont un des pôles était en communication avec le sol. — On mettait en communication avec ce pôle, et par conséquent aussi avec le sol, le plateau inférieur du condensateur, puis on faisait communiquer le collecteur au point dont on voulait mesurer la charge électrique. Aussitôt l'équilibre établi, on rompait le contact et l'on amenait le collecteur au contact de la tige métallique qui supportait la boule fixe de la balance; la deuxième boule se chargeait par communication et s'écartait de la première. La torsion qu'on devait imprimer au fil pour la ramener à une distance fixe du zéro de la graduation était proportionnelle au carré de la charge du collecteur, et par suite au carré de la quantité d'électricité libre au point du circuit mis en communication avec le collecteur. En opérant ainsi, M. Kohlrausch s'est assuré que quand le circuit est un fil homogène de même section dans toute son étendue, les charges prises par le condensateur varient en progression arithmétique lorsque les distances au point neutre varient également en progression arithmétique.

D'autres expériences ont donné au même physicien un second résultat également d'accord avec les déductions théoriques développées page 698. Supposons que le pôle qui est en contact immédiat avec le sol soit mis en outre en communication avec l'autre pôle par un conducteur formé de deux parties de même nature mais de sections différentes : si, à partir de la jonction de ces deux conducteurs, on marque sur l'un et sur l'autre deux séries de points dont les distances à la jonction varient en progression arithmétique, la raison de la progression étant la même dans les deux séries, il est facile de s'assurer que les tensions qui ont lieu aux points successifs de chaque série varient aussi en progression arithmétique. Les deux progressions que l'on obtient ainsi sont l'une croissante et l'autre décroissante; elles se rac-

cordent au point de jonction des fils, leurs raisons sont inversement proportionnelles aux sections, et il en résulte que dans chacun des deux fils chaque tranche est traversée dans le même temps par la même quantité de fluide.

§ 3. — DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UN CONDUCTEUR IMPARFAIT, RÉUNISSANT DEUX SOURCES A TENSIONS CONSTANTES, MAIS DIFFÉRENTES ENTRE ELLES.

Recherches de M. Gaugain. — M. Gaugain (voyez *Ann. de chim. et phys.*, t. 59) s'est placé à un point de vue tout différent, dans une longue série de recherches sur la propagation de l'électricité. Pour sources électriques, il prenait ordinairement des corps métalliques isolés, que l'on pouvait, au besoin, maintenir dans un état de charge constant. Pour conducteurs, il employait des fils de coton, des colonnes d'huile, en un mot des cylindres ou des prismes doués d'une conductibilité propre assez faible. D'ailleurs, il se mettait tantôt dans des circonstances où la déperdition par l'air était négligeable et où l'on pouvait, par conséquent, négliger le terme $\frac{ph}{Qs}y$ de l'équation générale, tantôt, au contraire, il observait dans des conditions où ce terme devait être conservé.

Enfin il ne se borna pas à étudier l'état final : à plusieurs reprises il s'occupa de la recherche beaucoup plus délicate des lois de l'état variable.

1^er^ cas. — **État stationnaire. — Les pertes par l'air et les supports sont supposées nulles.** — Pour étudier la distribution de l'électricité dans l'état final et dans des conditions où les pertes par l'air fussent négligeables, M. Gaugain prenait comme conducteurs des colonnes d'huile renfermées dans des auges isolantes. Une de leurs extrémités était mise en contaet avec le sol, l'autre avec une pièce métallique qui communiquait en même temps avec un électroscope gradué et avec l'intérieur d'une grande bouteille de Leyde. L'électroscope indiquait la tension qui existait sur la colonne au point où il se confondait avec elle. Cette tension restait constante pendant un temps suffisant aux expériences. Quant aux tensions aux autres points de la colonne, on les obtenait en touchant successivement ces derniers avec un autre électroscope gradué et isolé, et on constatait qu'elles décroissaient en progression arithmétique lorsque les distances à l'origine variaient elles-mêmes suivant cette loi.

Comme nous l'avons déjà vu, le décroissement en progression arithmétique est une conséquence de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = o$. Cette équation ou les considérations qui y conduisent donnent en outre, sur les grandeurs relatives des quantités d'électricité qui s'écoulent à la minute par des conducteurs différents, des indications que nous avons déjà exposées pages 697 et 698, à propos de la propagation de la chaleur. M. Gaugain a montré qu'elles sont d'accord avec l'expérience. Son appareil de mesure était toujours un électromètre à lames d'or gradué. La table d'un pareil instrument fait connaître les valeurs relatives des charges absolues qui répondaient aux divers degrés de divergence et par suite les rapports qui existent entre les pertes d'électricité qui correspondent à chaque degré de décroissement dans la divergence (voir page 769). Cet appareil étant placé dans un air très-sec, il faisait communiquer sa boule avec le sol par un fil de coton médiocrement conducteur; puis, il le chargeait de façon que la divergence des lames fût environ 28°; et quand cette divergence était devenue 25, il déterminait par expérience le temps t nécessaire pour qu'elle diminuât de 3°, pour qu'elle devînt 22°, par exemple. Si l'on désigne par Q la quantité d'électricité que doit perdre l'appareil pour que la divergence passe de 25° à 22°, $\frac{Q}{t}$ était la perte faite par seconde dans les conditions de l'expérience. Cette perte était exclusivement ou presque exclusivement due à l'écoulement par le fil (1).

Or, en opérant avec des fils de longueurs différentes, M. Gaugain reconnut : premièrement, que les temps t, nécessaires pour que l'écart diminue de 25° à 22°, sont proportionnels aux longueurs l, l', d'où résulte que les quantités d'électricité perdues à la seconde, c'est-à-dire $\frac{Q}{t}$, $\frac{Q}{t'}$ ..., sont en raison inverse de ces longueurs. Il reconnut en outre que les pertes dont il s'agit sont proportionnelles aux sections des fils, et que pour des fils de même longueur et de même section elles varient avec la nature du fil; les rapports des valeurs qu'elles prennent peuvent servir de mesure aux rapports des conductibilités de ces fils.

(1) Pour s'assurer qu'il en était réellement ainsi, on recommençait l'expérience après avoir enlevé le fil, et l'on constatait que pour descendre de 25° à 22° la lame mettait un temps t' si considérable que $\frac{1}{t'}$ était négligeable devant $\frac{1}{t}$.

Enfin si, toutes choses d'ailleurs égales, l'on fait varier la charge de la source, la quantité d'électricité qui s'échappe à la seconde par un fil déterminé varie proportionnellement à cette charge. Pour s'en assurer, après avoir déterminé le temps t nécessaire pour que la divergence des lames passe de 25 à 22°, on suit l'observation et l'on détermine de même les temps t_1, t_2, qu'il faut pour que cette divergence passe de 20 à 17, de 15 à 12... La table de graduation fait connaître les quantités Q, Q_1, Q_2 d'électricité que doit perdre l'appareil pour que ces rapprochements aient lieu, et aussi les charges absolues correspondantes, F, F_1, ..., et on trouve toujours que les pertes à la seconde $\frac{Q}{t}$, $\frac{Q_1}{t_1}$... sont proportionnelles aux charges F, F_1...

2e cas. — **État stationnaire. — Les pertes par l'air et les supports ne sont plus négligeables.** — Lorsqu'un conducteur est en contact avec le sol par une de ses extrémités et avec une source constante par l'autre, la tension qu'il présente au milieu de sa longueur cesse d'être égale à la moitié de celle qu'il possède à l'extrémité par laquelle il touche la source, lorsque la perte par l'air devient une fraction sensible de celle qui se fait par voie de conductibilité. Alors, la distribution finale de l'électricité sur le fil est donnée par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y \qquad \text{ou} \qquad y = Me^{ax} + Ne^{-ax}.$$

Nous citerons comme exemple deux séries d'observations faites sur des fils de coton de même diamètre et ayant pour longueurs, l'un 8 mètres, l'autre 4 mètres. On mettait ces fils successivement en contact d'un côté avec une source dont la tension constante était égale à 56 et de l'autre avec le sol.

Quand le régime était établi, la tension au milieu du fil de 8 mètres était 9,5 et 18,2 au milieu du fil de 4 mètres; elle était donc dans les deux cas notablement inférieure à $\frac{56}{2}$, et par suite il était évident que l'équation du problème n'était plus $\frac{d^2y}{dx^2} = o$.

Pour vérifier si l'équation plus générale

$$y = Me^{ax} + Ne^{-ax}$$

représentait bien la distribution, M. Gaugain l'appliqua succes-

sivement aux deux cas qu'il avait traités expérimentalement. D'abord, quand il s'agit du fil le plus court, y doit être égal à 36 pour $x=0$, à 48,2 pour $x=2$, et à 0 pour $x=4$. De là trois relations qui permettaient de déduire M, N et a. En calculant de même la série d'expériences faites avec le deuxième fil, on en déduisait aussi la valeur de la constante a. Or, ces deux valeurs se sont trouvées sensiblement égales, comme cela doit être au point de vue de notre théorie.

3e cas. — **État variable.** — Avant que le conducteur n'ait atteint cet état stationnaire que nous venons d'étudier, la tension électrique en chacun de ses points varie d'une manière continue. Pour savoir ce qu'elle est à une époque quelconque t, et plus généralement pour déduire de la théorie la solution des diverses questions qu'on peut se poser relativement à l'état variable de la barre, il faut prendre l'équation sous l'une des deux formes,

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{dy}{dt} \qquad \text{ou} \qquad (1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{dy}{dt} + a^2y,$$

suivant qu'on pourra ou non négliger les pertes par l'air et les supports, lesquelles sont représentées par le terme en y.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du premier cas. Les dérivées successives d'une fonction de la forme $Me^{a't}$, dans laquelle t est la variable et a' un nombre positif, ne diffèrent de cette fonction que par des facteurs positifs; et, d'autre part, des fonctions de la forme $R \sin \pi b^2 x + R' \cos \pi b^2 x$, se reproduisent les mêmes, à un facteur négatif près, après deux différentiations successives.

Enfin, la dérivée deuxième d'une fonction du premier degré en x est nulle d'elle-même.

Ceci posé, il est évident qu'une fonction y donnée par la relation :

$$(3) \quad y = A + Bx - \Sigma(M \sin b^2x + N \cos b^2x)e^{-a't}$$

satisfait pour un choix convenable des constantes à une relation diffentielle de la forme :

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{dy}{dt}.$$

L'équation (3) définit y par une relation très-générale. On démontre qu'elle est l'intégrale complète de (2). Sans insister sur ce point analytique, nous allons faire voir comme cette relation (3) a été vérifiée par l'expérience.

Supposons que le conducteur soit isolé et qu'il ait une longueur l, il faudra qu'au bout d'un temps suffisamment grand la tension soit la même en tous ses points, et égale par conséquent à celle de la source. Il en résulte que la constante A doit précisément être égale à la tension de la source et que B doit être nul.

Ainsi l'équation (3) doit prendre la forme :

$$y = A - \Sigma(M \sin b^2x + N \cos b^2x)e^{-a't}.$$

Puis, comme y doit être égal à A, quel que soit t pour $x = 0$, il en résulte que la constante N elle-même est nulle. Enfin, si l'on admet que $\frac{dy}{dx}$ soit nul au bout du conducteur, à toute époque, ou en d'autres termes si l'on admet que vers cette extrémité les tensions des tranches contiguës sont sensiblement égales entre elles, il en résulte :

$$\Sigma M b^2 \cos b^2 l = 0,$$

d'où

$$b^2 = \frac{(2n+1)\pi}{2l}.$$

Enfin, pour que l'on ait $\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{dy}{dt}$ il faut qu'entre les constantes b^2 et a' existe la relation :

$$b^4 e^{-a't}(\Sigma M \sin b^2x) = \mu a' \Sigma(M \sin b^2x)e^{-a't} \quad \text{ou bien} \quad b^4 = \mu a'.$$

Si maintenant, à la place de μ, nous remettons la valeur $\frac{q}{Q}$ (voyez page 773), l'équation qui donne y dans le cas particulier qui nous occupe sera :

$$y = A - \Sigma\left(M \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 Q}{4l^2q}t}.$$

Pour que y prenne une valeur déterminée A_1 au point où $x = l$, il faut qu'on ait :

$$(4) \qquad A - A_1 = \Sigma\left(M \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} l\right)e^{-\frac{(2n+1)\pi^2 Q}{4l^2q}t},$$

D'où résulte que si l'on fait changer l et Q, la valeur de t,

pour laquelle $A - A_1$ reprendra une valeur déterminée, au point pour lequel on a $x = l$, sera inversement proportionnelle à Q et directement proportionnelle au carré de l.

Pour vérifier ces différentes conséquences de l'équation (4), M. Gaugain mettait en communication avec un petit électroscope à décharge l'extrémité des différentes colonnes d'huile dont nous avons parlé, et il mesurait le temps qui s'écoulait entre le moment où l'huile était mise en communication avec la source et celui où la lame d'or de l'électroscope à décharge venait pour la première fois toucher la tige de décharge. Ce temps était, comme la théorie l'indique, proportionnelle à l^2 et en raison inverse de Q.

Généralisation de la question précédente. — D'après tout ce qui précède, il est facile de trouver une expression de y qui satisfasse au cas le plus général du problème et par conséquent à l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y + \mu \frac{dy}{dt}.$$

D'abord, comme pour les valeurs du temps très-grandes, cette expression ne devra pas différer de celle qui satisfait simplement à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y$, il en résulte qu'elle contiendra un terme indépendant de t, de la forme $Me^{ax} + Ne^{-ax}$; puis, pour $a = 0$, sa partie variable devra se réduire à

$$\Sigma(M' \sin b^2x + N' \cos b^2x)e^{-a't}.$$

Une fonction égale à la somme de ces deux quantités aura pour différentielle seconde par rapport à x,

$$a^2(Me^{ax} + Ne^{-ax}) - b^4\Sigma(M' \sin b^2x + N' \cos b^2x)e^{-a't},$$

et pour différentielle première par rapport à t,

$$-a'\Sigma(M' \sin b^2x + N' \cos b^2x)e^{-a't}.$$

Pour que la différence entre la première de ces deux quantités et le produit de la seconde par μ soit égal au produit de la

fonction y par a^2, il suffit que l'on ait $\mu a' - b^4 = a^2$. Sous cette condition l'équation :

$$y = (Me^{ax} + Ne^{-ax}) + \Sigma(M' \sin b^2x + N' \cos b^2x) e^{-a't}$$

est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2y + \mu \frac{dy}{dt}.$$

Les conditions particulières aux extrémités de la barre établissent de nouvelles relations entre les constantes de cette équation et, dans tous les cas, un nombre suffisant d'expériences permet toujours de les déterminer.

§ 4. — PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ DANS LES FILS TÉLÉGRAPHIQUES. — ÉTUDE DE L'ÉTAT VARIABLE.

Recherches de M. Guillemin. — M. Guillemin (*Ann. de chim. et phys.*, t. 60) a étudié, pendant la durée de l'état variable, la propagation de l'électricité dans les fils télégraphiques. Ces fils ne sont jamais parfaitement isolés; les phénomènes qu'ils présentent sont donc de ceux qui rentrent dans le cas très-général que nous venons d'étudier. De plus, malgré leur extrême longueur, leur grande conductibilité rendait très-courte la période de variation. Le problème était donc fort difficile. La méthode employée par M. Guillemin revient à celle-ci : mettre pendant un temps très-court, quelques millièmes de seconde, l'un des pôles d'une pile en communication avec une des extrémités d'un fil télégraphique dont l'autre bout communique au sol, et mesurer la tension donnée, au bout de ce temps très-court, à une tranche quelconque O du fil. Le second pôle de la pile communique au sol. Pour mesurer la tension au point O, M. Guillemin y applique un des bouts du fil d'un rhéomètre, l'autre extrémité de ce fil communiquant aussi au sol, et c'est d'après la marche de l'aiguille qu'il cherche à estimer la tension. Mais ici se présente une nouvelle difficulté qui paraît au premier moment insoluble. Pour que les indications du rhéomètre puissent réellement renseigner sur la tension en O, il faudrait que le contact en ce point ne durât que pendant une fraction négligeable du temps déjà si petit que le fil a mis à se charger; et bien évidemment un contact si court ne pouvait pas imprimer à l'aiguille une déviation mesurable.

Mais on conçoit que, si faibles que soient ces actions dues à

des contacts presque instantanés, on peut, en les multipliant un grand nombre de fois à la seconde, finir par en rendre les effets sensibles. Pour y arriver, M. Guillemin a opéré de la manière suivante : Il faisait communiquer le pôle avec le fil pendant *n* millième de seconde, et au bout du n^e millième de seconde, il faisait au point O avec le rhéomètre une dérivation durant seulement 1 ou 2 millièmes de seconde. Alors il ramenait le fil télégraphique et le rhéomètre à l'état naturel, puis recommençait la même série d'opérations et la reproduisait un grand nombre de fois en un très-court intervalle de temps. Pour une répétition assez rapide, l'aiguille du rhéomètre prenait bientôt une déviation fixe qui servait de mesure à l'intensité de la dérivation et, par suite, à la tension en O.

Supposons que sur un plan isolant soient appliqués : premièrement, une lame conductrice ABC en communication permanente avec le pôle P (fig. 805) d'une pile constante, dont le second

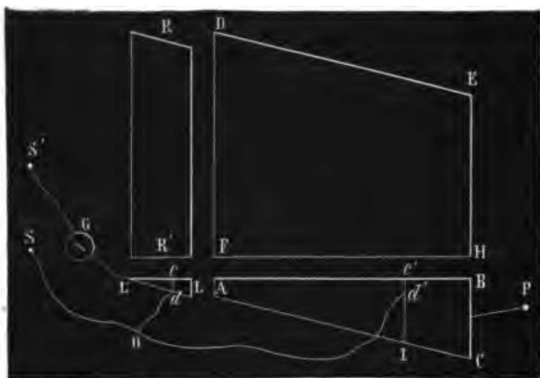


Fig. 805.

pôle soit au sol, et une plaque conductrice de forme trapézoïdale DEFG en communication permanente avec le sol et ayant son côté FH parallèle au côté AB de la lame ABC. Si un fil *d'*OS est en contact avec le sol en S, et si l'on promène l'extrémité *d'* de ce fil sur ABC, il y prendra de l'électricité. Si *d'* se meut uniformément et parallèlement à BC, et toujours dans le même sens, la durée du contact sera proportionnelle à la distance qui sépare le point où se rencontraient les lignes BA et CA de la droite que *d'* décrit sur ABC.

Quand *d'*, dans son mouvement progressif, aura franchi l'espace isolant ABFG et se sera mis en contact avec le trapèze conducteur DH, il se déchargera complétement dans le sol.

Soit maintenant une languette conductrice triangulaire LL', ayant un de ses côtés en prolongement de BA et se trouvant d'ailleurs en communication permanente avec un galvanomètre G, dont le fil communique d'autre part au sol : supposons que le fil de dérivation *d*O se meuve parallèlement à *d'*, de manière qu'il commence à toucher la languette en *d*, pendant que *d'* est encore sur le conducteur ABC, et de manière aussi qu'il arrive sur bois en *c*, lorsque *d'* arrive de son côté en *c'* au bord de l'espace isolant ABHF.

Le fil O*d* aura, pendant qu'il traverse le trajet *dc* sur la languette oblique, lancé dans le galvanomètre un courant dérivé proportionnel à la charge que le fil M a acquise en O, après que le contact de M avec la pile a duré un temps égal à celui pendant lequel l'extrémité *d'* a parcouru le trajet I*d'*.

Tout ceci compris, il suffit de supposer les lames conductrices ABC, DEFG, LL' et RR' enroulées sur un cylindre ayant son axe parallèle à AB et qui puisse recevoir un mouvement uniforme et rapide, pour se faire une idée générale de la disposition à l'aide de laquelle M. Guillemin est parvenu à aborder cette étude si difficile de la charge des fils télégraphiques, et à mettre en évidence la concordance des résultats de cette étude avec la théorie que nous avons exposée en ce chapitre.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DE L'ÉLÉVATION DE TEMPÉRATURE PRODUITE PAR LES COURANTS ÉLECTRIQUES DANS LES CONDUCTEURS QU'ILS TRAVERSENT.

§ 1. — PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX.

Lorsqu'on ouvre le circuit d'une pile un peu forte, on voit une étincelle jaillir au point de séparation entre les extrémités des deux portions du conducteur. Ce phénomène est le premier effet lumineux et calorifique qui ait été obtenu avec l'appareil voltaïque. Il fut,

pour la première fois, observé par Volta lui-même. Peu de temps après, en 1801, Thénard et Hachette constatèrent que la décharge d'une pile, en s'effectuant à travers un fil métallique fin, peut le rougir, le fondre et le volatiser. Les observations se multiplièrent rapidement sur ces curieux effets d'incandescence, et quelques mois après la publication des expériences de Thénard, Van Marum et Paff, en en répétant d'analogues, eurent occasion d'observer un très-beau phénomène; lorsque, avec un fil de fer relié à l'un des pôles d'une pile un peu forte, ils touchaient une capsule pleine de mercure en communication avec le second pôle, ils voyaient la combustion se faire avec tant de force « qu'elle dispersait de tous côtés des étincelles qui formaient des milliers de rayons apparents, représentant de très-beaux soleils de plusieurs pouces de diamètre. »

On se fait difficilement une idée de l'élévation de température que l'on peut obtenir dans les conducteurs qui réunissent les pôles d'une pile puissante. Avec celle de l'Institution royale de Londres, Davy, en 1808, volatisa le diamant et la plombagine. Depuis, à la Faculté des sciences de Paris, Despretz parvint, non-seulement à reproduire les mêmes effets et à réduire en vapeurs la magnésie et la chaux, mais même il put ramollir de fines aiguilles de carbone bien pur, c'est-à-dire à ramener à un état de fusion presque complète le plus réfractaire de tous les corps connus.

Les premières observations faites sur l'échauffement des fils métalliques traversés par les courants avaient montré que pour obtenir de brillants effets d'incandescence et de déflagration il était important d'employer des éléments à grandes surfaces. Toutes les expériences faites depuis sur le même sujet ont confirmé cette vérité.

Dans celles qu'il publia en 1816, Children employait des éléments de Vollaston dans lesquels chaque plaque de zinc avait deux mètres de long sur près d'un mètre de large; avec 21 éléments de cette espèce plongés dans un liquide formé de 50 parties d'eau, une d'acide sulfurique et une d'acide nitrique, il porta à l'incandescence un fil de platine qui avait $1^{m}80$ de long et 3 millimètres de diamètre. Outre ces effets, curieux à cause de leur intensité, Children observa que quand on fait passer le courant d'une pile à travers deux fils de même section, et de même longueur, mis bout à bout, il arrive souvent que l'un de ces fils seul est porté à l'incandescence, tandis que l'autre reste obscur; et, dans ce cas, le fil qui rougit est celui qui conduit moins facilement le courant électrique.

§ 2. — LOIS DE L'ÉCHAUFFEMENT DES FILS CONDUCTEURS TRAVERSÉS PAR LES COURANTS.

Recherches de M. Riess. — En 1837, M. Riess commença à faire connaître les résultats d'une série de recherches entreprises dans le but de déterminer les lois suivant lesquelles varie la quantité de chaleur développée par une décharge électrique dans un fil métallique, lorsqu'on fait varier la charge de la batterie, l'étendue de sa surface, les dimensions du fil parcouru par la décharge, et enfin la conductibilité totale du circuit à travers lequel l'électricité se propage.

Nous avons expliqué, tome Ier, pages 445 et 446, la manière dont on peut estimer la charge d'une batterie, et mesurer la quantité d'électricité qui produit une étincelle. Les méthodes décrites alors sont précisément celles que M. Riess a employées dans les recherches dont nous allons indiquer les résultats ; quant à son appareil calorimétrique, il consistait en un gros thermomètre à air dans lequel se trouvait enfermé le fil de platine soumis à l'échauffement. La chaleur développée dans le fil au moment de la décharge se communiquait presque instantanément à l'air intérieur, et, comme le maximum du déplacement de l'index ne durait qu'un instant, on devait admettre qu'au moment de ce maximum le fil et l'air du thermomètre étaient à même température. Une graduation antérieure de l'appareil faisait connaître la relation qui existait entre la marche de l'index et l'élévation de température du gaz intérieur; et par conséquent, de simples lectures thermométriques conduisaient à l'estimation des quantités de chaleur cherchées, dès que le poids du fil et sa capacité calorifique étaient connus.

L'ensemble des expériences de M. Riess l'a conduit à plusieurs propositions importantes. En particulier, il a constaté que la quantité de chaleur développée dans un fil par la décharge d'une batterie déterminée est proportionnelle au carré de la quantité d'électricité mise en jeu dans la décharge, et qu'en outre elle est proportionnelle à la résistance électrique du fil. Il n'y a rien à ajouter pour faire comprendre comment on a établi la première proposition. Pour établir la seconde, M. Riess plaçait les unes à la suite des autres dans le circuit plusieurs spirales de fils de platine de longueur et de sections différentes, et dans des expériences successives il introduisait tantôt l'une et tantôt l'autre de ces spirales dans l'appareil thermométrique. Le circuit total et la batterie restaient toujours les mêmes. On pouvait aussi ramener à l'iden-

tité les quantités d'électricité employées dans chaque décharge, et, par suite, estimer l'influence que la résistance de chaque spirale exerçait sur le développement de chaleur dont elle était le siége.

Recherches de M. Joule et de M. Ed. Becquerel. — Quelque temps après la publication des premières recherches faites par M. Riess sur le développement de chaleur dans les fils métalliques traversés par les décharges des condensateurs, M. Joule entreprit une série d'études analogues sur l'action calorifique des courants voltaïques. Les fils dans lesquels se développait l'action calorifique du courant étaient roulés en hélice autour de tubes de verre et plongés dans de petits calorimètres à eau. La chaleur qu'ils abandonnaient à ces appareils pendant un temps déterminé était partiellement employée à en élever la température et partiellement perdue par leur refroidissement à l'extérieur. Ces deux portions pouvaient être données par l'observation, et par suite on pouvait évaluer la chaleur dégagée par le courant dans le fil du calorimètre pendant le temps de l'expérience.

Il résulte des expériences de M. Joule et de celles qui ont été faites depuis sur le même sujet par M. Edmond Becquerel, que la quantité de chaleur produite dans un fil métallique par un courant voltaïque est proportionnelle au carré de l'intensité de ce courant et à la résistance électrique du fil qui s'échauffe.

Ces lois sont toutes semblables à celles que M. Riess avait établies.

On en déduit aisément une série de conséquences importantes touchant l'élévation de température des fils traversés par les courants électriques. D'abord, la longueur d'un fil n'influe pas sur le degré d'échauffement que peut lui communiquer un courant d'intensité déterminée. En effet, si la section du fil est constante, la chaleur totale qui s'y trouve développée est proportionnelle à sa longueur, puisqu'elle l'est à sa résistance. D'autre part, le poids de ce fil est aussi proportionnel à sa longueur; ainsi le poids et la quantité de chaleur qui le doit échauffer varient dans le même rapport. L'élévation de température est donc constante.

L'échauffement est en raison inverse du carré de la section du fil. En effet, si la section devient n fois plus grande, il en est de même du poids; mais en ces circonstances la résistance du fil, et par suite la chaleur produite sont n fois plus petites. Ainsi, une quantité de chaleur n fois moindre se porte sur un poids n fois plus grand. L'élévation de température qui en résulte est donc n^2 fois moindre que si la section n'avait pas varié.

Que l'on transmette un même courant à travers plusieurs fils de même section, de même longueur, et ayant sensiblement même pouvoir émissif, si la conductibilité, le poids spécifique et

la chaleur spécifique de ces fils sont respectivement c, ρ, γ pour l'un, c', ρ', γ' pour l'autre, etc., les quantités de chaleur qui y seront développées seront entre elles comme $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{c'}$, $\frac{1}{c''}$, et les élévations de température correspondantes comme $\frac{1}{c.\rho.\gamma.}$, $\frac{1}{c'\rho'\gamma'}$ ...

Elles seraient donc sensiblement en raison inverse des quantités c, c', c'', ..., si, pour les métaux étudiés, les produits $\rho\gamma$, $\rho'\gamma'$, ..., étaient à peu près égaux.

Enfin, tout ce qui facilite la déperdition de chaleur à l'extérieur diminue l'élévation de température que le fil tend à prendre sous l'action du courant qui le traverse. Ainsi un fil qui sous l'action d'un courant devient incandescent dans l'air peut cesser de l'être dans l'hydrogène, à cause de la grandeur du pouvoir refroidissant de ce gaz.

Nous terminerons cette étude de la chaleur développée par les courants, en décrivant un phénomène très-curieux découvert par Peltier, mais dont jusqu'ici l'explication n'a pas été donnée.

Recherches de M. Peltier. — Quand deux fils métalliques sont soudés par une de leurs extrémités et font partie d'un circuit, si un courant traverse la soudure en suivant une direction opposée à celle du courant thermo-électrique qui proviendrait

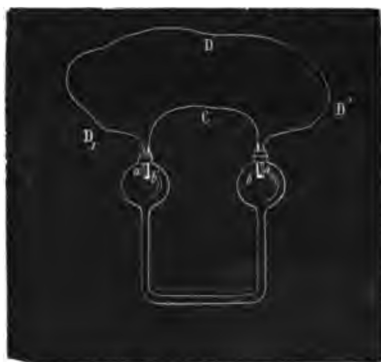


Fig. 806.

de l'échauffement de cette soudure, alors, par le seul fait de la transmission du courant extérieur, la température de la soudure s'élèvera toujours au-dessus de celle des points voisins.

Elle s'élèverait moins, et pourrait même s'abaisser au-dessous

du milieu ambiant si le courant extérieur avait eu une direction identique à celle de courant qu'aurait produit un échauffement donné à la soudure. Pour mettre ce fait en évidence, Pelletier introduisait deux couples bismuth-antimoine *ab*, *b'a'* (fig. 806) dans les deux boules d'un thermomètre différentiel, et il joignait les deux éléments antimoine par un fil de cuivre D_1DD', les autres par un second fil *c*; en faisant circuler un courant dans le circuit, il échauffait l'une des soudures, celle que le courant traversait en passant de l'antimoine au bismuth, et refroidissait l'autre. Ces différences de températures déterminaient dans l'index du thermomètre une déviation qui changeait de sens en même temps que le courant.

CHAPITRE IX.

ACTION DES COURANTS SUR LES COURANTS. RECHERCHES D'AMPÈRE.

§ 1. — PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX.

Dispositions générales des appareils. — Quelques mois après la publication de la découverte d'Œrsted, Ampère reconnut que deux portions d'un circuit traversé par un courant électrique peuvent agir l'une sur l'autre quand elles sont suffisamment rapprochées. Si ces portions sont parallèles, si l'électricité les traverse dans le même sens, elles s'attirent; elles se repoussent si l'électricité les traverse en sens opposés. Ampère trouva aussi, dès ses premières observations sur ce sujet, que des actions attractives ou répulsives s'exercent entre des portions de conducteurs rectilignes qui ne sont plus parallèles, mais qui sont mobiles ou dans le même plan, ou dans des plans parallèles, et il formula d'une manière simple le sens de ces actions. Soient AB et CD deux conducteurs disposés comme nous venons de le dire (*fig.* 807), et EF leur perpendiculaire commune. Il y a attraction entre les portions de conducteurs dans lesquelles l'électricité va dans le même sens par rapport à la perpendicu-

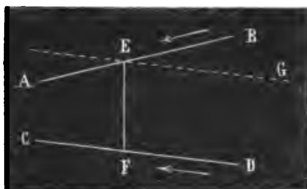


Fig. 807.

laire commune, c'est-à-dire s'en rapprochant ou s'en éloignant. Il y a répulsion entre les portions de conducteurs dans lesquelles l'électricité marche en sens inverse par rapport à cette perpendiculaire. Ainsi il y a attraction entre FD et EB, répulsion entre CF et EB, de telle sorte que si AB est mobile, il se tournera de manière à devenir parallèle à CD et de manière aussi à ce que l'électricité, dans les deux conducteurs, marche dans le même sens.

L'expérience mit encore en évidence deux autres faits fondamentaux : le premier est que les parties consécutives d'un même courant se repoussent; le second consiste en ce que, dans son action sur un conducteur de forme quelconque, un courant rectiligne est équivalent à un conducteur sinueux terminé aux mêmes points, traversé par l'électricité dans le même sens que lui, et s'en écartant du reste très-peu dans tout son parcours.

Description des appareils. — Pour établir expérimentalement ces quatre lois fondamentales, il fallait imaginer des dispositions d'appareils qui permissent de rendre facilement mobiles dans un sens convenable des portions de conducteurs plus ou moins étendues, et de les faire agir sur d'autres conducteurs fixes. Celles qu'Ampère a adoptées pour satisfaire à ces conditions ont reçu quelques modifications de détail qui en rendent la manœuvre plus commode, sans du reste changer ce qu'elles ont d'essentiel.

Quand on veut établir l'action des courants parallèles on fait en sorte, tantôt que le conducteur mobile soit horizontal et se meuve autour d'un axe horizontal, tantôt qu'il soit vertical et mobile autour d'un axe vertical.

Dans le premier cas, le conducteur est un fil de cuivre *acdb*

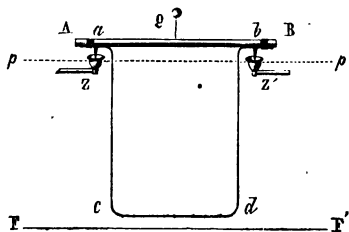


Fig. 808.

(fig. 808) fixé en *a* et *b* à une tige de bois légère AB, et formant avec elle un rectangle dont cette tige est le quatrième côté.

A ses deux extrémités *a* et *b* le fil est soudé à deux pointes d'acier *p* et *p'* dirigées dans son plan, et parallèlement aux côtés *ac* et *db*. Lorsqu'on veut faire une expérience, on fait plonger ces pointes dans deux petites coupes de cuivre Z et Z' à fond de verre, communiquant métalliquement avec les deux pôles d'une pile, et dans chacune desquelles il y a du mercure destiné à établir les contacts. Tout le système est équilibré par une boule de cuivre Q et peut tourner très-aisément autour de l'axe *pp'*. Les choses ainsi disposées, et le courant passant de *c* en *d*, on approche un conducteur FF' traversé par un courant de même sens, on voit se manifester entre les deux conducteurs une attraction évidente. — On obtiendrait une répulsion si les deux courants voisins étaient de sens opposés.

Quand le conducteur mobile doit tourner autour d'un axe vertical, si l'on désire que rien ne l'empêche de faire une révolution complète, il est bon d'employer la disposition représentée fig. 809. Le fil commence au godet *a* qui lui est soudé, il se recourbe en *b* et puis en *c* et descend verticalement jusqu'en *d*, remonte en *fg*, redescend en *hi* et remonte enfin jusqu'à la pointe *o* par laquelle il vient s'appuyer sur le fond du godet

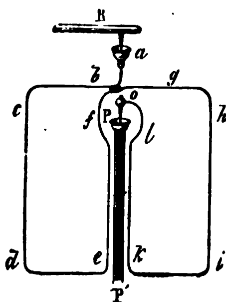


Fig. 809.

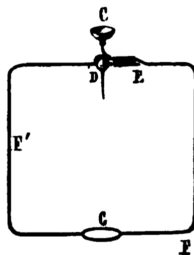


Fig. 810.

qui termine à la partie supérieure la colonne conductrice PP'. Le courant arrive alors par le conducteur R et redescend par PP' ou réciproquement. Au premier abord il semblerait qu'on pourrait donner à ce conducteur une forme un peu plus simple, telle que celle de la figure 810. Nous verrons bientôt quel est l'avantage de la complication apparente du conducteur (fig. 809).

La figure 811 montre sur une échelle un peu agrandie la dis-

position des parties les plus essentielles des équipages qui doivent accomplir librement une rotation complète autour d'un axe vertical. Si l'on ne tenait pas à ce que cette condition fût satisfaite, on pourrait rapprocher complétement les deux portions *ef*, *kl*, du conducteur *de* (figure 809), et donner à l'appareil la forme de la figure 812, laquelle avait été primitivement adoptée par Ampère. — Les godets sont alors attachés chacun à une colonne conductrice fixe; seulement il est évident que les supports S et S' empêchent une révolution complète de l'appareil; mais cela ici est peu important.

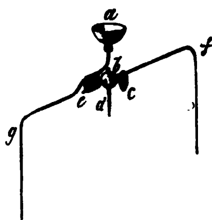


Fig. 811.

Il en est de même du cas où l'on veut mettre en évidence l'action de deux courants angulaires. Le conducteur mobile se place alors dans les godets soutenus comme on le voit figure 812, il a

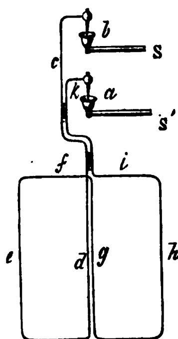


Fig. 812.

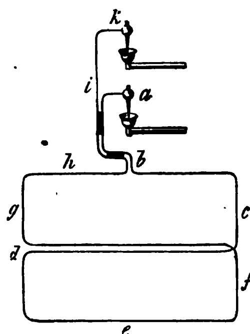


Fig. 813.

la forme représentée figure 813. Dans toutes les parties où ils risqueraient de se toucher, les fils sont séparés l'un de l'autre par une petite lame de bois couverte de gomme laque, et qui leur sert de support commun en même temps qu'elle les écarte l'un de l'autre de toute son épaisseur.

Pour accroître la puissance des portions du circuit qui doivent rester fixes, on a souvent recours à un artifice analogue à celui qui est employé dans les rhéomètres multiplicateurs; on enroule plusieurs fois un fil ou une lame de cuivre sur un cadre rectan-

gulaire de grandes dimensions. Chacun des côtés de ce rectangle porte alors un faisceau de conducteurs dont les actions concourent pour produire l'effet que l'on veut réaliser.

L'appareil que l'on emploie pour prouver que les parties consécutives d'un même courant se repoussent, se compose : premièrement, d'un vase plat, une assiette, que l'on divise en deux parties égales par une cloison de verre fixée à la gomme laque; deuxièmement, d'un conducteur très-léger formé d'un fil de cuivre recourbé comme on le voit figure 814. Ce fil est vernissé

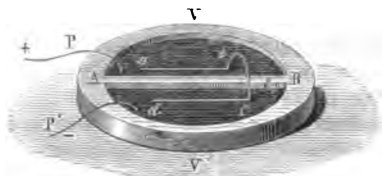


Fig. 814.

sur toute son étendue à l'exception des parties voisines des extrémités *a* et *d*, lesquelles sont bien décapées. On verse du mercure dans l'assiette en *le filtrant à travers de la flanelle au moment* de faire l'expérience. On plonge les rhéophores en P et P' et l'on voit aussitôt le conducteur les fuir.

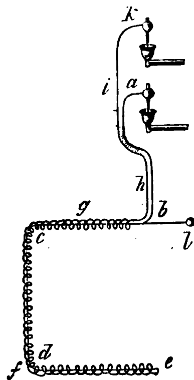


Fig. 815.

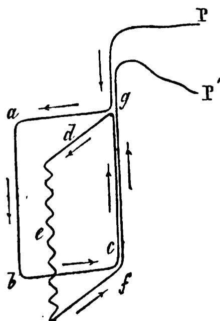


Fig. 816.

Enfin, pour établir l'équivalence d'un circuit rectiligne et

d'un circuit sinueux qui, terminé aux mêmes points que le circuit rectiligne, s'en écarte très-peu dans tout son parcours, on prend un conducteur formé d'un fil recouvert de soie qui d'abord se recourbe deux fois à angle droit en *b, c, d, e* (fig. 815), tout en restant rectiligne, et puis revient sur lui-même en faisant un grand nombre de sinuosités. Un pareil conducteur n'éprouve aucune action de tous ceux qu'on peut mettre dans son voisinage.

On fait encore l'expérience de la maniere suivante :

Concevons deux conducteurs, l'un rectiligne *ab*, l'autre *cd* (fig. 816), présentant une série de sinuosités peu profondes et tel du reste qu'il soit, en direction générale, parallèle à *ab*, et qu'enfin la distance verticale des côtés *f* et *d* soit égale à *ab*. Si l'on place entre eux un conducteur vertical mobile tel que TT' (fig. 820), lorsque les courants seront dirigés de telle sorte qu'il soit repoussé par chacun des deux conducteurs fixes *ab* et *e* (fig. 816), on le verra se fixer en équilibre juste à même distance de ces derniers.

§ 2. — ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE QUI EXPRIME L'ACTION RÉCIPROQUE DE DEUX ÉLÉMENTS DE COURANTS.

Après avoir ainsi établi le fait fondamental de l'action réciproque des courants et étudié quelques-uns des cas qui peuvent servir à en définir les lois élémentaires, Ampère chercha à résumer ces lois dans une formule différentielle donnant la grandeur et le sens de l'action réciproque de deux éléments de courants.

Soient ds et ds' les longueurs de deux éléments infiniment petits de conducteurs, i et i' les intensités des courants qui les traversent. Si ces deux éléments sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui joint leurs centres, on peut regarder comme évident que leur action aura une valeur proportionnelle aux produits ii' et $dsds'$ de leurs intensités et de leurs longueurs, et pourra se représenter par $\mu ii'dsds'$, μ étant un coefficient fonction de la distance. Ampère a admis que ce coefficient est en raison inverse d'une certaine puissance de leur distance, de sorte que finalement l'action des deux éléments s'exprime par :

$$\frac{\mu' ii' ds ds'}{r^n}.$$

Si les deux éléments, au lieu d'être perpendiculaires à la ligne qui joint leurs milieux, étaient parallèles à cette ligne, le coefficient par lequel il faudrait multiplier le produit $\frac{ii'dsds'}{r^n}$ pour avoir

l'expression de cette action, ne devrait pas être égal à μ'. Nous le désignerons par μ'_1. Ainsi dans ce second cas l'expression différentielle de l'action des deux éléments est :

$$\frac{\mu_1' ii' ds\, ds'}{r^n}.$$

Que deviendrait-elle si les deux éléments étaient orientés d'une façon quelconque par rapport à la ligne qui les joint?

Pour faire le calcul dans ce cas général, Ampère s'appuie d'abord sur le troisième des faits cités page 789, et il en déduit qu'à chacun des éléments rectilignes *ab* et *a'b'* (fig. 817) il peut substituer des conducteurs polygonaux terminés aux mêmes points et qu'il choisit de la manière suivante : dans le plan *boo'*, passant par le premier élément *ab* et la ligne des centres *oo'*, Ampère construit le triangle rectangle dont l'hypoténuse est *ab* et dont les côtés sont respectivement perpendiculaires ou parallèles à *oo'*, et il remarque qu'un courant d'intensité *i*, parcourant le contour *acb* dans le sens marqué par les flèches, agit sur tout courant situé à une distance finie de *ab*, absolument comme l'élément de courant

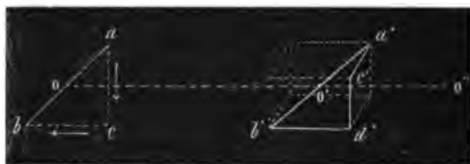


Fig. 817.

d'intensité *i*, dirigé suivant l'élément rectiligne *ab*. Ainsi qu'on appelle θ l'angle *aoo'* et l'on pourra dire que l'élément de courant *ab* peut se remplacer par deux autres $ds \cos \theta$ et $ds \sin \theta$, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à *oo'*.

Concevons de même un parallélipipède rectangle dont *a'b'* soit la diagonale et dont les côtés soient : l'un, *b'd'* parallèle à *oo'*, l'autre *c'd'* parallèle à *ac*, et le troisième *a'c'* perpendiculaire au plan *boo'*. L'élément de courant d'intensité *i'* et de longueur $a'b' = ds'$, sera équivalent à un courant d'intensité *i'*, qui suivrait le contour *a'c'd'b'* ; en d'autres termes, si l'on désigne par θ' l'angle *a'o'o''* que l'élément fait avec le prolongement de la ligne des centres, et par α celui des plans *aoo'* et *a'o'o''*, l'élément

proposé sera équivalent à trois autres d'intensité i' et ayant respectivement pour longueurs : $ds' \cos \theta'$, $ds' \sin \theta' \cos \alpha$, et $ds' \sin \theta' \sin \alpha$.

Pour calculer la résultante générale des deux éléments du premier groupe sur les trois éléments du second, Ampère s'appuie sur ce principe qu'un élément de courant, situé dans un plan, n'exerce pas d'action sur un autre élément perpendiculaire à ce plan et divisé par lui en deux parties égales ; et, en effet, soit *aob* (fig. 818)

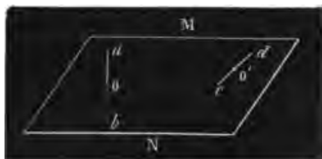


Fig. 818.

un élément perpendiculaire au plan M N, et supposons $oa = ob$, soit *cd* un autre élément situé dans le plan MN. D'après les lois de l'action des courants angulaires, on peut regarder comme évident que les actions de *cd* sur *ob* et sur *ao* sont de signes contraires. D'autre part, ces forces sont égales en grandeur absolue. L'angle que font entre elles les droites, suivant lesquelles elles sont dirigées, est infiniment petit : par suite leur résultante est infiniment petite par rapport à chacune d'elles ; elle doit donc être regardée comme nulle.

Si maintenant nous revenons au calcul complet des actions exercées par les éléments $ds \sin \theta$, et $ds \cos \theta$ sur $ds' \sin \theta' \cos \alpha$, $ds' \sin \theta' \cos \alpha$ et $ds' \cos \theta'$, il sera facile de voir que, d'après le principe que nous venons d'établir il n'y a de réellement efficaces que l'action de $ds \cos \theta$ sur $ds' \cos \theta'$ et celle de $ds \sin \theta$ sur $ds' \sin \theta' \cos \alpha$. La première est celle d'éléments situés sur le prolongement l'un de l'autre ; d'après nos discussions antérieures elle aura pour expression :

$$\frac{\mu_1' ii' ds\, ds' \cos \theta \cos \theta'}{r^n}.$$

La seconde est celle d'éléments parallèles entre eux ; elle est donc :

$$\frac{\mu' ii' ds\, ds' \sin \theta \sin \theta' \cos \alpha}{r^n}$$

La somme de ces deux quantités représente l'action résultante de ds sur ds' ; elle est :

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^n}\left(\mu' \sin\theta \sin\theta' \cos\alpha + \mu_1' \cos\theta \cos\theta'\right).$$

ou, si nous désignons par K le rapport de $\mu_1' \mu'$,

$$(1) \qquad \frac{\mu' ii' ds ds'}{r^n}\left(\sin\theta \sin\theta' \cos\alpha + K \cos\theta \cos\theta'\right),$$

Transformation de la formule générale. — D'après la manière dont θ et θ' sont comptés, on simplifie cette formule en y introduisant l'angle ε des deux éléments au lieu de α; car en considérant le triangle sphérique dont les côtés seraient θ, θ' et ε, on a :

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\alpha,$$

d'où,

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\alpha = \cos\varepsilon - \cos\theta \cos\theta';$$

substituant dans la formule précédente et faisant $K - 1 = h$, elle devient :

$$\frac{\mu' ii' ds ds'}{r^n}\left(\cos\varepsilon + h \cos\theta \cos\theta'\right).$$

Détermination des constantes. — D'après la formule (1), lorsqu'on a à la fois $\alpha = 0$, $\theta = \theta' = 90$, l'action est attractive, donc μ' est positif; au contraire, α étant toujours nul si $\theta = \theta' = 0$, l'action est répulsive, donc K est négatif; mais jusqu'ici rien ne semble en déterminer la valeur, pas plus du reste que celle de n.

Pour combler ces deux lacunes, Ampère emprunta à l'expérience de nouvelles données. Il réalisa des circonstances dans lesquelles un conducteur mobile restait en équilibre sous l'action d'un conducteur fixe, et en analysant les conditions de ces équilibres, il reconnut qu'ils seraient impossibles si la constante n avait une valeur autre que 2, et la constante K une valeur absolue différente de $\frac{1}{2}$. Voici le détail de ces nouvelles recherches :

« On peut s'assurer qu'un circuit fermé, de forme quelconque, ne saurait mettre en mouvement une portion quelconque d'un fil conducteur formant un arc de cercle, dont le centre est dans un axe fixe, autour duquel il peut tourner librement et qui est perpendiculaire au plan du cercle dont cet arc fait partie. Pour le constater, on fixe un arc de cercle de métal conducteur *ab* (fig. 819) à une tige CBP, attachée elle-même à un axe vertical AA', et l'on s'arrange de manière à équilibrer l'arc *ab* par un contre-poids suffisant P. L'axe AA' est terminé à ses deux extrémités par des pivots qui sont supportés dans des chapes convenables et il est très-mobile. Au-dessous du conducteur *ab* on place deux petites coupes G et G' en communication avec les deux rhéophores d'une pile, et on les emplit de mercure. La surface convexe du métal s'élève au-dessus de leurs bords, et de part et d'autre elle vient toucher *ab*, et le courant va alors de G à G' en traversant l'arc mobile. Or, il est facile de constater que tout circuit fermé est incapable de faire mouvoir *ab* autour de l'axe AA' dès que celui-ci passe par le centre de *ab*. »

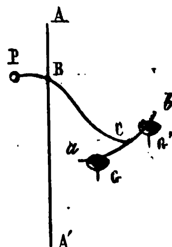


Fig. 819.

Pour voir quelle conséquence on peut déduire de ce fait, nous commencerons par transformer l'expression que nous avons donnée plus haut comme représentant l'action de deux éléments de courants.

Soient x, y, z les coordonnées du premier élément, x', y', z' celles du second, et r la longueur de la droite oo' qui les joint (fig. 817), il viendra :

$$\cos\theta = \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds};$$

$$\cos\theta' = \frac{x-x'}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz'}{ds'};$$

mais on a :

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

d'où, en prenant successivement les coefficients différentiels partiels par rapport à s et s',

$$r\frac{dr}{ds} = (x - x')\frac{dx}{ds} + (y - y')\frac{dy}{ds} + (z - z')\frac{dz}{ds};$$

$$r\frac{dr}{ds'} = -(x - x')\frac{dx'}{ds'} - (y - y')\frac{dy'}{ds'} - (z - z')\frac{dz'}{ds'};$$

ainsi :

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \qquad \cos\theta' = -\frac{dr'}{ds'}.$$

Pour avoir la valeur de *cos* ε nous observerons que :

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{ds'}, \quad \frac{dy'}{ds'}, \quad \frac{dz'}{ds'},$$

sont les cosinus des angles que ds et ds' font avec les trois axes, et nous en conclurons :

$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}.$$

et en différentiant par rapport à s' l'équation précédente qui donne $r\dfrac{dr}{ds}$ on trouve :

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = -\cos\varepsilon.$$

Si l'on substitue, dans la formule qui représente l'action mutuelle de deux éléments $ds\ ds'$, au lieu de *cos* θ, *cos* θ', *cos* ε, les valeurs que nous venons d'obtenir, et si l'on remplace $1 + h$ par son égal K, elle devient :

$$-\frac{\mu' ii' ds\,ds'}{r^n}\left(r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \mathrm{K}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right),$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$-\frac{\mu' ii' ds\,ds'}{r^n}\,\frac{1}{r^{\mathrm{K}-1}}\,\frac{d\left(r^{\mathrm{K}}\dfrac{dr}{ds}\right)}{ds'};$$

ou enfin :

$$-\mu' ii' ds\,ds' r^{1-n-\mathrm{K}}\,\frac{d\left(r^{\mathrm{K}}\dfrac{dr}{ds}\right)}{ds'}.$$

Examinons maintenant ce qui résulte du cas d'équilibre que nous analysons. En désignant par ds' l'élément mobile ab, l'action d'un élément ds du circuit fermé sur lui sera :

$$-\mu' ii' ds' r^{1-n-K} \frac{d\left(r^K \frac{dr}{ds'}\right)}{ds} ds;$$

ou, en remplaçant $\frac{dr}{ds'}$ par $-\cos\theta'$,

$$\mu' ii' ds' r^{1-n-K} \frac{d\left(r^K \cos\theta'\right)}{ds} ds;$$

a composante de cette action, suivant ds', s'obtiendra en multipliant cette action par $\cos\theta'$ et sera :

$$\mu' ii' ds' r^{1-n-K} \cos\theta' \frac{d\left(r^K \cos\theta'\right)}{ds} ds.$$

Cette différentielle intégrée dans toute l'étendue du circuit s donnera la composante tangente totale et devra être nulle, quelle que soit la forme de ce circuit. En l'intégrant par partie, après l'avoir écrite ainsi :

$$\mu' ii' ds' r^{1-n-2K} r^K \cos\theta' \frac{d\left(r^K \cos\theta'\right)}{ds} ds,$$

nous aurons :

$$\frac{1}{2} \mu' ii' ds' \left[r^{1-n} \cos^2\theta' - (1-n-2K)\int r^{-n} \cos^2\theta' dr\right].$$

le premier terme $r^{1-n}\cos^2\theta'$ s'évanouit aux limites. Quant à l'intégrale $\int r^{-n} \cos^2\theta' dr$, il est très-facile de concevoir un circuit fermé pour lequel elle ne se réduise pas à zéro, et comme néanmoins l'expression précédente doit être toujours nulle, quelle que soit la forme du circuit, il suit que l'on doit avoir :

$$1 - n - 2K = 0. »$$

Pour trouver une seconde relation entre les quantités n et K, on s'appuie sur le fait suivant :



Fig. 820.

Soient PQ et RS deux conducteurs rectilignes, attachés à l'axe MN à même distance a de cet axe parallèlement à sa direction et dans des plans différents; soit TT' (fig. 820) un conducteur fixe indéfini et dont la distance à l'axe MN soit aussi égale à a, soient l et l' les longueurs des droites PQ, RS. Si PQ et RS sont traversés par un même courant, dans le même sens, et si TT' l'est en sens opposé, le système PQ, RS s'arrêtera en équilibre stable dans une position telle que les plus courtes distances de PQ et de RS à TT' soient proportionnelles à l et l'.

Reportons-nous à la formule générale et voyons ce qu'elle indique touchant l'action exercée par le courant indéfini sur un élément ds' du conducteur PQ. Soit ρ la plus courte distance de PQ et TT'. L'action de ds' sur un élément ds du conducteur indéfini se réduit ici à :

$$-\frac{\mu' ii' ds ds'}{r^n}(\sin^2\theta + K\cos^2\theta),$$

puisque $\alpha = 0$ et $\theta' = \theta + 180$, d'autre part $r \sin\theta = \rho$, d'où

$$r^n = \left(\frac{\rho}{\sin\theta}\right)^n$$

Enfin si l'on appelle s la distance comptée sur TT' entre l'élément ds et le pied de la perpendiculaire abaissée de ds' sur TT' on a :

$$s = \rho \cot\theta; \qquad \text{d'où} \qquad ds = \rho d \cot\theta;$$

par suite l'action élémentaire de ds' sur ds devient

$$-\frac{\mu' ii' ds' \rho.}{\rho^n}(\sin^2\theta + K\cos^2\theta)\sin^n\theta \times d.\cot\theta.$$

Cette force est comprise dans le plan PQTT', sa composante, suivant une direction perpendiculaire à la fois à TT' et à PQ, est :

$$-\frac{\mu' ii' ds'}{\rho^{n-1}}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin^{n+1}\theta : d.\cot\theta.$$

Quant à sa composante parallèle à TT', elle ne peut avoir aucune influence sur le mouvement de rotation autour de MM'; ainsi la portion efficace de l'action répulsive exercée par ds' sur le courant indéfini TT' a pour mesure

$$\frac{ii'ds'}{\rho^{n-1}} A,$$

A étant une intégrale définie prise entre $\theta = 0$ et $\theta = 180$. Enfin l'action répulsive totale de l sur TT' s'obtiendra en multipliant $\frac{ii'ds'}{\rho^{n-1}}A$ par le rapport $\frac{l}{ds'}$, et par conséquent sera

$$\frac{ii'l}{\rho^{n-1}} A.$$

De même celle de l' serait

$$\frac{ii'l'}{\rho'^{n-1}} A.$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut que l'on ait

$$\frac{l}{\rho^{n-1}} = \frac{l'}{\rho'^{n-1}}.$$

Or, l'expérience prouve que dans le cas de l'équilibre

$$\frac{l}{\rho} = \frac{l'}{\rho'};$$

donc

$$n = 2.$$

Pour réaliser l'expérience dont nous venons d'exposer théoriquement les résultats, on s'arrange de façon que dans le cadre supérieur comme dans le cadre inférieur tout soit symétrique, par rapport à l'axe de rotation sur lequel sont directement fixées les parties ab, fe, im, pq (v. fig. 821).



Fig. 821.

Les actions que les parties horizontales du circuit reçoivent du conducteur indéfini se neutralisent réciproquement.

§ 3. — MOUVEMENTS DE ROTATION IMPRIMÉS PAR DES CIRCUITS FIXES A DES CONDUCTEURS MOBILES.

La formule d'Ampère permet de définir par le calcul la grandeur et la direction de la force ou des forces auxquelles se réduisent les actions réciproques de deux ou plusieurs systèmes de conducteurs traversés par des courants.

Toutefois il n'est pas toujours besoin d'avoir recours au calcul pour se rendre compte de la nature des mouvements que des conducteurs mobiles prennent sous l'action de conducteurs fixes voisins. Pour le montrer, nous considérerons spécialement le cas de quelques rotations facilement réalisables. Le conducteur qui sert à l'observation de ces rotations est formé d'un fil de cuivre *hgfed* (fig. 822), replié deux fois à angle droit en *g* et *e* et attaché en *d* et *h* aux deux extrémités d'un des diamètres d'une couronne légère formée d'un ruban de cuivre mince. Au point *f*, milieu de *ge*, est

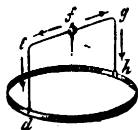


Fig. 822.



Fig. 823.

soudée une pointe d'acier parallèle aux côtés *gh* et *de*, et qui est destinée à soutenir le conducteur en équilibre sur le fond d'un godet *c* (fig. 823), qui termine une colonne conductrice *b*.

Cette colonne passe dans une ouverture *a* pratiquée au centre d'un vase de cuivre annulaire VV', dont le diamètre est un peu plus grand que celui du conducteur *dh*. Lorsque ce dernier repose par la pointe *f* sur le fond de la capsule *c*, si l'on verse de l'eau acidulée dans le vase, de manière que la couronne *hd* soit en partie plongée dans ce liquide, il suffira de mettre la colonne en communication avec le pôle positif d'une pile et le vase en communication avec le pôle négatif de cette même pile, pour que le courant marche dans le conducteur dans le sens indiqué par les flèches. Il y changerait de sens si l'on intervertissait les communications.

Le courant étant ainsi établi en *fgh* et en *fed*, si l'on entoure le vase VV' d'un anneau sur lequel s'enroule soit une lame de cuivre, soit un fil traversé par un courant, on voit l'équi-

page (fig. 822) prendre, autour de la pointe centrale, un mouvement de rotation continu dont le sens change avec celui du courant dans l'anneau ou dans le conducteur mobile. Dans tous les cas, le sens de la rotation est celui qui résulte des actions réciproques des portions les plus voisines du conducteur mobile et de l'anneau fixe qui l'entoure. Pour analyser ces actions, nous considérerons d'abord celle que peut exercer un courant circulaire horizontal sur un courant vertical, tout entier situé au-dessus du plan AOB (fig. 824) et assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe ZZ' vertical lui-même et passant par le centre O. Soit C le point où la direction du conducteur vertical perce le plan AOB, joignons OC et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre avec le courant circulaire en E. Si l'on prend sur ce dernier deux points i et i', symétriques par rapport à EO, leurs actions sur un élément quelconque α de DC seront l'une attractive et l'autre répulsive; ces actions seront égales; leur résultante, perpendiculaire au plan DCO, tendra à faire tourner DC autour de ZZ'. Elle changera de sens avec celui du courant soit dans l'un soit dans l'autre des deux conducteurs.

Enfin, en supposant les deux courants dirigés comme l'indiquent les flèches de la figure, cette résultante tendrait à faire mouvoir CD dans le même sens que le courant horizontal.

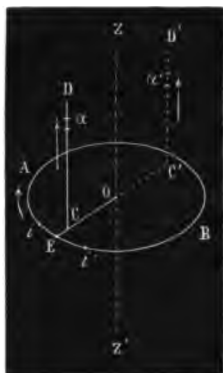


Fig. 824.



Fig. 825.

L'action du courant fixe sur la partie horizontale du conducteur mobile concorde avec celle qui s'exerce sur la partie verticale du même courant, soit en effet α (fig. 825) un élément de cette portion horizontale, soit OCE la trace horizontale du plan C'DO,

et toujours i' et i deux éléments du cercle fixe inférieur symétrique par rapport à la ligne EO. Les actions de i' et i sur α ont une résultante horizontale, perpendiculaire à DC', et qui pousse aussi ce conducteur dans le sens où marche le courant fixe.

La fig. 826 représente un appareil à l'aide duquel on rend

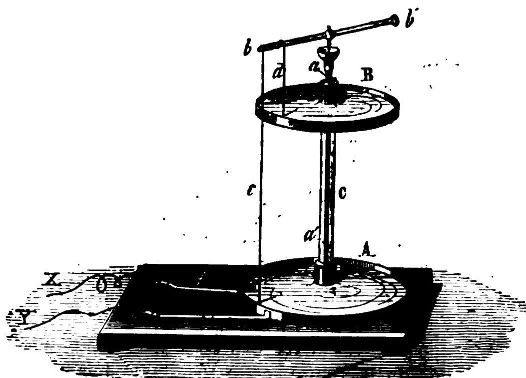


Fig. 826.

un courant vertical simple *bc* mobile autour d'un axe vertical *aa'*. Le courant arrive par Y, monte suivant *cb*, redescend par le fil *d* dans le vase B, duquel il sort par le godet *a*, qui est en

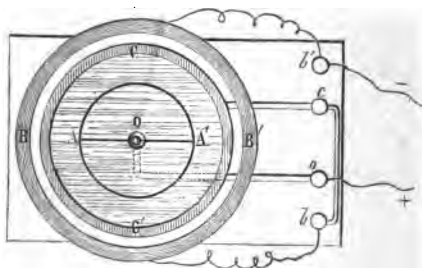


Fig. 827.

communication métallique avec B d'une part et d'autre part avec une colonne de métal, située dans l'axe du tube de verre C, et qui vient se relier en X au second pôle de la pile.

La figure 827 montre la disposition que l'on adopte quand on

veut faire passer un même courant par l'équipage mobile que nous venons de décrire et un conducteur BB' circulaire horizontal, ayant son centre sur l'axe vertical autour duquel la rotation doit s'effectuer. L'électricité arrive au godet O, traverse l'équipage mobile, et au lieu de retourner du godet *c* à la pile, elle passe dans un second godet *b*, où plonge une des extrémités du conducteur fixe BB'; l'autre extrémité de BB' plonge en *b'* et c'est de là que l'électricité se rend au pôle négatif.

§ 4. — ACTION DE LA TERRE SUR LES COURANTS.

L'étude des phénomènes électro-dynamiques que nous venons de décrire a conduit Ampère à une seconde découverte aussi grande, aussi inattendue que celle de l'action réciproque de deux éléments de courants : cette découverte est celle de l'action de la terre sur les courants.

La rotation du conducteur décrit à la page précédente change de sens en même temps que le courant transmis à travers la couronne; mais ces rotations inverses ne se font pas avec la même vitesse : quand l'électricité marche dans le conducteur de la circonférence au centre ; le mouvement est plus rapide quand l'extrémité du rayon *ab* va de l'est à l'ouest en passant par le sud. Il est plus lent dans le cas contraire. Enfin, même sans l'action d'aucun courant extérieur voisin, l'équipage *degh* se meut de lui-même lorsqu'il est assez mobile et que les courants ont un degré de force suffisante. Dans ce cas, il va de l'est à l'ouest en passant par le sud lorsque le courant marche de la circonférence au centre. La rotation serait de sens inverse si l'électricité dans le fil allait du centre à la circonférence.

Ampère a attribué à l'action de la terre les mouvements qui s'effectuent ainsi sans cause extérieure apparente, et, une fois placé à ce point de vue, il a reconnu que cette action par lui attribuée à la terre coïncidait, quant au sens des mouvements qu'elle produit, avec celle d'un courant équatorial dirigé de l'est à l'ouest. En effet, soit un courant horizontal indéfini dirigé de l'est à l'ouest tel que AB, fig. 828, et un courant horizontal CD mobile autour d'une de ses extrémités C dans le plan CAB, et dont la longueur soit moindre que la distance du point C au plan vertical passant par AB, soit O le point où le prolongement de CD vient rencontrer AB. Dans l'angle COB il y a attraction entre le courant fixe et le courant mobile, répulsion au contraire dans l'angle AOC, et par suite le courant CD se mouvra dans le sens DD'. L'action de AB sur CD est donc toute sem-

blable à celle que le courant circulaire de l'expérience précédemment analysée exerçait sur la partie horizontale du conducteur complexe de cette expérience, et il est facile de voir que les



Fig. 828.

choses se passeraient encore de la même manière si le plan horizontal que CD décrit était simplement parallèle à AB. Quant aux portions verticales de ce conducteur, les actions qu'elles éprouvent de la part du courant terrestre ne peuvent contribuer à son mouvement. La vérité de cet énoncé ressort des considérations suivantes :

Dans l'expérience à laquelle se rapporte la figure 824, les actions de i et i' sur l'élément α' symétrique de α par rapport à l'axe *or*, ont une résultante qui tend à donner à l'appareil une rotation de sens contraire à celle qui provient de leurs actions sur α, mais elle est plus petite qu'elle, et c'est cette dernière qui l'emporte. Mais, si le conducteur fixe était rectiligne, indéfini et situé à grande distance de ZZ', ces deux actions seraient égales et se balanceraient complétement; par suite, le courant équatorial admis par Ampère n'exerce sur les portions verticales de l'équipage *degh* (fig. 822) que des actions qui se neutralisent complétement.

Direction d'un conducteur circulaire ou rectangulaire. — L'action de la terre sur les courants se manifeste encore par des phénomènes de direction d'une netteté remarquable. Que l'on conçoive un cadre rectangulaire, ou un cercle mobile, autour d'un axe vertical passant par leur centre, ainsi qu'on le voit fig. 829. Si on les fait traverser par un courant, ils se dirigent de telle sorte que leur plan soit perpendiculaire à l'aiguille de déclinaison, et de telle sorte aussi que le courant soit ascendant dans celle de leurs branches qui est tournée vers l'ouest. Or, c'est précisément ce qui doit arriver si l'hypothèse d'Ampère est exacte. Considérons en effet d'abord le cas du cadre rectangulaire. Les parties horizontales ne reçoivent sous l'action du courant terrestre que des actions qui s'entre-détruisent et par suite elles sont comme si elles n'étaient pas. Quant aux por-

tions verticales, d'après des raisonnements semblables à ceux de la page 803, il est clair que l'une, celle où le courant est ascendant, tend sans cesse à être poussée le plus loin possible de

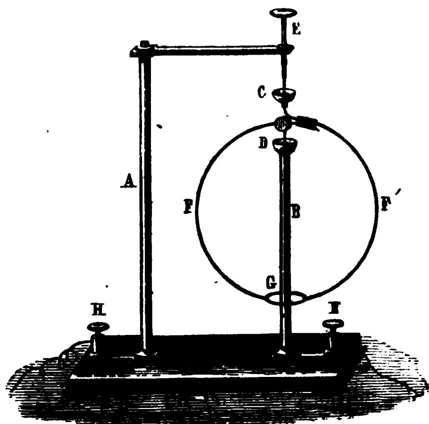


Fig. 829.

l'axe, et cela dans le sens où se meut le courant terrestre; c'est précisément l'inverse pour l'autre, en sorte que l'équilibre n'est stable que quand le cadre est dans la position que l'expérience nous a montrée comme celle dans laquelle il se fixe invariablement.

Quant au circuit circulaire, chacun de ses éléments peut se décomposer en deux autres, l'un vertical, l'autre horizontal, et comme les actions exercées sur les éléments horizontaux s'entre-détruisent, l'action finale résulte seulement de celles qui sollicitent les éléments verticaux, et ces dernières produisent un effet semblable à celui que nous venons d'analyser dans le cas du cadre rectangulaire.

Solénoïdes. — Si, au lieu d'étudier isolément la direction que prend dans l'espace un de ces circuits que nous venons de considérer, on en réunit deux par une sorte de traverse perpendiculaire à leurs plans et mobile horizontalement autour de son milieu, il est clair que, les courants circulaires se plaçant perpendiculairement à l'aiguille de déclinaison, la traverse se dirigera parallèlement à cette dernière.

La réalisation d'un pareil conducteur ne présente aucune difficulté; la figure 830 montre comment doit être plié le fil de cuivre

qui le forme. Les parties *fg* et *cd*, sont d'un même côté du plan *oao'*. Il est clair que toute action d'un courant extérieur quelconque sur

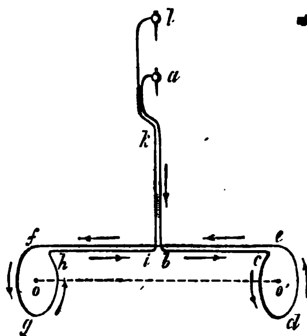


Fig. 830.

l'ensemble des portions *hc* et *ef* du conducteur total est nulle d'elle-même, en sorte que l'appareil est bien en réalité l'ensemble de deux cercles perpendiculaires à une tige commune mobile horizontalement, ce qui est notre hypothèse.

Au lieu de revenir en droite ligne de *e* et *f*, le fil conducteur pourrait accomplir ce trajet en se contournant en hélice régulière et sans point de rebroussement. Chaque tour de l'hélice équivaudrait alors à un courant circulaire semblable à *o* ou à *o'*, et perpendiculaire comme eux à la direction *ef*, et en plus à un élément de courant rectiligne dirigé suivant *ef* et qui serait la projection même de la spire sur cette direction (voir fig. 831). L'appareil se dirigerait alors comme le conducteur plus simple que nous avons considéré d'abord, seulement il le ferait avec plus d'énergie.

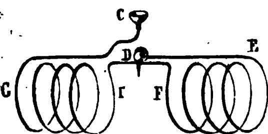


Fig. 831.

Si, au lieu d'être suspendue comme nous l'avons jusqu'ici supposé, cette hélice conductrice, ce cylindre électro-dynamique est mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité et perpendiculaire au méridien magnétique, on le voit se diriger comme l'aiguille d'inclinaison. En un mot, sous l'action de la terre, il se comporte comme un véritable aimant; il se comporte aussi comme un aimant sous l'action d'un courant élec-

trique. Il tend en effet à se mettre en croix sur ce courant et son pôle austral, celle de ses extrémités qui se dirige naturellement vers le nord passe à la gauche du courant. Sur un aimant, il agit comme le ferait un autre aimant; ainsi, celle de ses extrémités qui se dirige vers le nord, son pôle austral, repousse le pôle austral d'un aimant ordinaire et en attire le pôle boréal. Enfin, entre les extrémités de deux appareils de la nature de ceux que nous étudions se manifestent des attractions et des répulsions identiques à celles qui ont lieu entre les pôles des aimants.

Tel est l'enchaînement des faits et des idées qui de l'observation de l'action réciproque de deux conducteurs voisins a conduit Ampère à sa théorie sur le magnétisme terrestre et sur la constitution des aimants. Pour Ampère, les molécules des corps sont entourées de courants électriques; les procédés d'aimantation orientent ces courants et la force coercitive maintient cette orientation. D'après cette idée, abstraction faite des réactions mutuelles de ces courants élémentaires, un barreau aimanté pourrait être considéré comme un faisceau de cylindres électrodynamiques de largeur infiniment petite, parallèles entre eux, ayant tous leurs pôles de même nom à la même extrémité du barreau et le pôle contraire à l'autre. Seulement il est à croire que dans le voisinage des extrémités, l'orientation des courants élémentaires éprouve des perturbations causées par leurs actions réciproques, et Ampère admet que ces perturbations se traduisent par une sorte de flexion des filets électro-dynamiques élémentaires, flexion qui, à partir de l'axe du barreau, les ferait diverger ainsi que le représente la figure 832.



Fig. 832.

Il est facile, au reste, de voir qu'un pareil assemblage de solénoïdes doit se comporter sous l'action d'un courant extérieur comme le font les hélices de la page précédente Si, en effet, on conçoit une section perpendiculaire à l'axe du faisceau, elle coupera trois solénoïdes contigus suivant trois petits cercles tangents entre eux et dont les points de contact seront les sommets d'un triangle curviligne, suivant les trois côtés duquel chemineront trois courants élémentaires dont l'ensemble n'éprouvera aucune action d'un courant quelconque situé à une distance un peu notable. Un pareil courant n'aura donc d'action efficace que sur les portions des courants moléculaires qui sont au périmètre de la section, et par suite ne sont juxtaposés à aucun courant contraire.

CHAPITRE X.

ACTIONS DES COURANTS SUR LES AIMANTS.

§ 1. — ACTION EXERCÉE SUR LE POLE D'UN AIMANT, SOIT PAR UN COURANT RECTILIGNE INDÉFINI, SOIT PAR UN CIRCUIT FERMÉ.

Nous avons pu expliquer l'usage de la boussole des sinus et celui de la boussole des tangentes sans connaître la forme algébrique de la loi suivant laquelle s'exerce l'action du pôle d'un aimant sur un élément de courant, mais il devient indispensable de connaître cette loi lorsqu'on veut traiter complétement le problème de la déviation d'une aiguille aimantée par un courant, et en général se rendre un compte exact des mouvements que les aimants et les courants peuvent s'imprimer réciproquement.

Recherches de Biot et Savart.— La loi dont il s'agit s'est trouvée établie de deux manières différentes, par les travaux à peu près simultanés de Biot, Savart et de de Laplace d'une part, et d'Ampère d'autre part. Biot et Savart suivirent la marche expérimentale. Dans une première série de recherches, ils soumirent une aiguille aimantée mobile horizontalement à l'action d'un circuit fermé qui, dans le voisinage de l'aiguille, avait la forme d'un conducteur rectiligne vertical, long de plusieurs mètres, et ils cherchèrent comment variait l'intensité de l'action lorsqu'on faisait changer la distance de l'aiguille à cette partie rectiligne du courant. Les changements de distance s'obtenaient à l'aide d'un mécanisme qui pouvait faire avancer ou reculer la partie rectiligne du circuit sans lui faire perdre sa verticalité. L'aiguille était suspendue par un faisceau de fils de cocons, au milieu d'une cage de verre qui la préservait des agitations de l'air, et de plus elle était rendue astatique par l'action d'un barreau aimanté placé à distance convenable dans le méridien magnétique du point de suspension ; sous l'influence du courant, l'aiguille se plaçait perpendiculairement au plan qui contenait son centre de suspension et la partie verticale du circuit, et, quand on l'écartait de cette position, elle y revenait par une série d'oscillations isochrones. On comptait le nombre des oscillations qu'elle accomplissait suc-

cessivement dans le même temps à différentes distances du courant vertical, et les carrés de ces nombres donnaient la mesure des forces.

Lorsqu'il s'agissait de mettre l'aiguille en mouvement, on approchait de la cage qui la renfermait un petit barreau de fer doux que l'on rejetait ensuite au loin. Enfin, pour rendre l'exactitude des mesures indépendante des variations de l'intensité du courant, on prenait soin de croiser les expériences de manière qu'une observation faite à une distance quelconque D fût toujours intercalée entre deux autres faites à distance D', et l'on comparait l'intensité de l'action trouvée à la première de ces distances avec la moyenne de celles que l'on observait aux deux autres.

Calculs de de Laplace. — En opérant ainsi, Biot et Savart reconnurent que l'action exercée sur le pôle de l'aiguille était inversement proportionnelle à la plus courte distance de ce pôle au courant. Cette action était une résultante. Pour en déduire l'action d'une des parties du courant considérée isolément, il fallait chercher suivant quelle loi les éléments du fil conducteur doivent agir pour que l'effet produit par leur réunion soit en raison inverse de la simple distance. De Laplace a résolu le problème; il a trouvé que si toutes les parties d'un fil exercent sur le pôle d'un aimant des actions parallèles entre elles et inversement proportionnelles au carré de leurs distances à ce pôle, l'action totale sera en raison inverse de la simple distance du pôle au fil conducteur.

Biot généralisa ces résultats. Il plia en angle, comme on le voit fig. 833, le conducteur rectiligne dont il avait précédemment étudié l'action. Le sommet O de l'angle était dans le plan horizontal où se mouvait l'aiguille. Le plan BOC était vertical et les côtés BO et OC également inclinés sur l'horizontale passant par le centre de l'aiguille. En ces circonstances, Biot a reconnu que l'action totale du fil, toujours inversement proportionnelle à la distance du centre de l'aiguille au sommet de l'angle est, en outre, directement proportionnelle à la tangente de la moitié de l'angle compris entre l'une des parties du fil mobile et sa projection sur le plan horizontal dans lequel l'aiguille se meut; et de plus, il a montré que, pour que cette loi existât, il fallait que l'action de chaque élément du courant sur le pôle de l'aimant fût proportionnelle au sinus de l'angle que fait avec la direction de l'élément celle de la droite qui joint son milieu au centre de l'aiguille et par suite au pôle sur lequel l'action s'exerce, car la longueur de l'aiguille était négligeable dans ses expériences.

Conformité des résultats avec ceux que donne la théorie d'Ampère. — Ainsi la conclusion des travaux de Biot, Savart et de de Laplace était que l'action d'un élément de courant sur le pôle d'un aimant est en raison inverse du carré de la distance du pôle au milieu de l'élément et proportionnelle au sinus de l'angle que la direction du courant fait avec la droite qui joint le pôle à l'élément.

Cette loi est précisément celle qu'Ampère déduisait de sa théorie comme expression de l'action d'un élément de courant sur l'extrémité d'un solénoïde. Il est facile de voir qu'elle conduit aux résultats trouvés par Biot et Savart, pourvu toutefois qu'on admette le parallélisme de toutes les actions élémentaires dont l'effet mesuré est la résultante. Soit en effet BOC (fig. 833) le

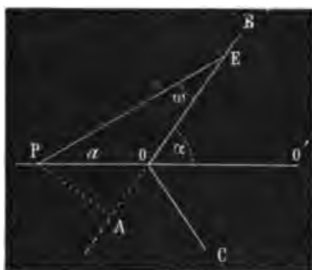


Fig. 833.

courant angulaire, et P le pôle de l'aiguille. — Nous supposons que P est dans le plan du courant, et cela est sensiblement vrai si l'aiguille est très-courte; soit a la distance PO; d'après les lois de de Laplace et de Biot, l'action F du pôle P sur l'élément E que nous appellerons ds, aura une expression de la forme $\frac{\mu \sin \omega \, ds}{r^2}$, μ étant une constante, ω l'angle PEO et r la distance PE. Soit abaissé PA perpendiculaire sur BO, on a

$$\text{OE} = s = \text{EA} - \text{OA};$$

OA est une quantité constante, donc $ds = d.\,(\text{EA})$. Or

$$\text{EA} = \text{PA} \cot.\omega = a \sin \alpha \cot.\omega,$$

et par suite

$$ds = d.\text{EA} = -a \sin \alpha \frac{d\omega}{\sin^2 \omega}.$$

D'autre part on a

$$r = a \frac{\sin \alpha}{\sin \omega},$$

d'où enfin

$$F = -\mu \frac{\sin \omega d\omega}{a \sin \alpha}.$$

Pour avoir l'action totale du courant sur le pôle, il faut intégrer cette expression depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = 0$ et doubler le résultat obtenu.

Le résultat final du calcul est

$$\frac{2\mu}{a} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\mu}{a} \, tg \, \frac{1}{2} \alpha,$$

Il confirme donc les lois trouvées par Biot, Savart et de Laplace.

Cas du circuit fermé. — Outre les résultats dont nous venons de faire connaître la vérification expérimentale, les calculs d'Ampère font voir encore que l'action du pôle d'un aimant sur un élément de courant est appliquée à ce dernier, perpendiculairement au plan qui contient le pôle et lui. A quoi il faut ajouter, que quand le circuit est complet, toutes ces actions élémentaires qui, isolément, ne passent point par le pôle de l'aimant, ont pour résultante une force appliquée à ce pôle.



Fig. 834.

Pour établir cette dernière conséquence, il suffit de calculer le moment de rotation de toutes ces forces par rapport à un axe passant par le pôle de l'aimant. On trouve que ce moment est identiquement nul dès que le circuit électrique est complet. Voici le calcul :

Soit MM' (fig. 834) un élément de courant, P le pôle d'un aimant. Joignons PM, PM', et posons POM $= \omega$, et PO $= r$; l'action du pôle sur l'élément a pour expression :

$$\frac{\mu \sin \omega ds}{r^2} = \frac{\mu \sin \omega \, r ds}{r^3}.$$

Or $r \sin \omega ds$ est le double de la surface du triangle MPM'; soit du cette surface. L'intensité de la force que nous considérons

pourra donc aussi se représenter par $\frac{2\mu\,du}{r^3}$; elle est dirigée suivant une droite OV perpendiculaire au plan PMM'. Soit PP' une droite quelconque passant par le point P, pour avoir le moment de rotation de OV, par rapport à l'axe PP', il faut projeter la force $\frac{2\mu du}{r^3}$ dirigée suivant OV sur une droite OK perpendiculaire au plan POP', et puis multiplier cette composante par la longueur de la perpendiculaire OR abaissée du point O sur PP'. Soit $VOK = \iota$, la composante dont il s'agit sera $\frac{2\mu du \cos \iota}{r^3}$ et de plus on aura $OR = r \sin OPR$; $du \cos \iota$, c'est la projection du triangle MPM' sur le plan POP'. Représentons par θ l'angle OPR, nous aurons $du \cos \iota = \frac{r^2 d\theta}{2}$, et par suite le moment

$$2\,\frac{\mu du \cos \iota}{r^3} \times r \sin \theta$$

sera égal à $\mu \sin \theta d\theta$.

Pour avoir la somme des moments de rotation autour de PP' des actions exercées sur P par une série d'éléments consécutifs formant un circuit fermé, il faudra prendre l'intégrale de cette quantité entre deux valeurs de θ identiques entre elles, ce qui conduira à un résultat identiquement nul, et comme cela a lieu quel que soit l'axe PP', l'action totale du circuit sur le pôle se réduit à une force qui passe par ce dernier.

Par conséquent aussi il en sera tout autrement *en général* de l'action que ce pôle exerce sur une *partie seulement* du circuit, et dès lors on conçoit que, sous l'action du pôle d'un aimant, une portion mobile d'un circuit puisse prendre un mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce pôle.

§ 3. — ROTATIONS IMPRIMÉES AUX COURANTS PAR LES AIMANTS ET AUX AIMANTS PAR LES COURANTS.

Expériences de Faraday. — M. Faraday a le premier réalisé une rotation de cette espèce. L'appareil qu'il employait consistait en un vase de zinc annulaire VV' (fig. 835) auquel on avait soudé deux montants de cuivre B et C qui se joignaient en A et y soutenaient une petite capsule destinée à recevoir du mercure. Un conducteur *abcde* était porté sur le fond de la capsule par une pointe d'acier; à sa partie inférieure il

soutenait une couronne de cuivre mince, qui flottait dans une couche d'eau acidulée au milieu du vase VV'. L'action de l'eau acidulée sur le zinc déterminait dans le conducteur un courant dont le sens est indiqué par les flèches de la figure. Ce courant établi, si l'on introduisait un aimant PP' dans la cavité centrale du vase annulaire VV', le conducteur prenait un mouvement de rotation autour de l'axe de l'aimant, et le sens de la rotation changeait quand on mettait le pôle P' à la place du pôle P.

On peut réaliser la même expérience à l'aide d'un courant produit par un appareil voltaïque ordinaire, et alors on constate que l'inversion du courant dans le conducteur change aussi le sens de la rotation.

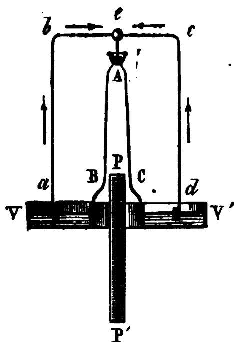


Fig. 835.

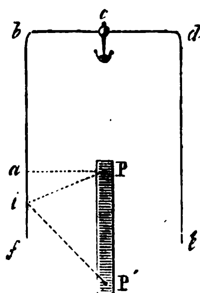


Fig. 836.

Tous ces phénomènes se produisent également bien lorsqu'à l'aimant PP' on substitue un solénoïde, ou pour parler plus exactement un de ces cylindres électro-dynamiques que l'on voit en toutes circonstances se comporter comme des aimants.

Le calcul du moment de rotation des forces qui font tourner la partie mobile *abcde* (fig. 836) du circuit autour de PP' se fait sans difficulté. Soit *i* un point quelconque du conducteur mobile; appelons α et β les angles que les lignes *i*P et *i*P' font avec la direction P'P de l'axe de l'aimant. Le moment de rotation des forces qui, émanées de P, tendent à faire tourner le conducteur mobile autour de PP', est $2.\int_0^\alpha \mu . \sin\theta \, d\theta$, et celui des forces qui, émanées de P', tendent à produire le même effet est $-2\int_0^\beta \mu \sin\theta \, d\theta$. La somme algébrique de ces moments, savoir:

— 2 (*cos* α — *cos* β) est la quantité cherchée ; α et β étant inégaux, cette quantité est évidemment différente de zéro.

Dans cette expérience, un aimant fait tourner autour de son axe une portion mobile d'un circuit voltaïque ; dans d'autres expériences dues à Ampère, on voit des aimants flottants dans le mercure prendre, sous l'influence de courants convenables, un mouvement de rotation autour de leur axe ou autour d'une droite parallèle à ce dernier. — Une inversion dans le sens du courant change celui de la rotation.

Dans tous les cas, les mouvements qui se produisent ont lieu dans des circonstances où la théorie précédente montre qu'ils ne pas sont impossibles ; et pour se rendre compte de la direction dans laquelle ils ont lieu, il suffit de substituer par la pensée, aux aimants, des cylindres électro-dynamiques ayant leurs pôles tournés comme ceux des aimants que l'on considère, et d'étudier l'action qu'exercent sur les extrémités de ces cylindres les courants voisins qui rayonnent à la surface du mercure.

Expériences d'Ampère. — Dans ses expériences, Ampère obtenait la mobilité des aimants en les faisant flotter dans le mercure. Ils avaient la forme de cylindres et étaient lestés à leur partie inférieure par un contre-poids de platine qui les maintenait dans une position verticale. Comme on le voit, figure 837,

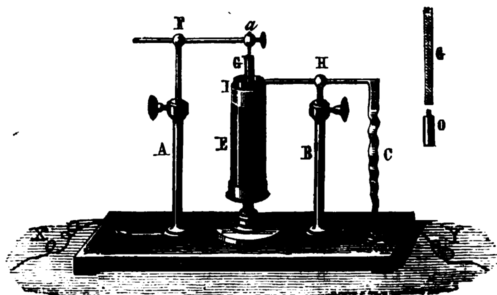


Fig. 837.

le vase E était en verre, mais à sa partie supérieure il était doublé à l'intérieur d'un anneau métallique I, communiquant par la tige H avec un des pôles d'une pile. Le second pôle communiquait avec la pointe *a*. Pour faire tourner l'aimant G autour de son axe, on abaissait la pointe de façon à la plonger dans une gouttelette de mercure qui remplissait une petite cavité placée à la partie supérieure de l'aimant ; le courant, une fois établi,

l'aimant prenait un mouvement de rotation qui changeait avec le sens du courant. Lorsque, sans modifier du reste en rien la disposition précédente, on faisait plonger la pointe dans le mercure du vase, l'aimant tournait autour du prolongement idéal de la pointe. Pour voir comment on peut se rendre compte du sens dans lequel ces rotations s'effectuent, il suffit de jeter les yeux sur la fig. 838. Soit AB et AC les courants qui rayonnent à la surface du mercure, et *f* et *f'* les flèches qui indiquent le sens des mouvements de l'électricité dans la spire supérieure du cylindre électro-dynamique que nous substituons à l'aimant; il est clair que AB repoussera la portion voisine *f* du courant du solénoïde; que AC attirera *f'* et que la résultante de ces actions sera une force *or* perpendiculaire à AO et qui tendra à faire tourner l'aimant dans le sens OK, et telle est en effet la nature des mouvements de l'aimant.

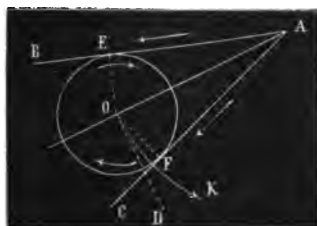


Fig. 838.

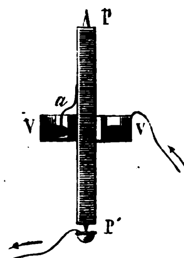


Fig. 839.

MM. Breton ont disposé un appareil qui permet de réaliser plus commodément les expériences précédentes. Par exemple, pour répéter la première, on laisse à l'aimant sa forme ordinaire, et seulement à ses deux extrémités on le maintient entre deux pointes P et P' (fig. 839) dirigées suivant son axe et faisant fonction de pivots qui lui laissent toute liberté de tourner sur lui-même; vers sa partie moyenne, on fixe à l'aimant une pointe métallique recourbée *a*, qui vient plonger dans le mercure du vase annulaire VV', le courant arrive dans ce vase, passe par la pointe *a*, redescend par l'axe de l'aimant et retourne par le pivot P' au second pôle de la pile.

Roue de Barlow. — Lorsqu'on courbe en fer à cheval une hélice conductrice dont l'axe était primitivement droit, les courants marchent évidemment dans le même sens dans les portions des spires qui vers les deux extrémités du fer à cheval se trou-

vent rapprochées par suite de l'incurvation de l'axe. Ces portions sont parallèles, et elles sont verticales si le plan des branches de l'hélice courbée est horizontal.

Ceci posé, concevons qu'entre ces dernières on place une petite capsule pleine de mercure en contact avec un des pôles d'une pile, et admettons que le second pôle soit en communication avec l'axe d'une roue métallique profondément dentée, mobile dans un plan vertical parallèle aux branches de l'hélice, et passant par le milieu de la petite capsule. Si la distance de l'axe de la roue à la capsule est telle que celle de ses dents qui est verticale vienne toucher le mercure, la roue prendra un mouvement de rotation due à l'action que le courant dirigé suivant celui de ses rayons qui touche le mercure exerce sur ceux de l'aimant.

§ 4. — THÉORIE DU RHÉOMÈTRE. — RECHERCHES DE M. ÉD. DESAINS.

La connaissance de l'expression complète de l'action d'un élément de courant sur le pôle d'un aimant permet de résoudre toutes les questions relatives à la théorie des appareils rhéométriques. Dans un travail publié en 1837, M. Éd. Desains traita les points fondamentaux de cette importante théorie : il fit voir que quand on a mesuré les déviations imprimées aux aiguilles de deux instruments différents, par des courants différents, même dans des lieux différents, on peut calculer les rapports des intensités de ces courants, pourvu que l'on connaisse celui des intensités du magnétisme terrestre dans ces localités, et les dimensions des instruments. Il vérifia expérimentalement ce résultat en faisant agir un courant horizontal très-long, situé dans le méridien magnétique, sur une petite aiguille horizontale; ensuite il calcula la relation qui existe dans un rhéomètre à une seule aiguille et à châssis rectangulaire entre la déviation de celle-ci et l'intensité du courant. Depuis, M. de La Provostaye a étendu cette théorie au cas du rhéomètre à deux aiguilles (*Annales*, t. LIV). Nous reproduirons dans ce paragraphe la première partie du travail de M. Éd. Desains.

Soit PAP' la position d'équilibre d'une aiguille mobile autour d'un axe vertical AO passant par son milieu, déviée d'un angle α sous l'influence d'un courant dont $amb = ds$ est un élément. L'action de cet élément sur le pôle P a pour mesure $\frac{\rho i \sin \omega r ds}{r^3}$, en appelant r la distance Pm et ω l'angle Pmb ; i et ρ sont deux

facteurs proportionnels l'un à l'intensité du courant, l'autre à celle du magnétisme de l'aiguille. Cette force passe en m, est perpendiculaire au plan Pab, et peut aussi s'écrire $\frac{2\rho idu}{r^3}$, en appelant du la surface Pab. Pour avoir son moment autour de l'axe vertical AO, on la décompose en trois composantes paral-

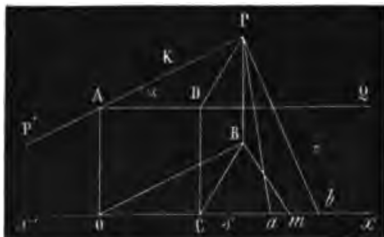


Fig. 840.

lèles l'une à AO, l'autre à AP, la troisième à une perpendiculaire aux deux premiers menée par A : cette troisième ligne n'est pas tracée sur la figure. On prend ces trois lignes pour axe des z, des x, des y. Le moment de la composante parallèle aux z sera nul ; il suffit de chercher les moments des deux autres par rapport à cet axe. La composante parallèle à AP s'obtient en multipliant $\frac{2\rho idu}{r^3}$ par le cosinus de l'angle que Pab fait avec le plan des zy. C'est donc $\frac{2\rho i}{r^3}du'$, du' étant la projection de du sur le plan des zy. Or, dans le cas général où amb n'est pas horizontal comme sur la figure, $2du' = ydz - zdy$, en appelant x, y, z, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, les coordonnées des points a et b, et supposant dx, dy, dz positifs simultanément. La composante est donc

$$\frac{\rho i}{r^3}(ydz - zdy),$$

et son moment

$$\frac{\rho iy}{r^3}(ydz - zdy).$$

De même la composante parallèle aux y sera $\frac{2\rho idu''}{r^3}$, en appelant

du'' la projection de du sur le plan des zx, laquelle est $\frac{(x-k)dz - zdx}{2}$, lorsque l'on fait AP = K. Son moment est

$$\frac{\rho i}{r^3}\, x[(x-k)dz - zdx].$$

La somme de ces moments, qui sont de même signe dans le cas actuel, est:

$$\frac{\rho i}{r^3}\,[x(x-k)dz - xzdx + y^2dz - zydy].$$

Pour avoir la somme des moments des actions exercées par les différents éléments du courant sur le pôle P, il suffira d'étendre l'intégrale de cette expression au circuit tout entier. Or, ce circuit est toujours fermé par la pile, et cette condition d'un circuit fermé permet, comme Ampère l'a montré, de simplifier l'intégrale. En effet, on a identiquement :

$$\int \frac{x(x-k)dz - xzdx + y^2dz - zydy}{r^3} - \int \frac{k(x-k)dz - kzdx}{r^3}$$
$$= \int \frac{(x-k)^2dz + y^2dz - (x-k)zdx - zydy}{r^3};$$

Mais $r^2 = (x-k)^2 + y^2 + z^2$, d'où $r^2 - z^2 = (x-k^2) + y^2$ et $rdr = (x-k)dx + ydy + zdz$; par suite la dernière intégrale peut s'écrire:

$$\int \frac{(r^2 - z^2)dz - z(rdr - zdz)}{r^3} = \int \frac{rdz - zdr}{r^2} = \int d.\frac{z}{r} = \frac{z}{r} + const.$$

Si z_1 et z_2, r_1 et r_2 sont les valeurs de z et r aux limites, on aura, en général, $\frac{z_2}{r_2} - \frac{z_1}{r_1}$ pour l'intégrale définie. Quand le circuit est fermé, l'origine se confond avec l'extrémité; alors $z_1 = z_2$, $r_1 = r_2$, et par suite l'intégrale précédente est nulle. Donc

$$\int \frac{x(x-k)dz - xzdx + y^2dz - zydy}{r^3} = \int \frac{k(x-k)dz - kzdx}{r^3},$$

et la somme des moments est

$$\rho i \int \frac{k(x-k)dz - kzdx}{r^3};$$

Il faudra chercher de même le moment total des actions du courant sur le second pôle, et égaler la somme de ces moments à celui de l'action terrestre, lequel peut être exprimé par $2j\rho k \sin \alpha$, j représentant l'action horizontale de la terre sur le pôle d'une aiguille pour laquelle ρ et k seraient chacun égaux à l'unité.

On a appliqué ce calcul au rhéomètre à châssis rectangulaire, en faisant $dz = o$ pour les parties horizontales et $dx = o$ pour les verticales. On l'a appliqué aussi au cas d'un courant rectiligne horizontal, très-long, situé dans le méridien magnétique et dont le milieu était la projection o du milieu de l'aiguille. Par raison de symétrie, le moment total des actions exercées sur l'un des pôles égalait le moment relatif à l'autre, en sorte que l'équation d'équilibre était :

$$2\rho i \int \frac{k(x-k)dz - kzdx}{r^3} = 2j\rho k \sin \alpha.$$

On voit que ρ disparaît, et qu'ainsi la déviation ne dépend pas de l'intensité du magnétisme de l'aiguille.

L'intégrale se compose de deux parties ; l'une, relative au courant horizontal, est $-\int \frac{kzdx}{r^3}$, à cause de $dz = o$; l'autre, relative aux portions qui ferment le circuit, peut être négligée, parce que, pour ces parties, r était partout très-grand. En effet, si l'on considère $\int \frac{k(x-k)dz}{r^3}$, on voit que cette somme, supposée positive, est plus petite d'abord que si l'on y supprimait tous les termes négatifs; ensuite, que si l'on y remplaçait la fraction $\frac{x-k}{r}$ par l'unité, et enfin que si l'on mettait, dans l'expression $\frac{k}{r}\frac{dz}{r}$, à la place de r, la plus petite R des valeurs de r, relative aux portions très-éloignées par lesquelles le circuit est formé. L'intégrale est donc plus petite que $\frac{K}{R^2}\int dz$, étendue seulement aux valeurs positives de dz. Si les valeurs extrêmes de z sont z' et z'', cette dernière est $\frac{K}{R} \times \frac{z''-z'}{R}$; $z''-z'$ est plus petit que R, puisque séparément z'' et z' sont plus petits que R. Donc cette expression peut être négligée

quand R est assez grand. On verrait qu'il en est de même de $\int \frac{kzdx}{r^3}$, pour ces très-grandes valeurs de r. Par conséquent, pour résoudre la question du courant horizontal très-long, il suffira d'intégrer $-\int \frac{kzdx}{r^3}$ dans toute l'étendue de la portion horizontale du circuit; z est alors la constante $AO = \delta$ de la figure 840. On pose $Om = s$; par suite :

$$s \cos \alpha = x,$$

$$r^2 = \overline{PB}^2 + \overline{Bm}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{om}^2 + \overline{OB}^2 - 2Om.OB \cos \alpha = \delta^2 + s^2 + k^2 - 2sk \cos \alpha$$

$$\int \frac{dx}{r^3} = \frac{ds \cos \alpha}{(\delta^2 + k^2 + s^2 - 2sk \cos \alpha)^{3/2}}$$

$k \cos \alpha$ étant constante, $d.k \cos \alpha = o$, et l'on peut écrire :

$$\int \frac{dx}{r^3} = \cos \alpha \int \frac{d(s - k \cos \alpha)}{[\delta^2 + k^2 \sin \alpha + (s - k \cos \alpha)^2]^{3/2}},$$

La valeur de l'intégrale indéfinie est :

$$\frac{1}{\delta^2 + k^2 \sin^2 \alpha} \frac{s - k \cos \alpha}{\sqrt{\delta^2 + k^2 \sin^2 \alpha + (s - k \cos \alpha)^2}} + const.$$

Si l'on y remplace successivement s par $+ s_1$ et $- s_1$, s_1 étant très-grand, et que l'on prenne la différence, en négligeant δ, $k \sin \alpha$ et $k \cos \alpha$ devant s, on a :

$$\frac{2}{\delta^2 + k^2 \sin^2 \alpha}.$$

par suite le moment total cherché devient :

$$\frac{2\rho i k \delta \cos \alpha}{\delta^2 + k^2 \sin^2 \alpha}.$$

Il faut le doubler pour tenir compte des actions sur le second pôle, et l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{4\rho i k \delta \cos \alpha}{\delta^2 + k^2 \sin^2 \alpha} = j \sin a \quad \text{ou} \quad \frac{i}{j} = \frac{\delta \tan \alpha}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha\right).$$

En opérant avec la même aiguille dans le même lieu, à la même distance, mais avec un courant d'intensité différente, on aura :

$$\frac{i_1}{j} = \frac{\delta \, tang\, \alpha_1}{2}\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha_1\right),$$

et partant :

$$\frac{i}{i_1} = \frac{tang\, \alpha}{tang\, \alpha_1} \frac{\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha\right)}{\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha_1\right)},$$

qui est la relation cherchée entre les intensités et les déviations.

Dans un lieu différent avec une aiguille et une distance diverses, on aura :

$$\frac{i'}{j'} = \frac{\delta' \, tang\, \alpha'}{2}\left(1 + \frac{k'^2}{\delta'^2} \sin^2 \alpha'\right),$$

et partant :

$$\frac{i}{i'} = \frac{j}{j'} \frac{\delta}{\delta} \frac{tang\, \alpha}{tang\, \alpha'} \frac{\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha\right)}{\left(1 + \frac{k'^2}{\delta'^2} \sin^2 \alpha'\right)}.$$

Or $\frac{j}{j'}$ est connu; c'est le rapport des carrés des nombres d'oscillations faites par une même aiguille dans le même temps, dans les deux localités ; tout le reste se mesure. On a donc $\frac{i}{i'}$, ce qui résout le problème de la comparaison de deux courants mesurés avec des instruments différents. Pour vérifier cette dernière conséquence, on a opéré dans un même lieu avec deux courants égaux, mais avec des aiguilles et des distances différentes, et par plusieurs expériences différentes l'on a trouvé

$$\frac{\delta}{\delta'} \frac{tang\, \alpha}{tang\, \alpha'} \frac{\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2} \sin^2 \alpha\right)}{\left(1 + \frac{k'^2}{\delta'^2} \sin^2 \alpha'\right)} = 1.$$

§ 5. — BOUSSOLES DE M. WEBER.

Magnétomètre. — Le calcul complet de la boussole des tangentes peut se faire en suivant une marche analogue à celle que

nous venons d'indiquer. Comme il ne laisse pas de présenter quelques longueurs, nous renvoyons sur ce sujet à des communications insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXV et XXXVI, par M. de La Provostaye et par M. Bravais. Ici, nous nous bornerons à une remarque qui s'applique spécialement au cas des rhéomètres dont le cadre est large, et dans lesquels les spires du fil conducteur ne sont pas séparées en deux faisceaux distincts par une fente à travers laquelle passe le fil de suspension.

Supposons, pour fixer les idées, la largeur du cadre indéfinie, et par conséquent aussi supposons indéfini le nombre de fils parallèles entre eux qui s'enroulent sur lui.

Quand l'aiguille *ab* (fig. 841) sera déviée d'un angle α de sa po-



Fig. 841.

sition d'équilibre, les actions exercées par le courant entier sur chaque pôle se réduiront à une force unique appliquée à ce pôle et perpendiculaire au plan *mn* de la spire qui le contient.

En effet, la chose est d'abord évidente pour la spire que nous venons de désigner ; prenons maintenant celles qui la touchent à droite et à gauche, et prenons sur ces deux spires deux éléments égaux et symétriques par rapport au plan *mn* de la première, la résultante de leurs actions sur le pôle considéré sera encore, par une raison de symétrie, perpendiculaire au plan *mn*, et ainsi de suite.

Si donc, le cadre est assez large pour que dans toutes les positions de l'aiguille les spires dont l'action peut se faire sentir à l'aiguille soient en nombre égal à droite et à gauche de *mn*, l'action du courant sur l'aiguille se réduira toujours à un couple de forces appliquées en *a* et *b*, constantes en grandeurs et perpendiculaires aux plans des spires ; alors, si la direction de

celles-ci est parallèle au méridien, l'appareil sera rigoureusement une boussole des tangentes.

Ces conditions sont sensiblement réalisées dans le magnétomètre de M. Weber. Le cadre est très-large et l'on se borne aux très-petites déviations, seulement on les observe avec une grande précision en employant les méthodes indiquées t. I, à l'occasion des expériences de Gauss sur le magnétisme.

Quant au mode de suspension de l'aiguille, il se rapproche beaucoup de celui qui est indiqué figure 842 à l'occasion de l'électrodynamomètre. Le fil de suspension soutient un cadre de cuivre dont la traverse inférieure passe dans le cylindre aplati sur lequel s'enroulent les fils. L'aiguille est soutenue sur la traverse inférieure de ce cadre, et contre un des côtés latéraux de celui-ci est fixé le miroir qui sert aux observations de la déviation.

Électrodynamomètre. — Un courant de très-courte durée, en traversant le fil d'une boussole, n'imprime à l'aiguille qu'une impulsion; l'équilibre se rétablit après quelques oscillations. Quelle que soit l'intensité du courant, quelle que soit la déviation fixe qu'il donnerait à l'aiguille s'il durait pendant un temps un peu considérable, l'impulsion serait infiniment petite si la durée du courant l'était elle-même; et, en général, l'effet produit total dépend de deux éléments différents : le temps et l'énergie de l'action. Pour établir l'équation qui exprime cette dépendance, supposons, comme cela arrive en effet, que l'aiguille soit primitivement en équilibre dans le plan du méridien magnétique, et admettons en outre que la durée θ du courant soit assez courte pour que pendant cette durée l'aiguille ne se soit pas écartée sensiblement du méridien; admettons enfin que l'angle d'impulsion ω soit assez petit pour qu'on puisse le confondre avec son sinus ou sa tangente. Si, comme nous le supposons, l'intensité du courant, sa position et celle de l'aiguille sont constantes pendant le temps θ, la vitesse v imprimée au pôle de cette dernière, suivant la tangente au cercle qu'il peut décrire, sera proportionnelle à θ et donnée par l'équation $v = g\theta$; g étant la valeur que posséderait v si l'on avait $\theta = 1$, g est proportionnelle à l'intensité du courant définie comme nous l'avons toujours fait (voir pages 730 et suiv.).

Par suite de cette communication initiale de vitesse, l'aiguille quitte sa position d'équilibre comme le ferait un pendule choqué dans une direction horizontale. Lorsqu'elle s'en est écartée d'un angle ω, elle est sollicitée à y revenir par l'action du magnétisme terrestre, laquelle est proportionnelle à ω. Soit l la demi-distance polaire de l'aiguille, et supposons que le milieu

de l'axe polaire soit au point même de suspension. La dérivée de la vitesse avec laquelle le pôle se meut sur sa trajectoire est $\frac{l d^2\omega}{dt^2}$, elle doit être égale, au signe près, à la force accélératrice $f\omega$, parce que cette dernière est opposée de direction à celle de la vitesse acquise; ainsi l'équation du mouvement est

$$-\frac{l . d^2\omega}{dt^2} = f\omega.$$

On en conclut que ω doit être donné par une relation de la forme

$$(1) \qquad \omega = A \sin t \sqrt{\frac{f}{l}} + B \cos t \sqrt{\frac{f}{l}},$$

A et B étant des constantes à déterminer. Or pour $t = 0$, ω doit être nul, d'où l'on conclut déjà que B est égal à zéro. De plus, au moment ou $\omega = o$, la vitesse doit être égale à $g\theta$ ou à v, puisque nous avons posé $g\theta = v$.

Or, en général cette vitesse a pour expression

$$A \sqrt{\frac{f}{l}} \cos t \sqrt{\frac{f}{l}};$$

donc pour $t = o$ elle se réduit à $A\sqrt{\frac{f}{l}}$, et l'on a

$$A \sqrt{\frac{f}{l}} = g\theta = v;$$

Et enfin en substituant dans la valeur générale de ω, on a

$$(2) \qquad \omega = v \sqrt{\frac{l}{f}} \sin t \sqrt{\frac{f}{l}}.$$

L'écart maximum α a lieu quand la vitesse $\frac{d\omega}{dt}$ devient nulle. L'équation qui le détermine est donc

$$\frac{d\omega}{dt} = v \cos t \sqrt{\frac{f}{l}} = o, \quad \text{d'où} \quad t \sqrt{\frac{f}{l}} = \frac{\pi}{2}.$$

Substituons cette valeur de t dans l'équation (2) et nous en déduirons pour valeur de α :

$$\alpha = v\sqrt{\frac{l}{f}}\,\sin\frac{\pi}{2} = v\sqrt{\frac{l}{f}} \quad \text{ou} \quad \alpha = g\theta\sqrt{\frac{l}{f}}.$$

Ainsi, quand on fait agir sur le même appareil des courants instantanés différents, les impulsions produites α et α' dépendent à la fois et des intensités g et g' de ces courants et de leurs durées θ et θ', tellement qu'elles pourraient être les mêmes, quoique les intensités fussent très-différentes, pourvu que la durée fût plus longue pour le courant le plus faible, et réciproquement.

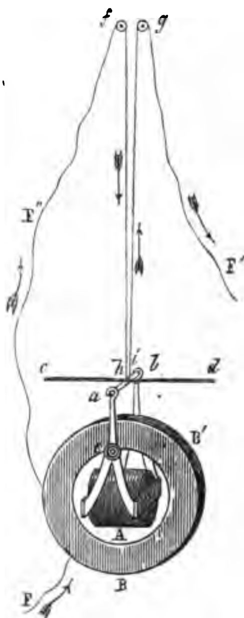


Fig. 842.

M. Weber a disposé un appareil qui permet de trouver une seconde relation entre les quotients $\frac{g}{g'}$ et $\frac{\theta}{\theta'}$, et par suite de les déterminer tous les deux.

Le nouvel appareil de M. Weber est représenté figure 842. Il se rapproche beaucoup dans la forme générale de celui que nous avons décrit plus haut, mais il en diffère en deux points essentiels : 1° l'aiguille aimantée est remplacée par un solénoïde A ou plutôt une bobine électro-dynamique qui se trouve traversée par le courant même qui circule dans les fils enroulés sur le cadre ; 2° cette bobine est suspendue à un fil de torsion ou plutôt à deux fils d'argent hf, ig voisins formant une suspension bifilaire, satisfaisant toujours à la condition que pour les petits angles la force qui tend à ramener l'appareil à sa position d'équilibre soit proportionnelle à l'écart.

Ici l'action qui s'exerce entre un élément de la bobine fixe et un élément de la bobine mobile est proportionnelle au carré i^2 de l'intensité du courant qui les traverse tous deux. Il en est donc de même de la vitesse initiale w imprimée à la bobine en un temps θ assez court pour que pendant sa durée i puisse être regardé comme invariable, ainsi que la position du solénoïde. Lorsque, avec cette vitesse initiale, le solénoïde quitte sa position première, ce n'est plus l'action de la terre qui tend à l'y ramener puisque le courant n'y circule plus ; c'est alors la torsion des fils de suspension qui agit comme force retardatrice du mouvement ; en ce cas l'équation se pose et se résout absolument comme dans le cas précédemment étudié, et l'angle maximum β est donné par la relation $\beta = g^2\theta k$. Le courant d'intensité g' et de durée θ' donnerait une impulsion β' liée aux valeurs correspondantes g' et θ' par la relation $\beta' = g'^2\theta' k$, et l'on aurait

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{g^2\theta}{g'^2\theta'}.$$

Ces deux courants, dans le premier appareil, donnaient des écarts α et α' satisfaisant à la relation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{g\theta}{g'\theta'},$$

On en déduit,

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\,\frac{g}{g'}$$

$\frac{g}{g'}$ étant ainsi connu, l'équation $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{g\theta}{g'\theta'}$ fait connaître $\frac{\theta}{\theta'}$.

§ 6. — AIMANTATION PAR LES COURANTS.

Très-peu de temps après la découverte d'Œrsted, Arago, en répétant ses expériences, reconnut que le courant développe fortement la vertu magnétique dans des lames de fer ou d'acier, qui d'abord en étaient totalement privées. Voici comment il rapporte cette grande découverte. (*Ann. de chimie*, t. XV.)

« Ayant adapté un fil cylindrique de cuivre assez fin à l'un des pôles de la pile, je remarquai qu'à l'instant où ce fil était en communication avec le pôle opposé il attirait le fer doux comme l'eût fait un véritable aimant. Aussitôt que le fil cessait d'être en communication avec les deux pôles de la pile à la fois, la limaille s'en détachait. Ces effets ne dépendaient pas d'une aimantation préalable de la limaille, puisque des fils de fer doux ou d'acier n'en attiraient aucune parcelle. On ne saurait davantage les expliquer par des actions électriques ordinaires, car la limaille de cuivre et la sciure de bois ne s'attachent en aucune sorte au fil conjonctif.

Le fil conjonctif ne communique au fer doux qu'une aimantation momentanée. Si on se sert de petites parcelles d'acier, on leur donne parfois une aimantation permanente. Je suis même parvenu à aimanter ainsi complétement une aiguille à coudre.

M. Ampère, à qui je montrai ces expériences, pensa à l'instant, d'après ses idées sur le magnétisme, que l'on obtiendrait une plus forte aimantation en substituant au fil conjonctif dont je m'étais servi une hélice au centre de laquelle l'aiguille serait placée, et, de plus, il espérait par là obtenir une position constante des pôles.

L'expérience vérifia complétement les idées précédentes. »

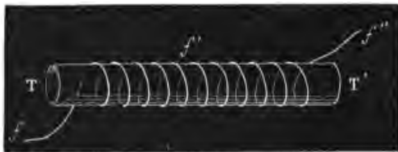


Fig. 854.

Lorsqu'on veut aimanter des aiguilles à l'aide de courants électriques, on prend un tube de verre d'un diamètre intérieur

peu considérable; sur ce tube, on enroule en hélice, à spires très-rapprochées, un fil de cuivre recouvert d'une substance isolante, en prenant soin de donner à l'hélice une longueur un peu plus grande que celle des aiguilles à aimanter (fig. 843).

L'hélice, ainsi construite, on en met les deux extrémités en contact avec les fils polaires d'une pile à intensité constante, puis on introduit l'aiguille dans son intérieur, de manière qu'elle y soit complétement plongée, et cela est possible dans les conditions spécifiées aux lignes précédentes. Un instant de séjour dans l'hélice donne en général à l'aiguille autant de magnétisme qu'elle en prendrait en y restant plus longtemps. Toutefois, quand l'aiguille est fortement trempée, on parvient quelquefois à accroître le magnétisme qu'elle reçoit d'une première introduction dans l'hélice, non pas en faisant durer le temps pendant lequel elle y demeure, mais en l'en retirant et l'y faisant rentrer plusieurs fois de suite.

Cette manière d'opérer est surtout nécessaire quand il s'agit d'aimanter de forts barreaux à l'aide d'hélices puissantes.

D'autres fois, on introduit l'aiguille dans l'hélice avant de faire passer le courant dans cette dernière. On établit les contacts, on les rompt presque aussitôt, et l'aiguille est aimantée.

Dans tous les cas, le pôle austral de l'aimant produit est toutoujours à la gauche des courants qui circulent autour de l'aiguille. Si cette dernière avait seulement une de ses extrémités plongée dans l'hélice, l'un de ses pôles serait toujours voisin de cette extrémité, mais l'autre pôle ne serait pas en général à l'autre bout de l'aiguille, il se trouverait en l'un de ses points intermédiaires; en d'autres termes, l'aiguille ne serait pas aimantée dans toute sa longueur.

Quand l'hélice présente des points de rebroussement, l'aiguille soumise à son action présente autant de points conséquents. Cette remarque curieuse est encore une de celles que l'on doit à Arago. Enfin, Arago reconnut aussi que des décharges d'électricité ordinaire transmises à travers des hélices dont les spires étaient bien isolées les unes des autres pouvaient communiquer le magnétisme à des aiguilles placées dans l'intérieur de ces hélices.

Dans un mémoire inséré au tome I des *Annales de chimie et physique,* série III, M. Abria a fait une étude étendue de l'aimantation par les courants, et l'un des résultats établis dans ce travail est que, si l'on établit entre les dimensions de l'hélice et celles de l'aiguille certaines relations que l'auteur assigne, l'intensité du magnétisme développée croît proportionnellement au carré de

l'intensité du courant qui le produit, et cela quelque courte que soit la durée du temps pendant lequel l'aiguille est soumise à l'action de ce courant.

Arago, comme nous l'avons dit aux pages précédentes, avait reconnu qu'un morceau de fer doux se transforme passagèrement en aimant sous l'influence d'un courant voisin. C'est en partant de ce fait que l'on construit ces puissants électro-aimants dont nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de parler.

Pour faire un électro-aimant droit, on prend un cylindre ou une barre de fer doux et un fil de cuivre recouvert d'une substance isolante, de soie par exemple. On enroule le fil en spires serrées autour du fer doux, en faisant progresser régulièrement l'hélice, d'abord de l'extrémité T vers l'extrémité T' (fig. 843), puis en revenant de B vers A, et ainsi de suite un certain nombre de fois, mais toujours en évitant les points de rebroussement dans l'hélice ainsi formée. Il est clair alors que, quand on mettra les deux bouts de l'hélice en contact avec les pôles d'une pile, la gauche du courant dans chaque spire sera toujours tournée vers une même extrémité de l'hélice, A par exemple, et la droite vers l'autre en ces conditions. Un pôle austral sera développé en A, et un pôle boréal en B.

Si le barreau de fer doux était contourné en fer à cheval, on enroulerait d'abord le fil autour d'une de ses branches, en se conformant aux précautions indiquées, puis on ferait passer le fil sur la deuxième branche, en prenant soin de l'y conduire et enrouler de telle sorte que le courant qu'il doit transmettre ait à sa droite l'extrémité de cette seconde branche, s'il avait celle de la première à sa gauche et réciproquement.

Il était très-important de savoir comment le moment magnétique d'un électro-aimant de longueur donnée varie avec le diamètre d du fer doux intérieur et avec l'intensité I du courant, le nombre des tours de l'hélice magnétisante, ainsi que le fil qui la forme restant toujours les mêmes. MM. Lenz et Jacobi, en étudiant la question, sont arrivés à ce résultat que le moment magnétique m est lié aux variables I et d par une relation de la forme $m = CI\sqrt{d}$, C étant une constante.

L'expérience a prouvé en outre, qu'entre certaines limites, lorsque l'aimant s'allonge, la constante C varie proportionnellement à la longueur de l'aimant, pourvu que le nombre des couches de fils superposées reste toujours le même dans toute l'étendue de cet aimant.

Des recherches postérieures, dues à M. Muller, ont établi que

la proportionnalité entre le moment magnétique de l'aimant et l'intensité du courant n'a lieu que si le diamètre d du fer doux n'est pas très-petit par rapport à la longueur de ce dernier, et l'ensemble des recherches du savant professeur de Fribourg ont établi que la relation entre l'intensité du courant, le moment magnétique de l'aimant et le diamètre du fer doux, est exprimée par une équation de la forme

$$tg \frac{m}{0,00005\, d^2} = \frac{I}{A d^2},$$

A est une constante qui change avec l'électro-aimant employé.

Lorsque d est assez grand pour que l'angle $\frac{m}{0,00005\, d^2}$ soit inférieur à une quinzaine de degrés, cette formule se confond sensiblement avec celle de MM. Lenz et Jacobi, mais elle s'en écarte pour les petites valeurs de d et aussi pour les très-grandes valeurs de I. Lorsque, en effet, l'intensité du courant devient très-considérable, la valeur de m tend, non pas vers l'infini, mais vers une valeur maximum donnée par l'équation

$$\frac{m}{0,00005\, d^2} = 90°$$

M. Muller s'est assuré par de nombreuses expériences de la réalité de cette conséquence importante.

CHAPITRE XI.

ÉTUDE DE L'ACTION INDUCTRICE QUE LES COURANTS OU LES AIMANTS PEUVENT EXERCER SUR DES CIRCUITS CONDUCTEURS.

§ 1. — INDUCTION PAR LES COURANTS OU PAR LES AIMANTS. — ACTION INDUCTRICE DE LA TERRE. — DÉCOUVERTES DE M. FARADAY.

Induction par les courants. — En 1830, M. Faraday a découvert que l'on fait naître *en général* un courant dans un circuit métallique fermé lorsqu'on approche ou qu'on éloigne ce dernier d'un autre conducteur traversé lui-même par l'électricité, ou encore lorsqu'on l'approche ou qu'on l'éloigne d'un aimant. Cette proposition peut s'établir par les expériences les plus simples. Sur une planche mince on fixe un fil de cuivre isolé, *abc* (fig. 844),



Fig. 844.

et l'on en met les deux bouts en communication avec un rhéomètre G. Puis, sur une autre planche mince, on attache un second fil pareil au premier et faisant partie d'un circuit voltaïque. On prend alors cette seconde planche et on l'approche de la première comme si on voulait la poser sur elle, en prenant soin que, dans toutes deux, les fils soient à peu près parallèles entre eux dans les portions correspondantes. Pendant ce mouvement de P, on constate que le circuit *abf*G est traversé par un courant de sens opposé à celui qui produit le phénomène. Si le circuit P' cesse de s'avancer vers *abcd*, l'aiguille du rhéomètre G

revient au repos, elle se meut en sens inverse et par suite accuse un courant direct si P' vient à s'éloigner.

Ces effets seraient encore visibles, quoique moins intenses, si les fils tendus sur les planches P et P', étant rectilignes, n'agissaient l'un sur l'autre que dans une étendue égale à celle de ces planchettes. On obtient, au contraire, des phénomènes d'*induction* beaucoup plus intenses en enroulant en spirales plates (voir fig. 861) les conducteurs entre lesquels doit se développer l'action *inductrice*.

La manifestation de ces phénomènes d'*induction* peut aussi s'obtenir de la manière suivante : on fixe la planche P au-dessus de P' et à une très-petite distance, en s'arrangeant de façon à conserver le parallélisme des circuits et à éviter les contacts métalliques entre eux ; alors on met le conducteur de P' en communication avec les pôles d'une pile ; aussitôt l'aiguille de G est déviée et accuse un courant inverse de celui qui circule dans $f_1P'f'_1$. Quand elle est revenue au repos, on rompt le circuit dans P' et alors on obtient en *af* un courant direct. Enfin l'appareil le plus simple de tous consiste en une bobine sur laquelle on a enroulé ensemble et parallèlement entre eux deux fils couverts de soie, *abcd*, *a'b'c'd'* (fig. 845). Si l'on joint *a* et *d* avec les extrémités

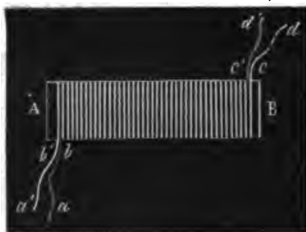


Fig. 845.

du fil d'un rhéomètre, on constate aisément que tout courant qui commence en *a'd'* détermine un courant inverse en *ad*, et que tout courant qui finit en *a'd'* détermine un courant direct en *ad* ; à quoi il faut ajouter que si le courant que l'appareil électro-moteur donne au conducteur *a'b'* éprouvait des variations d'intensité périodiques, à toute période d'accroissement du courant en *a'b'* correspondrait le développement d'un courant inverse en *ab ;* et à toute période de décroissement dans l'intensité du courant de *ab* répondrait le développement d'un courant direct en *ab*.

Induction par les aimants. — L'action inductrice des aimants

se manifeste par des expériences analogues. Concevons une bobine creuse sur laquelle soit enroulé un fil dont les extrémités communiquent avec les fils d'un rhéomètre. Si l'on approche un aimant d'une de ses extrémités en prenant soin que l'axe polaire de l'aimant et l'axe de figure de la bobine soient sensiblement dirigés suivant la même droite, on constatera que, tant que l'aimant s'approche du circuit, ce dernier est traversé d'un courant inverse de celui qui donnerait à l'aimant sa polarité ; il s'y produit, au contraire, un courant direct lorsqu'on éloigne l'aimant. L'effet est encore plus marqué quand on introduit un fer doux dans la cavité centrale de la bobine.

Si l'aimant était un électro-aimant, c'est-à-dire un cylindre de fer doux entouré d'un fil de cuivre traversé par un courant, le mouvement d'approche déterminerait dans la spirale de la bobine fixe un courant inverse de celui qui circule dans les parties voisines de la spirale magnétisante.

Action inductrice de la terre. — Dans les exemples que nous avons donnés pour montrer comment des courants d'induction se développent dans un circuit qui se meut dans le voisinage d'un aimant ou d'un conducteur traversé par un courant, nous supposions au circuit un mouvement de transport complet : cette condition n'est pas nécessaire. Une rotation partielle autour d'un axe fixe est souvent suffisante à la production du phénomène.

C'est par une rotation de ce genre que M. Faraday a mis en évidence l'action inductrice de la terre.

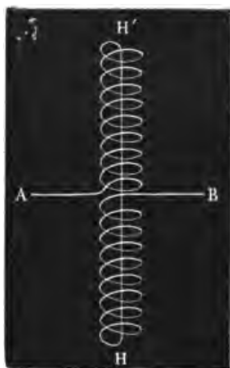


Fig. 846.

Il prenait une hélice électro-dynamique HH' (fig. 846) dont les

extrémités A et B étaient celles d'un axe autour duquel l'appareil entier pouvait tourner; AB étant perpendiculaire au méridien magnétique, et la direction de HH' étant celle de l'aiguille d'inclinaison, M. Faraday faisait brusquement pivoter l'hélice de 180 degrés, et il constatait le développement d'un courant suffisant à dévier l'aiguille d'un rhéomètre mis à l'avance en communication avec B d'une part et A d'autre part.

Le sens de ce courant était tel, que, sous son influence, l'hélice aurait eu son pôle austral à celle de ses extrémités qui primitivement plongeait au-dessous de l'horizon.

Appareil de M. Delezenne. — M. Delezenne a disposé un appareil (voyez figure 847) qui permet et de répéter commodé-



Fig. 847.

ment les expériences de M. Faraday touchant l'induction terrestre et aussi d'en analyser tous les détails. Il se compose essentiellement d'une sorte de bobine plate *fe*, de grande dimension, soutenue dans un cadre rectangulaire *abcd*, et mobile autour d'un axe YY' qui passe par le centre du cadre et se trouve parallèle à deux de ses côtés. Enfin le cadre *abcd* peut, de son côté, pivoter autour d'un autre axe XX', lequel est horizontal et soutenu par les montants verticaux PP, P'P'.

Le plan des deux montants PP, P'P' peut être placé dans un azimut quelconque, le cadre *abcd* peut recevoir toutes les inclinaisons possibles, donc l'axe YY' peut être mis dans une direction donnée quelle qu'elle soit. Ceci posé, quand cette direction coïncide avec celle de l'aiguille d'inclinaison, le mouvement de *fe* n'engendre aucun courant dans le conducteur qui le recouvre.

Hors ce cas, la rotation dont il s'agit détermine, par suite de l'influence terrestre, la production d'un courant dans le conducteur *fe*, et l'on peut recueillir ce courant soit en faisant communiquer les deux extrémités du fil où il se développe avec les deux tronçons métalliques extrêmes de l'axe de rotation, soit par d'autres procédés qui seront développés bientôt à l'occasion des machines électro-magnétiques.

L'appareil de M. Delezenne, ou tout autre semblable, est éminemment propre à étudier toutes les particularités du phénomène de la production des courants d'induction dans un circuit qui se déplace ainsi autour d'un axe fixe dans le voisinage de courants ou d'aimants capables d'agir par influence sur lui.

Loi de M. Lenz. — Tous les résultats que l'on obtient dans des expériences de ce genre et tous ceux par la description desquels nous avons commencé ce chapitre se résument dans un énoncé général dû à M. Lenz, et que nous allons reproduire.

Toutes les fois qu'on produit un déplacement relatif entre un courant et un circuit fermé à l'état naturel, celui-ci est traversé par un courant d'induction qui réagit pour déterminer un mouvement inverse de celui qui donne lieu à l'induction.

Comme nous l'avons dit, cette loi est le résumé de tous les phénomènes d'induction cités jusqu'ici. Tous contribuent donc à en établir la réalité et il serait superflu de discuter à nouveau chacun d'eux pour mieux mettre le fait en évidence; mais il ne sera pas de consigner encore ici, à l'appui de ce théorème, un nouveau résultat d'expérience et qui forme pour ainsi dire la seconde partie de la démonstration : c'est que toutes les fois qu'un conducteur mobile autour d'un axe ne peut recevoir aucun mouvement autour de cet axe sous l'action d'un courant voisin, on peut, tandis qu'il est soumis à l'action de ce courant, lui imprimer mécaniquement une pareille rotation sans qu'il devienne le siége d'aucun phénomène d'induction.

Ainsi, en particulier, l'action de la terre serait impuissante à développer un courant d'induction dans un conducteur astatique tel que celui de la figure 809, mis en mouvement autour de l'axe PP'.

§ 2. ACTION INDUCTRICE D'UN COURANT SUR UNE PORTION DU CIRCUIT QU'IL TRAVERSE.

Jusqu'ici nous venons de voir les courants induits se développer dans un circuit distinct du circuit inducteur. Il n'en est pas toujours ainsi.

Les étincelles qu'on obtient lorsqu'on ouvre le circuit d'une pile d'un petit nombre d'éléments, sont en général assez faibles. Toutefois, elles peuvent acquérir un éclat remarquable quand dans le circuit est intercalée une bobine un peu longue. En ces circonstances, l'observateur qui tient le fil métallique en B et C (fig. 848) éprouve une commotion assez violente au moment où il ouvre le circuit en *ab*.

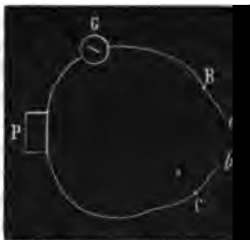


Fig. 848.

M. Faraday, M. Jenkins et Masson, ont à peu près simultanément observé ces phénomènes; Masson en a fait, dès 1836, le sujet d'une série d'études.

On admet que ces effets sont dus à un courant d'induction qui se développe dans le circuit et surtout dans l'hélice au moment où la rupture se produit en *ab*. Ce courant induit particulier passe de B en C à travers le corps de l'opérateur et prend le nom d'extra-courant. L'intensité des effets qu'il peut produire se trouve notablement accrue lorsqu'on introduit un faisceau de fils de fer doux dans la bobine. Elle diminue beaucoup au contraire lorsque, dans le voisinage du circuit où il prend naissance, se trouve un autre circuit fermé dans lequel l'action inductrice peut produire ses effets ordinaires.

Pour faire passer par le conducteur qui joint B et C une succession régulière et rapide d'extra-courants, il suffit d'employer, pour ouvrir et fermer périodiquement le circuit en *ab*, une roue analogue à celle que nous avons décrite page 737. Masson, qui a imaginé ce moyen, a remarqué que, pour une vitesse convenable de la roue interruptrice, l'observateur qui tient le conducteur en B et en C éprouve dans les mains une contraction violente et qui l'empêche de lâcher le conducteur.

Faraday a établi que l'extra-courant qui se développe dans le circuit au moment de l'ouverture est de même sens que le courant primitif. Pour démontrer cette proposition, on joint par un fil conducteur deux points du circuit primitif, tellement choisis que la bobine se trouve sur une des parties du circuit ainsi divisé et la pile sur l'autre.

Un galvanomètre fait partie du conducteur de dérivation, et se dévie sous l'influence du courant qui le traverse. On ramène alors l'aiguille au zéro, et on l'y arrête par un obstacle qui neutralise l'action déviante du courant primitif sur elle, tout en lui laissant la

liberté de se mouvoir en sens opposé. Les choses étant en cet état, on rompt le circuit près d'un des pôles de la pile, et l'on voit aussitôt l'aiguille violemment chassée dans une direction opposée à celle dans laquelle elle se déviait d'abord.

§ 3. MAGNÉTISME DE ROTATION. — RECHERCHES D'ARAGO.

Parmi les effets de l'action inductrice qui se développe entre un aimant et un conducteur lors d'un déplacement relatif de ces deux corps, il en est un très-remarquable qui fut observé et analysé plusieurs années avant les découvertes de Faraday, mais sans être alors rapporté à sa véritable cause.

En 1820, Gambey remarqua que les oscillations d'une aiguille de déclinaison montée sur pivot s'éteignent très-rapidement lorsque ce pivot est placé sur une plaque de cuivre, et cela quelque parfaite que soit la construction de la chape et de la pointe du pivot; l'effet est d'autant plus marqué que l'aiguille est plus voisine de la plaque conductrice. La plaque en repos semble donc agir sur l'aiguille en mouvement de manière à en détruire la vitesse.

Arago établit expérimentalement la réciproque du fait observé par Gambey. Il fit voir qu'un conducteur en mouvement peut agir sur une aiguille aimantée primitivement en repos et lui communiquer une certaine vitesse. Et voici comment il opérait. Une aiguille aimantée était suspendue horizontalement dans une cloche de verre, à l'extrémité d'un fil dépourvu de réaction élastique de torsion. La cloche reposait par son pourtour sur les bords d'une boîte circulaire CD (fig. 849) fixée sur une table et fermée par

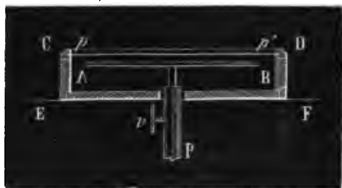


Fig. 849.

un parchemin ou feuille de papier tendue et collée comme une peau de tambour. L'aiguille touchait presque la feuille de papier, et immédiatement au-dessous de cette dernière était placé un disque de cuivre horizontal circulaire, et dont le centre était

sur le prolongement du fil de suspension de l'aiguille. Le disque était fixé normalement à l'extrémité supérieure d'un axe vertical P, qui traversait la table et le fond de la boîte, et qui pouvait recevoir une rotation rapide comme celui de l'appareil de Pixii. (Voir p. 843 et suiv.)

Dès que ce mouvement avait lieu, on voyait l'aiguille se déplacer et marcher comme entraînée par le disque, et l'on ne pouvait attribuer ce mouvement aux courants d'air puisqu'ils ne pouvaient pénétrer dans la cloche qui renfermait l'aiguille. On ne pouvait davantage l'expliquer par la trépidation due au mouvement de l'axe MN, car on avait pris la précaution de rendre le support de la cloche parfaitement indépendant de celui de la manivelle et du disque.

D'ailleurs on n'obtenait plus d'effet sur l'aiguille lorsqu'au disque de cuivre continu on substituait soit un disque non conducteur, soit même un disque conducteur refendu de nombreux traits de scie dirigés suivant les rayons de manière à partager le disque en secteurs étroits.

La rotation de l'aiguille indique l'existence d'une force parallèle au disque et agissant dans une direction différente de celle de l'axe de l'aiguille. Pour chercher si cette force suffisait à représenter l'action totale du disque sur l'aiguille, Arago suspendit celle-ci verticalement au-dessous d'un des plateaux d'une balance sensible, l'équilibra et la fit pointer successivement vers les différents points d'un même diamètre; dans tous les cas, quel que fût le pôle voisin de la plaque, la rotation du disque fut accompagnée d'une répulsion sur l'aiguille.

Enfin, Arago disposa au-dessus du disque une boussole d'inclinaison, orientée de telle sorte que le vertical dans lequel l'aiguille pouvait se mouvoir passât par le centre du disque et fût perpendiculaire au méridien magnétique. En ces circonstances, l'aiguille restait verticale quand le disque était en repos. Mais dès qu'il tournait elle ne restait verticale que si primitivement elle pointait vers le centre du disque ou vers un certain point du rayon situé à quelque distance de la circonférence. Entre ces deux points, elle s'inclinait vers le centre, au delà, vers l'extérieur.

Les phénomènes d'induction une fois découverts, il était naturel de chercher l'explication de ces effets dans la production de courants induits dans la plaque par les parties voisines de l'aiguille.

Les recherches de MM. Faraday, Nobili, Antinori, Matteucci ont mis en effet hors de doute le développement de ces cou-

rants. M. Matteucci, en particulier, a pu parvenir à assigner (voir *Annales*, série 3, tome XXXIX) la marche qu'ils suivent, et d'après la direction de leurs mouvements, on peut s'assurer qu'en effet le sens de leur action sur l'aiguille est telle qu'ils expliquent les phénomènes observés par Arago.

MM. Herschell et Babbage d'une part, M. Faraday et M. Matteucci d'autre part, ont trouvé et analysé des phénomènes réciproques de ceux qu'avait étudiés Arago. Si un aimant en fer à cheval est mobile comme dans l'appareil de Pixii autour d'un axe MN (fig. 850) parallèle à ses branches, et si l'on approche de cet aimant un disque de cuivre horizontal qui ait son centre sur l'axe MN et qui soit mobile autour de MN indépendamment de l'aimant, il suffit de faire tourner l'aimant pour que le disque se trouve immédiatement entraîné. Enfin, lorsqu'une masse continue conductrice tourne rapidement entre les deux extrémités voisines d'un fer à cheval de fer doux, si l'on vient à donner brusquement à ce dernier un degré de magnétisme suffisamment intense, la rotation de la masse conductrice se ralentit ou même s'arrête complétement, si la force à laquelle la rotation était due n'a pas une trop grande intensité. Pour répéter commodément l'expérience, on suspend un cube de cuivre de 3 centimètres de côté à un fil vertical, entre les extrémités voisines d'un fort électro-aimant. On tord le fil en faisant tourner à la main le cube de cuivre sur lui-même. Quand la torsion est suffisante, on lâche le cube de cuivre; la rotation commence et s'opère avec grande vitesse : mais elle s'arrête si l'on fait passer le courant dans les fils de l'électro-aimant, et recommence aussitôt que la circulation de l'électricité est interrompue.

Il n'est besoin de rien ajouter pour faire voir que dans toutes ces circonstances l'action réciproque des aimants préexistants et des courants qui naissent par le fait des mouvements produits tend toujours à diminuer ou à annuler la vitesse de ces mouvements. La loi de M. Lenz trouve donc encore ici une vérification complète.

En 1852, M. L. Foucault a publié une expérience dans laquelle se manifeste, par des effets calorifiques très-intenses, le développement des courants d'induction que nous venons d'étudier dans le paragraphe précédent.

Deux électro-aimants de mêmes dimensions sont placés verticalement l'un à côté de l'autre, comme sur la figure 732. Les pôles voisins sont de noms contraires. Les armures A et A' présentent deux faces verticales, parallèles entre elles, et qui sont perpendiculaires au plan passant par les axes des deux électro-

aimants. Ces faces étant suffisamment rapprochées, on engage entre elles un disque de cuivre parallèle à leur direction, dont l'épaisseur est presque égale à leur plus courte distance, et qui d'ailleurs est mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à sa base. Cet axe ne rencontre pas les armures; on met le disque en mouvement à l'aide d'un engrenage, et l'on fait passer le courant dans les électro-aimants. Aussitôt que le magnétisme se développe dans ces derniers, on éprouve à faire mouvoir le disque une difficulté qui croît avec l'énergie de l'aimantation communiquée au fer doux, et en même temps on peut constater que le disque s'échauffe beaucoup. Ainsi, dans une des expériences de M. Foucault, l'élévation de température fut de 60° en deux minutes.

La difficulté croissante que l'on éprouve à faire mouvoir le disque est le résultat des actions réciproques qui s'exercent entre les aimants et les courants d'induction développés dans le cuivre; quant à l'élévation de température, elle est un phénomène de même genre que ceux dont l'étude a été faite au chapitre VIII.

CHAPITRE XII.

MACHINES D'INDUCTION.

§ 1. — MACHINE DE PIXII. — MACHINE DE CLARKE. —

Le phénomène fondamental de la production des courants d'induction une fois connu, on a cherché des procédés qui pussent donner facilement et rapidement un grand nombre de courants de ce genre. Les machines que l'on a imaginées pour arriver à ce but peuvent se rapporter à deux types distincts : dans les unes, l'appareil inducteur est un aimant; c'est une bobine dans les autres.

La disposition générale des machines de la première espèce a été inventée par Pixii vers 1832; celle de la deuxième, par MM. Masson et Bréguet, en 1840.

La machine de Pixii est représentée fig. 850.

Elle se compose d'abord d'un aimant en fer à cheval CED

ayant ses branches dirigées verticalement et dans des positions symétriques par rapport au prolongement d'un axe solide MN qui sert à le supporter.

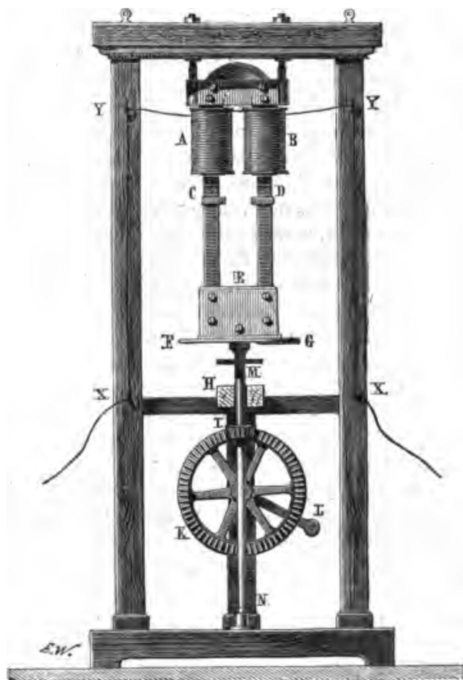


Fig. 850.

L'axe MN porte un pignon I dont les dents engrènent dans celles d'une roue K, en sorte qu'en faisant tourner celle-ci on peut imprimer à MN et par suite à CED un mouvement de rotation rapide autour de la verticale du point E. Au-dessus de l'aimant mobile est placé un électro-aimant fixe AB, dont les branches sont dirigées suivant les prolongements de celle de l'aimant. La distance des plans horizontaux qui passent par les extrémités de CD et de AB est très-petite, mais elle n'est pas nulle. Les fils de l'électro-aimant se prolongent en YX et sont

fixés aux montants de bois qui encadrent et soutiennent tout l'appareil.

Voici comment cette machine fonctionne. Supposons l'aimant immobile depuis un certain temps au-dessous du fer à cheval. Ce dernier est alors aimanté et présente, par exemple, un pôle austral en A, un pôle boréal en B, et si nous supposons le fil faisant un circuit complet, aucun courant ne traverse encore. Mais faisons tourner la manivelle, le magnétisme décroît dans le fer doux, et le fil qui l'enveloppe est traversé d'un courant direct, c'est-à-dire d'un courant qui produirait un pôle austral en A.

Au moment où l'aimant arrive à 90° de sa position première, c'est-à-dire quand le plan de ses branches est perpendiculaire à celui du fer à cheval, ce dernier rentre à l'état neutre, et, la rotation continuant, il s'aimante en sens contraire : un pôle boréal se développe en A, un pôle austral en B, et l'intensité de ce nouvel état magnétique va croissant à mesure que les pôles de l'aimant se rapprochent eux-mêmes des extrémités du fer doux. Le fil est alors traversé par un courant inverse, c'est-à-dire par un courant qui tendrait encore à développer un pôle austral en A. Ainsi, pendant toute la première demi-révolution de l'aimant, le fil a été traversé par un courant conservant le même sens. Le sens change à la demi-révolution suivante et ainsi de suite. Si le circuit dont le fil de l'électro-aimant forme la partie principale est terminé par le corps d'un animal, ce dernier éprouvera des effets dont l'intensité dépendra de la force de l'aimant, des dimensions du fer doux et surtout de la longueur du fil qui l'enveloppe. Si l'on frotte les extrémités opposées du fil XX, de manière à les joindre et à les séparer brusquement, on verra des étincelles jaillir entre elles.

Enfin, si un voltamètre, l'eau y sera décomposée, mais les gaz seront mélangés.

Pour les obtenir séparés, il suffit d'avoir recours à un commutateur qui, à chaque demi-révolution de l'aimant, détruise dans le circuit extérieur à la bobine, l'inversion que tend à y éprouver le sens du courant. Les courants ainsi ramenés à avoir une direction constante produisent facilement les phénomènes d'aimantation, et ceux de l'incandescence de fils.

Le premier commutateur adopté par Pixii rappelait beaucoup ceux qu'Ampère avait imaginés pour ses expériences.

Il se composait (fig. 851) d'un axe isolant *ab*, portant deux traverses conductrices qui se terminaient à leurs extrémités par des fiches également conductrices *h*, *g*, *e*, *f*.

Les fiches *g* et *e* étaient reliées par des fils de cuivre très-

flexibles à deux bornes fixes, 1 et 3 servant de rhéophores.

Au-dessous de l'équipage mobile *abghef*, étaient disposées deux lanières de cuivre conductrices *ss*, *rr*, se coupant en croix, mais sans se toucher métalliquement au point de croisement.

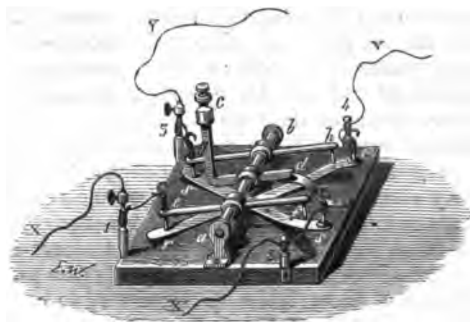


Fig. 851.

L'une communiquait par la borne 2 à la première extrémité du fil de l'électro-aimant et l'autre à la seconde.

Un excentrique FG (fig. 852) qui, pendant la moitié de la rotation de l'axe MN (fig. 850), venait presser contre le levier *c* (fig. 851), forçait, pendant la demi-révolution correspondante, les tiges *f* et *h* à toucher les lanières en *p'* et en *s*, et pendant l'autre demi-révolution le contact avait lieu au contraire entre ces lanières et les fiches *e* et *g*. Enfin, la position de l'excentrique était réglée de façon que ce changement dans les contacts coïncidât avec le passage de l'aimant sous l'électro-aimant, c'est-à-dire avec l'inversion du courant d'induction dans les fils de ce dernier. Par cette disposition, au moment où changeait la nature de l'électricité arrivant par V (fig. 851), changeait aussi le rhéophore auquel elle se trouvait conduite. Par conséquent, enfin, chacun des rhéophores 1 et 3 recevait toujours la même sorte de fluide.



Fig. 852.

On a depuis appliqué à ces machines un commutateur plus simple et qui se retrouve employé dans un grand nombre d'appareils électro-magnétiques.

Sur une partie AB de l'axe de fer MN (fig. 853) on fixe une bobine de bois ou d'ivoire isolant *aa* et sur celle-ci, 1° une bague

de cuivre *dd* en communication métallique avec l'axe par la vis *f*, puis une virole aussi en cuivre formée d'une bague complète *c'* communiquant avec une demi-bague *c* par une bride métallique que l'on voit sur la gauche de la figure se détachant du bois sous-jacent. Cette virole est isolée de l'axe.

Mais en face de la demi-bague ou demi-anneau qui la termine par le bas est fixée une autre demi-bague ou demi-anneau c_1 qui touche l'axe à l'aide de vis, ainsi que le fait la première bague *dd*; *xx* sont des ressorts métalliques qui touchent les deux extrémités du fil de l'électro-aimant; *y* et *y'* sont d'autres ressorts qui servent de rhéophores. Lorsque *y'* touche c_1, ainsi qu'on le voit sur la figure, l'électricité donnée à *d* s'écoule par *y'* et celle qui est donnée à la virole *c'c* s'écoule par *y*. C'est le contraire lorsque c_1 se trouve en contact avec *y*.

Par conséquent, enfin, pour que *y'* reçoive toujours de l'électricité de même signe, il faut et il suffit que le plan passant par l'axe de rotation et l'interruption qui sépare c_1 de *c* contienne aussi les axes des deux branches de l'aimant mobile, et que, de plus, le plan de l'électro-aimant fixe contienne les points de contact de *y* et *y'* avec le commutateur.

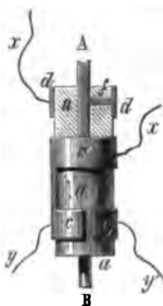


Fig. 853.

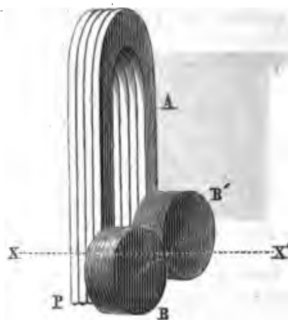


Fig. 854.

Clarke, par une disposition plus commode, donna un volume beaucoup moindre à l'appareil de Pixii.

Dans l'appareil de Clarke, l'aimant A (fig. 854) est fixe. L'électro-aimant BB' tourne autour d'un axe horizontal XX', et ses extrémités s'approchent plus des pôles de l'élément A qu'elles ne le font dans l'appareil de Pixii, ce qui contribue à accroître la force des courants produits. Le commutateur ne diffère pas en prin-

cipe de celui que nous venons de décrire. Les deux extrémités du fil de l'électro-aimant sont engagées dans la bobine de bois BB' (fig. 855); elles communiquent métalliquement, l'une avec la demi-virole D, l'autre avec la demi-virole E. Des ressorts VV', U, fixés dans deux pièces métalliques HI, H'I' qui servent de rhéophores, pressent tantôt contre l'une et tantôt contre l'autre de ces demi-viroles. L'inversion a lieu en même temps que celle du signe de l'électricité qui arrive à cette demi-virole, et, par conséquent, chacun des rhéophores HI, H'I' conserve toujours son signe.

Quand Masson eut découvert les actions physiologiques puissantes qu'exercent sur l'économie animale les extracourants qui se produisent dans des circuits où se trouve une bobine un peu forte, on disposa les appareils de Pixii ou de Clarke de manière qu'ils pussent donner des commotions analogues à celles que l'on obtenait avec l'appareil à roue dentée que nous avons déjà décrit. Voici comment on y arrive. Lorsque deux ressorts métalliques V et U font communiquer les plaques métalliques HI

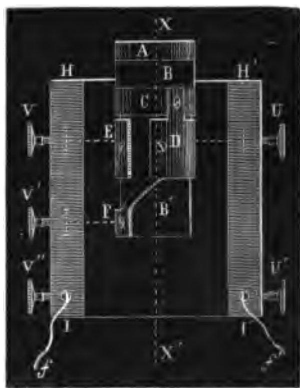


Fig. 855.

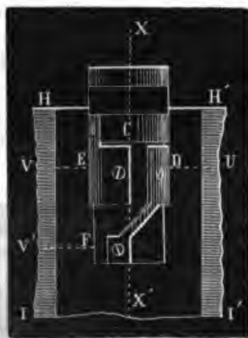


Fig. 856.

et H'I' avec les demi-bagues D et E, il suffit de réunir les fils f et f' pour constituer un circuit complet dans lequel l'électricité marchera toujours dans le même sens entre les bornes f et f'. Si à un moment donné on prend ces fils à la main et si on rompt le contact qui existait entre eux, on ressent au moment de l'interruption une forte commotion due à l'extracourant; pour obtenir rapidement une série de secousses semblables, il faut

prolonger la demi-virole D par un appendice conducteur F (fig. 855), et fixer en V′ un troisième ressort, qui à chaque tour de l'arbre se trouve pendant quelques instants en contact avec F. Tant que le contact dure le courant passe par une voie toute métallique de D en F, de F en V′, V et E. Mais quand le contact s'interrompt, si l'on tient les fils *f* et *f′*, on reçoit la secousse du courant d'induction qui se produit dans le circuit lui-même.

Ordinairement les fils *f* et *f′* sont terminés par des poignées que l'on tient à la main. Les secousses que l'on reçoit dans ces conditions sont très-douloureuses, et, comme nous l'avons déjà dit page 838, elles déterminent dans les doigts ou les mains entières une contraction musculaire qui empêche de lâcher les poignées. L'appareil est disposé de telle sorte que l'extracourant se développe au moment où le courant induit a son intensité maximum.

§ 2. — MACHINE DE MM. MASSON ET BRÉGUET.

L'appareil de MM. Masson et Bréguet (fig. 858) se compose de trois parties distinctes :

1° Un système inducteur formé d'une bobine *o* reliée à la pile P par un circuit conducteur que l'on peut ouvrir et fermer rapidement à l'aide d'une roue métallique E à dents alternatives de métal et de bois comme celle dont il a déjà été parlé page 737.

2° Une bobine creuse O dans le fil de laquelle doivent se développer les courants d'induction et qui peut recevoir la bobine *o* dans sa cavité centrale.

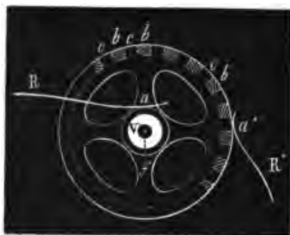


Fig. 857.

3° Un rhéotrope, c'est-à-dire un appareil qui permet, soit de donner une direction constante dans un circuit extérieur aux courants directs et inverses produits par le jeu de l'interrupteur,

soit d'isoler tous les courants de même nature pour les étudier à part, les autres étant supprimés.

Le rhéotrope (fig. 858) est formé de quatre roues A, B, C, D, semblables à celle qui constitue l'interrupteur. Ces quatre roues, ainsi que l'interrupteur, sont montées sur un même axe de fer *f*, qui en est isolé par un collier de verre V (fig. 857). Dans les deux roues extrêmes du rhéotrope les dents métalliques se correspondent bien exactement et elles correspondent aux dents de bois des deux roues moyennes.

La figure 858, que nous empruntons au mémoire de MM. Masson et Bréguet, représente un plan d'ensemble de leur appareil.

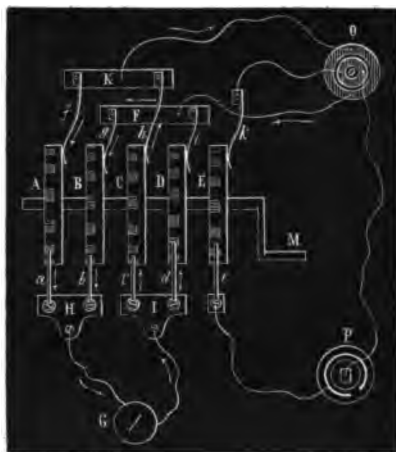


Fig. 858.

Indépendamment des parties déjà décrites, H et I sont deux étaux en métal portant chacun deux languettes ou ressorts métalliques qui viennent s'appuyer, l'une contre la jante d'une des roues extrêmes, l'autre contre celle de la roue moyenne qui en est voisine. De ces deux étaux partent des fils qui se joignent aux bouts de celui d'un rhéomètre G; F et K sont deux lames de métal en contact chacune avec l'une des extrémités du fil de la bobine induite. De la première de ces lames partent deux ressorts qui viennent s'appuyer sur les parties métalliques de A et de C. De la seconde partent deux ressorts semblables qui touchent aussi d'une manière permanente les roues B et D. Les dents de l'interrupteur concordent à très-peu près avec les dents métalliques des roues

extrêmes du rhéotrope, pourtant la coïncidence n'est pas tout à fait absolue, et le circuit induit est toujours fermé au moment où le circuit inducteur s'ouvre ou se ferme.

Il suffit de jeter les yeux sur la figure pour se convaincre que, grâce à la manière dont les communications s'établissent, les courants directs et inverses traversent toujours dans le même sens le rhéomètre G. Supposons, en effet, que le circuit s'ouvre en E; alors les ressorts *a* et *d* sont sur bois, l'électricité, dans la bobine extérieure O, passe à travers les roues B et C, en suivant, je suppose, le sens indiqué par les flèches. Si alors le circuit de l'interrupteur se ferme, *b* et *e* arrivent sur bois, et le courant change de sens dans le fil KO, il arrive au rhéomètre en suivant la route *fa*G; dans le même sens que d'abord; et il est évident aussi que si l'on supprime les ressorts *f* et *i* il ne passera plus en G que des courants d'une seule espèce, directs, je suppose; et qu'au contraire, en replaçant *f* et *i*, mais enlevant à leur tour *g* et *h*, on obtiendra les autres.

Enfin, s'il s'agissait simplement de faire passer dans un même conducteur, et avec leurs directions propres, les courants alternativement inverses qui se développent dans la bobine induite lors de la rotation de l'interrupteur, on laisserait le rhéotrope de côté, et l'on mettrait les deux extrémités du fil de la bobine en communication avec les deux extrémités du conducteur sur lequel on veut expérimenter. La figure suppose que la bobine intérieure est la bobine inductrice. Dans les premiers appareils de MM. Masson et Bréguet, c'était au contraire à O que ce rôle était réservé. Du reste, aucune autre modification essentielle à la machine.

CHAPITRE XIII.

LOIS DES COURANTS D'INDUCTION. COURANTS INDUITS DE DIVERS ORDRES.

§ 1. — COURANTS D'INDUCTION DU PREMIER ORDRE. — LOIS GÉNÉRALES.

Les expériences que nous avons rapportées aux chapitres précédents suffisent pour faire comprendre comment, avec les courants

d'induction, on peut reproduire tous les phénomènes que l'on obtient avec les courants voltaïques ordinaires, ou encore avec les décharges des bouteilles de Leyde, mais elles ne font pas connaître les relations qui existent entre l'intensité des courants inducteurs et celle des courants induits directs ou inverses; elles ne mettent pas non plus en évidence l'influence qu'exercent, sur l'intensité des courants induits, la disposition, la résistance du circuit dans lequel ils se produisent, ou encore la disposition de la bobine inductrice. Parmi les travaux qui ont eu pour objet la solution de ces questions importantes, les premiers en date sont ceux de M. Henri de Princeton et de M. Abria. Ils ont été insérés au tome III des *Ann. de chimie et de physique*, série 3. Nous extrayons du mémoire de ce dernier physicien quelques résultats généraux qui sont autant de lois auxquelles les phénomènes d'induction sont assujettis dans leur développement.

Recherches de M. Abria. — M. Abria n'opérait pas sur des groupes de courants induits égaux entre eux et se succédant en grand nombre pendant un temps très-court, tels qu'on peut les obtenir avec la machine de Pixii ou celle de MM. Masson et Bréguet; il prenait toujours pour objet de ses observations l'effet produit par un courant unique développé dans des circonstances déterminées; et cet effet était l'aimantation d'une aiguille.

Dans un travail antérieur, M. Abria avait reconnu que quand une aiguille n'est pas trop fortement trempée on lui fait acquérir tout le degré de magnétisme qu'elle peut recevoir d'un courant transmis à travers une hélice donnée, en l'introduisant brusquement en cette hélice et l'en retirant aussitôt. On ne gagne rien à laisser le courant agir sur elle plus longuement. Il avait aussi constaté que si l'aiguille est placée dans l'hélice avant la fermeture du circuit, elle prend son maximum de magnétisme à l'instant même de la fermeture. Enfin, et ce point est fondamental, il avait trouvé, en outre, que l'on peut toujours faire en sorte que la force magnétique ainsi donnée aux aiguilles soit proportionnelle aux carrés des intensités des courants. Il suffit pour que cette proportionnalité subsiste à coup sûr, que les dimensions des aiguilles et celles des hélices qui les reçoivent soient comprises entre des limites que l'expérience fait connaître.

Ceci posé, il admit que si, en se plaçant dans les conditions définies par ses expériences, on aimantait des aiguilles à l'aide de courants d'induction, ces courants, malgré leur instantanéité, donneraient aussi aux aiguilles soumises à leur action un degré de magnétisme proportionnel au carré de leurs intensités, et ce sont des expériences conduites et interprétées d'après ce prin-

cipe qui ont donné les résultats transcrits aux deux pages suivantes.

1° Lorsque le circuit induit ne change pas, les courants inverses que l'on obtient en fermant le circuit inducteur et les courants directs produits au moment où on l'ouvre sont, les uns comme les autres, proportionnels aux courants inducteurs.

2° Supposons que le circuit inducteur et le circuit induit soient identiques de nature et de dimensions, au moins dans les portions entre lesquelles l'action inductrice s'exerce, et qu'ils se réduisent à 2 fils droits, à 2 cercles, à 2 rectangles superposés ; si la résistance de la portion du circuit induit qui est en dehors de la bobine est négligeable, et si l'intensité du courant inducteur est constante, l'intensité du courant induit est indépendante de la longueur commune des fils actifs, et par conséquent du nombre des éléments du fil induit qui reçoivent l'action inductrice; absolument comme dans un circuit voltaïque formé d'un conducteur interpolaire très-peu résistant et d'éléments hydro-électriques identiques entre eux, l'intensité du courant est indépendante du nombre des éléments employés.

Mais quand la résistance totale du circuit que parcourt le courant induit n'est pas très-sensiblement égale à celle de la portion qui reçoit directement l'induction, le courant induit, toutes choses égales d'ailleurs, croît avec la longueur de la partie induite, et par conséquent avec celle de la portion du fil inducteur qui agit sur elle, puisque nous supposons ces longueurs égales.

3° M. Abria opérait ordinairement avec des spirales plates, analogues à celles qui sont représentées figure 861 ; plusieurs de celles qui lui servaient étaient formées de telle sorte, qu'il pouvait à volonté accroître ou la section du fil qui la formait ou le nombre de spires qu'elle renfermait. L'une d'elles en particulier était composée de quatre fils de $0^{mm},64$ de diamètre égaux en longueur, entortillés ensemble et séparés par de la soie. On pouvait à volonté faire passer le courant par chacun des fils que j'appellerai (1), (2), (3), (4), les autres restant ouverts, ou bien par (1), (2), par (1), (2) et (3), etc., en le faisant entrer simultanément par les extrémités d'un même côté, ce qui donnait des spirales d'un même nombre de tours, mais de section double, triple. En le faisant passer au contraire de (1) dans (2), de (1) dans (2), de (2) dans (3), etc., etc., de manière qu'il les parcourût dans le même sens, on obtenait des spirales de même section mais d'un nombre de tours double, triple; et ces tours étaient toujours disposés de la même manière par rapport au circuit induit, car dans les expériences dont il s'agit, le circuit

induit était une spirale plate de même diamètre que la spirale inductrice, et les deux spirales étaient superposées.

En ces circonstances, si l'on fait varier la section seule de la spirale inductrice, l'intensité du courant inducteur restant constante, celle de chacun des courants induits ne change pas; au contraire, ces dernières augmentent proportionnellement au nombre des spires inductrices, pourvu que la force du courant inducteur ne change pas.

4° M. Abria prit ensuite la même spirale de 4 fils pour induite, en faisant d'abord en sorte que chaque fil fermât lui-même son circuit. En ces circonstances, l'intensité du courant développé dans chacun fut trouvée la même; et cela devait être, puisque les quatre circuits étaient égaux et disposés de la même façon par rapport au circuit inducteur; la résistance de l'hélice était négligeable par rapport à celle de chaque spirale. Puis il fit successivement communiquer, d'abord un, puis deux, puis trois de ces circuits avec l'hélice magnétisante, les autres circuits restant fermés, et il vit que les intensités des courants transmis à travers l'hélice étaient proportionnelles au nombre de circuits induits réunis. En un mot, ces intensités variaient comme celles des courants que l'on obtiendrait dans un circuit très-peu résistant, à l'aide de un, deux, trois, quatre éléments hydro-électriques très-résistants, égaux entre eux et réunis par les pôles de même nom.

Les résultats auraient pu être différents si le rapport de la résistance de l'hélice à celle des spires induites n'eût pas été très-petit, comme il l'était dans les dernières expériences que nous venons de citer.

En général, en effet, il est évident que quand on fait varier les dimensions, la nature, la disposition de la spirale ou de la bobine induite, les influences multiples que ces changements exercent sur le courant qui y prend naissance se trouvent encore compliquées de celle qui provient des changements apportés à la résistance du circuit total par les modifications dont il s'agit. L'analyse de ces diverses influences est un problème très-difficile et dont nous ne chercherons pas à donner la solution.

5° Un autre fait important résulte encore des expériences dont nous donnons ici un aperçu. Lorsqu'en laissant constants le système inducteur et la spirale induite, on fait croître la résistance du circuit total que les courants induits doivent traverser, on constate que leur intensité diminne, et cela qu'ils soient directs ou inverses. On devait s'y attendre; mais ce que l'on ne pouvait prévoir, c'est que la loi de diminution ne parut pas la même

pour les deux. Pour les courants inverses, elle fut trouvée plus rapide que pour les autres.

Dans un grand nombre d'expériences citées au mémoire de M. Abria, et dans beaucoup d'autres cas qui n'y sont pas spécifiés, on voit les courants directs présenter des intensités plus fortes que les courants inverses correspondants. Mais ces expériences ne donnent aucun renseignement sur les rapports des durées relatives de ces courants. L'étude des décompositions électro-chimiques qu'ils produisent a fourni sur ce point un renseignement très-important.

Recherches de M. Matteucci. — Lorsque avec la machine de MM. Masson et Bréguet on fait passer dans un voltamètre des courants induits, tous de même nature, tous directs ou tous inverses, on observe, comme on devait s'y attendre, des décompositions chimiques. Mais si, mettant de côté le rhéotrope, on se borne, comme le fit M. Matteucci, à compléter le circuit de la bobine induite par un voltamètre à sulfate de cuivre, on ne voit apparaître aucune trace de décomposition polaire. D'après ce qui précède, il est évident que cette nullité apparente d'action indique seulement une égalité parfaite entre les effets des courants directs et inverses qui traversent alternativement le voltamètre. A chaque électrode, en effet, les courants d'une espèce déterminent la dissolution du métal que les courants de l'autre espèce avaient fait déposer.

On peut encore arriver à la même conséquence par l'emploi de voltamètres à eau. Les gaz sont mis en liberté, et si les voltamètres sont convenablement disposés (voir *Annales de chim. et phys.*, t. LII, mémoire de Masson sur les courants induits d'ordre supérieur), à chaque pôle on trouve un volume d'oxygène et deux d'hydrogène. D'après les principes posés par M. Pouillet (voir p. 737), cette égalité d'effet prouve que si l'on désigne par i et t l'intensité et la durée moyenne des courants induits directs, par i' et t' l'intensité moyenne et la durée moyenne des courants induits inverses produits dans les expériences citées, on a $it = i't'$. C'est à cette condition seule que peut être due l'égalité des effets chimiques obtenus. Si donc, dans les circonstances de l'expérience, i' est moindre que i, il faut nécessairement que t' soit plus grand que t. Quant aux intensités i et i', on se rappelle qu'elles sont proportionnelles aux quantités d'électricité qui, dans le même temps, traversent le conducteur dans lequel passent les courants.

Recherches de M. A. Lallemand. — Les expériences de décompositions électro-chimiques que nous venons de citer ne

sont pas les seules dans lesquelles on ait vu la relation $it = i't'$ se manifester entre des groupes de courants directs et inverses correspondants. M. A. Lallemand a inséré au tome XXII des *Ann. de chimie et physique* un mémoire dans lequel il fait connaître un appareil très-sensible avec lequel on peut étudier, au point de vue du sens et de l'intensité, les actions réciproques des courants électriques, et avec lequel, en particulier, on peut résoudre un certain nombre des questions délicates de la théorie des phénomènes d'induction. Que l'on conçoive, aux deux bouts d'une tige de bois (fig. 859), deux spirales plates

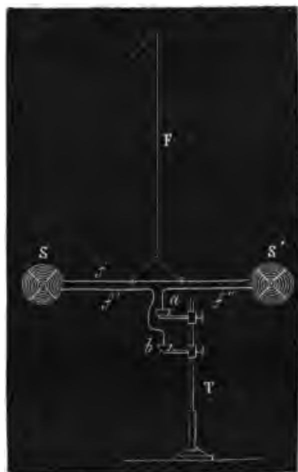


Fig. 859.

formées d'un fil de cuivre dont les spires sont maintenues à petite distance les unes des autres par quelques traverses diamétrales en ivoire. Les deux spirales communiquent entre elles; elles font partie d'un même circuit dans lequel le courant, à la volonté de l'opérateur, marche du godet *a* au godet *b* ou réciproquement. L'action de la terre sur l'appareil est nulle si le fil est enroulé dans le même sens à ses deux extrémités. Le levier est attaché en son milieu au fil de torsion. Une cage de verre empêche les effets fâcheux de l'agitation de l'air.

Si, en face d'une des spirales C ou D, on place une spirale fixe traversée par un courant électrique, et si, dans la spirale

mobile, on en fait passer un autre de même sens ou de sens inverse, il se manifestera entre elles une attraction ou une répulsion dont on pourra mesurer la valeur dans des conditions de distance que l'on maintiendra invariables, ainsi qu'on le fait ordinairement dans l'étude des attractions ou des répulsions électriques. Ceci posé, que l'on transmette à travers la spirale fixe un courant invariable, et que dans la spirale mobile on fasse passer tous les courants alternativement de sens contraire que l'on peut obtenir en faisant fonctionner pendant quelques instants une machine de MM. Masson et Bréguet, et l'on pourra constater une nullité complète d'action entre la spirale fixe et la spirale mobile. Au contraire, la spirale mobile se trouve fortement attirée ou repoussée, lorsqu'à l'aide d'une disposition convenable on n'y fait passer que l'ensemble des courants inverses ou celui des courants directs produits pendant le temps de l'opération, et l'attraction qui se manifeste dans un cas est égale à la répulsion que l'on observe dans l'autre, si la rotation de l'interrupteur se fait toujours avec même vitesse. Il est évident, d'après les lois générales d'action des courants sur les courants, que l'égalité des attractions et des répulsions dont il s'agit ici entraîne, comme nous l'avons dit en commençant, celle des produits it et $i't'$.

Recherches de M. Poggendorff. — Comme nous l'avons dit aux pages précédentes, M. Abria avait constaté que quand, en laissant constants et le système inducteur et la spirale induite, on fait croître la résistance du circuit induit total, l'intensité des courants inverses décroît plus vite que celle des courants directs correspondants. M. Poggendorff a découvert un fait qui se rapproche du précédent, et dont il a fait de très-heureuses applications. Il a démontré qu'il y a une différence dans la facilité avec laquelle traversent l'air, sous forme d'étincelles, les courants directs et les courants inverses que l'on obtient avec les machines semblables à celles de MM. Masson et Bréguet. Supposons que l'on fasse fonctionner une machine de cette espèce sans faire usage du rhéotrope; les courants directs et les courants inverses successifs parcourront le même circuit alternativement en sens inverse. Si dans ce circuit commun on place un voltamètre, on aura dans les deux éprouvettes des mélanges d'hydrogène et d'oxygène, ce qui indique la transmission des courants de l'une et de l'autre espèce; mais si dans le circuit se trouve une interruption de grandeur suffisante, et que le courant soit obligé de traverser sous forme d'étincelle, les gaz ne sont plus mélangés, et la position de l'éprouvette qui renferme

l'hydrogène indique que la décomposition est due au courant direct.

Recherches de M. Felici. — En 1852, M. Felici publia, dans les *Annales de chimie et physique*, le résumé d'une série de recherches relatives aux phénomènes d'induction. Dans ces recherches, M. Felici retrouva d'abord, par des procédés tout différents de ceux que M. Abria avait employés, quelques-unes des propositions établies par ce dernier physicien, puis il démontra expérimentalement un théorème important, et qu'il énonce de la manière suivante :

La somme de tous les courants induits, dans un circuit conducteur, par un circuit voltaïque fermé et en mouvement, pendant le passage de ce dernier d'une position [nº 1] dans laquelle il ne pourrait produire, soit en l'ouvrant, soit en le fermant, aucun courant induit dans le premier circuit, à une autre position quelconque [nº 2] est égal au courant B que l'on peut produire en ouvrant ou fermant le même circuit inducteur placé exactement dans la même position [nº 2]. L'espace nous manque pour indiquer les méthodes expérimentales employées par M. Felici dans l'établissement de cette proposition, et nous sommes forcés de renvoyer les lecteurs au mémoire original.

Avant de terminer ce paragraphe, nous donnerons encore une indication touchant les lois du développement des courants induits sous l'action des aimants.

Recherches de M. Verdet. — Soient A et B les pôles contraires d'un électro-aimant disposé comme celui de la figure 860,



Fig. 860.

et soit, placée entre eux, une aiguille aimantée petite, fortement trempée *ab*, mobile horizontalement autour d'un axe invariable *o*. Si l'on fait varier l'intensité du courant qui traverse les fils des deux électro-aimants, il en sera de même de l'action exercée sur l'aiguille. Dans tous les cas, en faisant osciller cette dernière, d'abord sous la seule influence de la terre puis sous celle des électro-aimants, on pourra voir quelles actions ceux-ci exercent sur elle pour différentes intensités données aux

courants. Nous admettons que dans les conditions de l'expérience l'état magnétique de l'aiguille n'éprouve aucune altération.

Ceci posé, admettons qu'à l'aiguille on substitue une bobine d'induction de petite dimension, aplatie, et dont on puisse amener l'axe à être tantôt vertical et tantôt dirigé suivant AB. Toutes les fois qu'on fera ainsi passer cet axe de l'une à l'autre de ces positions, un courant d'induction se développera dans la bobine, et pourra être recueilli dans un magnétomètre de M. Weber. Si l'on mesure dans chaque cas l'impulsion qu'il communique, on verra qu'elle est toujours proportionnelle à l'action magnétique exercée par les électro-aimants sur l'aiguille *ab*. Il en sera donc de même du produit it de l'intensité i du courant produit par sa durée t, ou plus généralement de l'intégrale $\int idt$, laquelle est mesurée par la déviation initiale.

La bobine d'induction dont nous venons de parler est précisément l'appareil qui servit à M. Verdet dans les recherches décrites page 485, d'abord pour constater l'existence d'un champ d'égale intensité entre les plaques qui armaient les pôles de ses électro-aimants, et secondement pour comparer entre elles les intensités des actions magnétiques auxquelles il soumettait les substances transparentes dont il étudiait le pouvoir rotatoire.

§ 2. — COURANTS INDUITS D'ORDRES SUCCESSIFS. — ACTION INDUCTRICE DES ÉTINCELLES DE BATTERIES.

Lorsque dans un circuit inducteur se trouve un appareil interrupteur analogue à ceux que nous avons déjà décrits pages 737 et 847, si on le fait fonctionner avec grande vitesse, chacun des courants que la pile donne dans le circuit inducteur, ne dure qu'un temps court, et pourtant il développe dans le fil soumis à son action un courant inverse à l'instant où il commence et un courant direct quand il finit. Des courants de durée bien plus brève encore tels que les courants induits eux-mêmes, ou les étincelles de bouteille de Leyde jouissent de la même propriété.

M. Henri de Princeton a découvert et étudié le premier le phénomène des inductions successives, ou en d'autres termes le développement des courants induits de divers ordres. Pour mettre en évidence la réalité de ces inductions successives, M. Henry prenait plusieurs systèmes de spirales doubles, telles qu'on en voit une figurée en *bc* (fig. 861). Sur la portion *c* du système double *bc* on posait une spirale inductrice *d* qui devait recevoir

directement le courant de la pile, et la portion *b* du même système reposait sur la portion *a* d'un second circuit propre à recevoir l'induction.

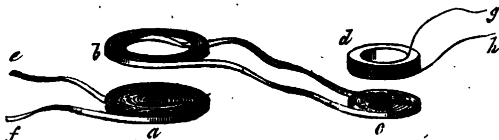


Fig. 861.

Ainsi *c* recevait l'induction de *d*, et *b* agissait sur *a*, la distance *bc* était assez grande pour que *d* ne pût pas agir directement sur *a*, et ainsi de suite.

Chaque fois que le courant de *d* était soit ouvert soit fermé, une induction du premier ordre avait lieu en *cb*, une du second en *a* et ainsi de suite. Pour manifester la réalité de ces inductions successives il suffit de rompre le fil d'une des spirales doubles et de rapprocher à très-petite distance les bouts du fil ainsi séparés, des étincelles jaillissent entre eux à chaque ouverture ou à chaque fermeture du circuit inducteur *d*. Mais si on plonge ces fils dans un voltamètre très-sensible à sulfate de cuivre, on n'obtient aucune trace de décomposition, et cela indique que les courants de directions inverses qui se développent dans le circuit, sont capables de produire des effets chimiques égaux. L'ensemble de ces courants n'aurait pas non plus d'action sur un rhéomètre à fil court que l'on substituerait à l'hélice. Mais si l'on vient à les transmettre à travers une hélice magnétisante, ils aimanteront une aiguille placée dans cette hélice, et la position des pôles ainsi développés indiquera le sens du plus intense des courants induits dans la spirale que l'on considère. Cela tient, comme nous l'avons déjà dit, à ce que l'action d'un courant pour aimanter une aiguille dépend surtout de son intensité, de sorte qu'un courant d'induction moins intense qu'un autre ne peut détruire qu'une partie de l'aimantation produite par ce dernier, même en agissant pendant un temps plus considérable.

De l'ensemble des résultats obtenus dans ce genre de recherches, on déduit que si l'on désigne par le signe + le sens du courant de la pile, ceux des courants induits d'ordres successifs que l'on obtient en ouvrant le circuit seront alternativement positifs et négatifs. De sorte que, pour ces courants,

l'ordre général de succession peut se représenter par le tableau suivant :

COURANT DE LA PILE.	COURANTS INDUITS.			
	1er ordre.	2e ordre.	3e ordre.	4e ordre.
+	+	−	+	−

Les courants induits d'ordre supérieur, que l'on obtient au moment de la fermeture du circuit, sont aussi alternativement de signes contraires, seulement le premier d'entre eux est de sens contraire à celui du courant inducteur.

Induction par l'étincelle d'une batterie. — Une étincelle de batterie, en se transmettant à travers une spirale conductrice, agit sur une spirale voisine comme le ferait un courant induit d'ordre supérieur, elle développe dans cette spirale deux courants de sens contraire, qui manifestent leur existence par des étincelles, mais qui, transmis à un voltamètre, n'y développent pas d'action chimique nette. Seulement, ici encore, l'un des courants est plus aisément que l'autre arrêté par les résistances qu'on lui oppose, de sorte que si quelque part dans le trajet commun il se trouve une interruption à franchir sous forme d'étincelle, l'un des courants passe beaucoup plus abondamment que l'autre et les effets de décomposition chimique redeviennent sensibles. Tous ces faits ont été établis par M. Verdet dans une série de recherches dont les résultats ont été consignés aux *Annales*, série 3, tome XXIV.

Recherches de M. Verdet. — Les étincelles inductrices étaient

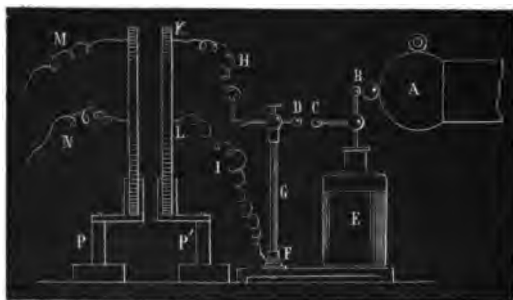


Fig. 862.

obtenues à l'aide d'une bouteille de Leyde dans le circuit de laquelle était placée une spirale de M. Matteucci, P'K (fig. 862).

La figure montre la manière dont les communications étaient établies. A était l'extrémité d'un conducteur de machine électrique, F une lame conductrice en contact avec l'extérieur de la bouteille, G une tige isolante. Quand l'étincelle éclatait en CD, une seconde spirale éprouvait les effets d'induction et par les fils M et N elle transmettait les courants dont elle devenait le siége, soit à un voltamètre, soit à une troisième spirale qui pouvait devenir inductrice à son tour.

Lorsque M. Verdet voulait, pour séparer les deux courants induits par l'action d'une même étincelle, leur faire franchir sous forme d'étincelle, une couche d'air plus ou moins épaisse, il introduisait dans le circuit une capsule pleine de mercure V (fig. 863), une des parties du circuit, *a*, touchait d'une manière continue le liquide conducteur, l'autre, *b*, était attachée à une vis *v*, que l'on pouvait soit amener au contact du mercure, soit élever à une petite distance au-dessus de son niveau. En réglant convenablement l'épaisseur de la couche d'air comprise entre la pointe et le mercure, on pouvait arrêter les courants inverses, et la disposition des éléments séparés dans le voltamètre donnait le sens du courant prédominant.

L'induction par les étincelles électriques paraît avoir été vue pour la première fois par Aimé. Mais le travail de ce physicien



Fig. 863.

ne reçut pas de publicité et ce fut Masson qui, sans avoir aucune connaissance du fait observé par Aimé, le découvrit de son côté et en commença l'étude.

CHAPITRE XIV.

BOBINE D'INDUCTION.
ÉTUDE DES EFFETS QU'ELLE PRODUIT.

§ 1. — DESCRIPTION DES BOBINES D'INDUCTION. — APPAREIL DE MM. MASSON ET BRÉGUET. — BOBINE DE M. RUMKORFF,

Les courants induits que l'on obtient avec l'appareil de MM. Masson et Bréguet peuvent acquérir une intensité remarquable lorsque les bobines qui servent à les produire ont des longueurs convenables et que les spires sont bien isolées les unes des autres. Ils donnent des commotions violentes; dans le vide, dans l'œuf électrique, par exemple, lorsque la roue interruptrice est animée d'un mouvement de rotation convenable, ils jaillissent sous forme d'aigrettes presque continues entre deux conducteurs voisins placés à plusieurs centimètres de distance. En particulier, lorsqu'on transmet l'extracourant dans un récipient vide (l'œuf électrique).

« La boule et la tige positive sont entourées d'une auréole violette. La boule négative est nue et entre les deux boules existe une aigrette lumineuse, une espèce de flamme rougeâtre, dont la boule négative est la base. »

La machine de MM. Masson et Bréguet remplace donc, comme nous l'avons déjà dit, une batterie électrique, qui, dans un très-court intervalle de temps, pourrait se décharger et se recharger spontanément. Cette machine a, depuis l'époque où elle fut inventée, reçu des perfectionnements nombreux. Une discussion progressive a montré qu'il était avantageux de prendre pour inductrice la bobine intérieure, de la former d'un fil plus gros et plus court que celui de la bobine induite, laquelle doit être extérieure. On a vu aussi qu'il était bon de mettre au centre de la bobine inductrice un faisceau de fils de fer doux parallèles entre eux, mais ne se touchant pas; l'isolement des fils de l'une et l'autre bobine a été obtenu d'une manière presque absolue grâce à des enveloppes de gutta-percha. Enfin, des interrupteurs très-

commodes ont remplacé la roue dentée qui devait recevoir son mouvement d'un moteur étranger. Un de ceux dont on fait maintenant usage a été imaginé par M. de La Rive.

Interrupteur de M. de La Rive. — Le courant de la pile arrive à une borne de cuivre E (fig. 864), sur laquelle repose

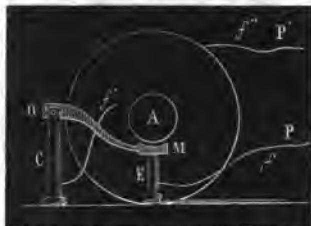


Fig. 864.

un marteau métallique M, mobile autour d'un axe horizontal O. De la borne E, l'électricité passe dans la bobine inductrice par le marteau, la colonne C et le fil f'; enfin elle retourne par f'' à la pile et le faisceau de fils de fer intérieur s'aimante, donc le marteau M est soulevé; mais alors, à l'instant même, le courant est interrompu, l'induction se produit, le marteau retombe, l'électricité de la pile reprend son cours, et les mêmes effets se reproduisent indéfiniment : on voit que la succession des courants induits dans la bobine extérieure va se prolonger aussi longtemps qu'on fera durer le courant de la pile. Le marteau et l'enclume sont platinés sur leurs faces en regard, et l'on règle la mobilité du marteau d'après la rapidité que l'on veut obtenir dans les interruptions.

Quelque commode qu'il soit, l'interrupteur que nous venons de décrire présente pourtant un inconvénient : il arrive quelquefois que le marteau est attiré par les fils de l'électro-aimant et y reste attaché, de sorte qu'il faut agir directement sur lui pour le faire retomber.

Interrupteur de M. L. Foucault. — M. Foucault a imaginé une disposition qui a, sur ce point important, apporté un perfectionnement notable à la machine. La figure 865 donne une idée de cette disposition. LDE est un ressort de cuivre, chargé à son extrémité supérieure d'un poids E, et dont on peut régler la longueur de manière à donner une valeur convenable à la durée des oscillations qu'il exécute quand on l'a écarté de sa position. A ce ressort est attachée une traverse FH fixée à peu près à angle

droit sur sa direction et qui porte deux pointes p et p'. Quand le ressort est incliné vers H, la pointe p' plonge dans une couche

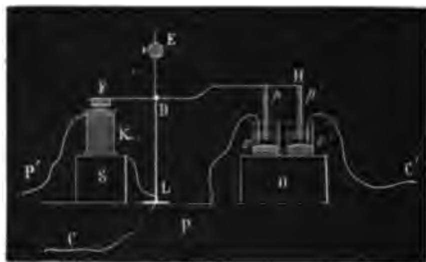


Fig. 865.

de mercure située dans le vase v' et ferme le circuit inducteur, l'un des pôles c' de la pile inductrice est en effet en communication permanente avec le mercure de v', tandis que l'autre pôle est relié au fil de la bobine inductrice et par lui à l'arc métallique CLDH. Le contact de la pointe p' avec le mercure de v' complète donc le circuit. Pour déterminer le mouvement oscillatoire du ressort LE et par suite les alternances d'ouverture et de fermeture du circuit inducteur, on a recours à l'action d'un électro-aimant K et d'une seconde pointe p fixée comme p' sur la traverse FH; la pointe p affleure le mercure du vase v, et sert à compléter le circuit PvpDLP' d'une petite pile additionnelle. Quand le courant passe, une pièce de fer doux F est attirée par la bobine, ce mouvement soulève la pointe p, le courant est interrompu, l'élasticité du ressort ramène p et p' au contact du mercure renfermé dans les vases polaires v et v', les circuits sont de nouveau fermés, et ainsi de suite. Les vases v et v', au-dessus du mercure qui en occupe le fond, renferment une couche de liquide isolant : de l'alcool concentré, par exemple.

Condensateur de M. Fizeau. — M. Fizeau a apporté à l'appareil que nous décrivons une modification qui a donné de très-bons résultats. Il a mis en rapport avec le circuit inducteur un condensateur GH (fig. 866), disposé de telle sorte qu'une de ses armures H soit en communication avec une colonne D en contact avec le pôle négatif f', tandis que l'autre G est en communication avec une seconde colonne C, placée entre l'interrupteur DE et la bobine a.

Quand un courant traverse le circuit inducteur, ce condensa-

teur se charge pour ainsi dire par un effet de dérivation, et en particulier au moment de l'ouverture du circuit en D, il dérive

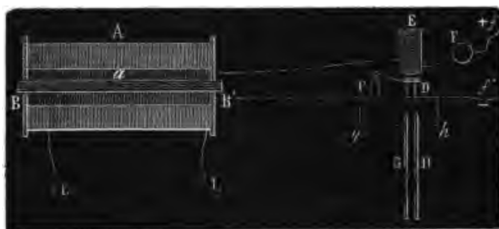


Fig. 866.

une partie de l'extracourant. Aussitôt après, le fluide positif de G et le fluide négatif de H se recombinent en suivant en sens inverse la route que suivait le courant inducteur. Sans doute alors, le fer doux *a* est plus rapidement ramené à l'état naturel, et l'expérience prouve qu'en ces circonstances les étincelles d'induction données par la machine sont plus fortes et plus longues, tandis que celles qui jaillissent en D sont notablement affaiblies.

Bobines de M. Rumkorff. — Les bobines que construit actuellement M. Rumkorff ont une puissance remarquable. Dans celle de la Faculté des sciences, le fil induit n'a pas moins de 100 kilomètres de longueur. On prend ordinairement pour courant inducteur celui d'une pile de 20 éléments de Bunsen (grand modèle), et dans ces conditions les étincelles ont jusqu'à 35 centimètres de longueur. Le condensateur est placé dans le socle en bois sur lequel repose l'appareil ; il se compose d'une lame de taffetas ciré, métallisée sur ses deux faces.

Dans ces grands appareils, la bobine induite est formée, d'après les indications de M. Poggendorff, d'un grand nombre de bobines plus petites, séparées les unes des autres par des cloisons isolantes perpendiculaires à l'axe. Le fil de chaque bobine partielle est relié par une de ses extrémités au fil de la bobine précédente et par l'autre au fil de la bobine suivante. De cette manière, les différences de tension de deux couches de fils voisines ne sont jamais excessives. Enfin, si une rupture arrive dans l'une de ces bobines partielles, il n'est pas nécessaire, pour y remédier, de refaire l'appareil entier. Il est bon d'ajouter que souvent ces séparations ne sont pas visibles

à l'extérieur, en sorte que la bobine paraît simple au premier aspect.

§ 2. — ÉTUDE DES EFFETS PRODUITS PAR LA BOBINE D'INDUCTION.

Actions chimiques. — Les décharges, comme nous l'avons déjà dit, résultent de la superposition d'une décharge de courant direct et d'une autre de courant inverse. Aussi elles n'agissent que faiblement sur une aiguille aimantée, et quand on les transmet à travers un voltamètre à eau, elles donnent des mélanges de gaz dans chacune des deux éprouvettes ; on peut toutefois rendre les effets des courants directs prédominants, il suffit, comme nous l'avons aussi indiqué, de ménager une interruption convenable sur le circuit induit ; les courants directs franchissent l'intervalle plus facilement que les autres, et après la transmission ils conservent encore une grande intensité, tandis que l'action des autres est annulée.

Charge d'un condensateur. — On peut très-commodément charger une batterie avec l'appareil dont l'étude nous occupe. On met l'une des extrémités du fil induit en contact avec l'une des armures, on fait communiquer l'autre avec la deuxième armure, seulement l'un de ces deux arcs conducteurs présente une interruption réglée de telle sorte qu'elle ne laisse passer presque que les courants directs. La batterie se charge très-rapidement et peut ainsi fournir à des intervalles très-rapprochés de fortes étincelles.

Stratification. — Études de M. Quet, de M. Rumkorff, de M. Grove. — MM. Masson et Bréguet, dans la description des effets qu'ils obtenaient avec leur machine, ont insisté sur les apparences remarquables que les décharges présentent quand on les fait passer dans le vide de l'œuf électrique. Nous avons reproduit la description qu'ils en donnent, *Ann.*, série 3, t. IV. Les résultats annoncés dans cette description ont été vérifiés depuis, et de nouvelles recherches sur le même sujet y ont ajouté des faits très-curieux et qui ne leur avaient pas apparu dans leurs premières expériences. Lorsque dans l'œuf électrique il reste un peu de vapeur ou de gaz permanent, on voit la gerbe lumineuse qui part du pôle positif se stratifier en des couches nombreuses séparées par des intervalles obscurs. Il en résulte des effets très-brillants, observés presque à la même époque par MM. Rumkorff, Quet et Grove, dont on accroît encore l'éclat en remplaçant l'œuf électrique par un tube présentant une série de renflements et d'étranglements

successifs. Enfin, on a constaté que le spectre de l'étincelle transmise à travers des gaz différents change avec la nature de ceux-ci.

Composition de l'étincelle. — Dans l'air, à la pression ordinaire, l'étincelle de la bobine de M. Rumkorff présente une autre particularité remarquable. On reconnaît, à simple inspection, qu'elle est formée de deux parties distinctes, un trait fort brillant et une auréole rougeâtre. Le trait est instantané, tandis que l'auréole a une durée appréciable. Pour le prouver, il suffit de faire sortir l'étincelle entre un plateau conducteur fixe et une boule qui se meut rapidement au-dessus du plateau et en restant dans un plan parallèle au plateau; le trait de feu reste simple, conserve sa forme, son aspect ordinaire, mais l'auréole semble s'étaler, parce que, par suite d'un effet de persistance d'impression sur la rétine, on la voit simultanément dans différentes positions qu'elle occupe successivement. On observe une apparence analogue quand on regarde l'étincelle dans un miroir tournant.

Recherches de M. Du Moncel. — L'idée de cette dernière expérience appartient à M. Lissajous. M. Du Moncel a fait voir qu'en soufflant sur l'étincelle on déplace l'auréole sans agir sur le trait de feu. Enfin M. Perrot a montré que ces deux parties de l'étincelle ont des manières d'agir distinctes sur les corps à travers lesquels on les transmet. Nous insisterons surtout sur la manière dont il établit que quand on sépare l'étincelle de la flamme, toute la puissance chimique se trouve dans cette dernière. Pour obtenir cette séparation, M. Perrot établit dans le circuit de l'étincelle une dérivation tellement combinée que la flamme suit le circuit principal et le trait de feu le fil de dérivation.

Recherches de M. Perrot. — « La partie la plus importante de l'appareil est celle où se fait la dérivation de la décharge de tension. Elle se compose d'un tube de verre plat, dont l'extrémité supérieure a été effilée et recourbée comme le représente la figure 867. On a soudé en *a* un fil de platine *ac* très-fin; ce fil suit dans l'intérieur du tube une direction parallèle à l'axe. Un second fil *bd*, soudé en *b*, vient se terminer un peu en arrière de l'extrémité du premier fil.

La distance *cd* et la dimension de l'orifice, varient avec la puissance de l'appareil d'induction dont on fait usage.

La seconde partie se compose de trois conducteurs; l'un, P, est destiné à mettre le fil *ac* en communication avec un des pôles A de l'appareil d'induction; l'expérience a démontré qu'il

est nécessaire que ce soit avec le pôle négatif. Le courant primitif aboutit donc au fil *ac*. Un second conducteur Q communique

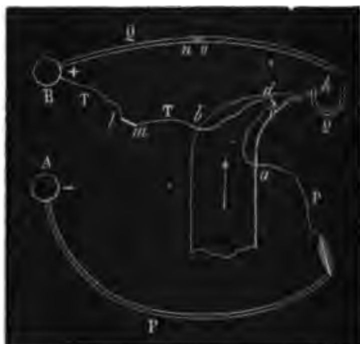


Fig. 867.

avec le pôle positif. L'étincelle éclate alors de *c* en *h*, et si l'on souffle par le tube un courant d'air énergique, on peut augmenter cette distance. On met alors le conducteur T en communication avec le fil *bd* et avec le pôle positif B de l'appareil d'induction ou avec un point quelconque du conducteur Q. A partir de ce moment, le courant primitif se trouve divisé en un courant principal qui passe par la flamme de *c* en *h* et le conducteur Q, et en un courant dérivé passant par le trait de feu de *c* en *d* et puis par le conducteur T.

Les choses ainsi disposées, si l'on interpose des voltamètres à sulfate de cuivre dans le circuit P et dans chacun des circuits Q et T, il est facile de s'assurer que le courant principal possède la même puissance chimique que le courant primitif, tandis que le courant dérivé par le fil T ne produit que des effets de tension c'est-à-dire des étincelles et des actions mécaniques. »

Recherches de M. de La Rive. — Nous terminerons ce que nous pouvons dire ici des effets obtenus avec les machines électro-magnétiques en décrivant la manière dont M. A. de La Rive a récemment fait entrer celle de M. Rumkorff dans la construction d'un appareil à l'aide duquel on peut reproduire, dans les cabinets de physique, des phénomènes qui présentent la plus grande analogie avec ceux de l'aurore boréale.

Dès 1849, M. de La Rive avait trouvé une manière fort remarquable de mettre en évidence l'action rotatoire que les

aimants exercent sur les courants produits par l'électricité ordinaire.

Voici comment il décrit son expérience au tome XXIX des *Comp. rend. de l'Acad. des sciences.*

« J'introduis dans un ballon de verre de 30 centimètres de diamètre environ, par une des deux tubulures dont il est muni, un barreau cylindrique de fer doux d'une longueur suffisante pour que l'une de ses deux extrémités aboutisse à peu près au centre du ballon et que l'autre ressorte de 3 à 4 centimètres de la tubulure. Le barreau est hermétiquement scellé dans la tubulure et recouvert dans son étendue, sauf à ses deux bouts, d'une couche isolante et épaisse de cire. Un anneau de cuivre entoure le barreau par-dessus la couche isolante dans sa portion intérieure la plus rapprochée de la paroi du ballon ; de cet anneau part une tige conductrice, qui, isolée avec soin, traverse la même tubulure que le barreau de fer, sans néanmoins communiquer avec lui, et se termine extérieurement par un bouton ou un crochet. Lorsque, au moyen d'un robinet ajusté à la seconde tubulure du ballon, on y a raréfié l'air jusqu'à 4 ou 5 millimètres, on fait communiquer le crochet avec l'un des conducteurs d'une machine électrique et l'extrémité extérieure du barreau de fer avec l'autre ; on voit les deux électricités se réunir dans le ballon en formant, entre l'extrémité intérieure du barreau de fer et l'anneau de cuivre qui est à sa base, une gerbe lumineuse plus ou moins irrégulière. Alors si l'on met l'extrémité extérieure du barreau de fer en contact avec l'un des pôles d'un fort électro-aimant, tout en ayant soin de bien conserver l'isolement, la lumière électrique prend un aspect tout différent. Au lieu de partir, comme précédemment, des différents points de la surface de la partie terminale du barreau de fer, elle part uniquement des points qui forment le contour de cette partie, de manière à former aussi un anneau lumineux continu. Ce n'est pas tout ; cet anneau et les jets lumineux ont un mouvement continu de rotation autour du barreau aimanté, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, suivant la direction des décharges électriques et le sens de l'aimantation. Enfin des jets plus brillants semblent partir de cette circonférence lumineuse sans se confondre avec ceux qui aboutissent à l'anneau et forment la gerbe. Dès que l'aimantation cesse, le phénomène lumineux redevient ce qu'il était précédemment et ce qu'il est généralement dans l'expérience connue sous le nom de l'œuf électrique. »

Depuis, M. de la Rive a substitué, dans cette expérience, les décharges de la machine de M. Rumkorff à celle des machines

ordinaires, et cette substitution lui a donné les meilleurs résultats.

Un fer doux F (fig. 868), couvert de gomme-laque à l'exception de ses parties extrêmes *a* et *b*, traverse la base inférieure d'un récipient cylindrique VV', dans lequel on peut faire le vide à l'aide d'une monture à robinet R ; à cette monture communiquent métalliquement deux arceaux de cuivre *t* et *t'*, qui soutiennent un cercle du même métal *cd*, dont le plan perpendiculaire à l'axe du fer doux passe par l'extrémité de cet axe et dont le centre se trouve sur ce même axe.

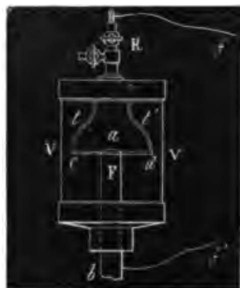


Fig. 868.

Lorsqu'on met la monture R et le bout *b* du fer doux en communication avec les pôles d'un appareil de M. Rumkorff, si le vide est fait dans l'appareil, on voit l'électricité jaillir sous forme de jet entre l'anneau et quelque point de la portion du fer doux qui n'a pas été couverte de gomme-laque, et alors si l'on aimante le fer doux en le soumettant à l'influence d'un puissant électro-aimant, on voit le jet s'épanouir et prendre un mouvement de rotation autour de l'aimant. Le phénomène est surtout fort brillant quand c'est le fer doux qui est en contact avec le pôle négatif de l'électro-aimant.

Ces jets lumineux et leurs mouvements rappellent les jets de l'aurore boréale. Pour arriver à une reproduction plus complète encore de ce dernier phénomène, M. de la Rive implante aux deux extrémités d'une grosse sphère de bois E (fig. 869) deux appareils sem-



Fig. 869.

blables à celui que nous venons de décrire. La sphère est entourée d'un anneau conducteur équatorial L et d'un demi-méridien *abcd*

également conducteur et qui s'étend d'un des fers doux à l'autre; l'un des pôles de la machine de M. Rumkorff est en contact avec l'anneau équatorial, l'autre avec un conducteur qui se bifurque pour se rendre aux robinets conducteurs de chacun des appareils polaires; pendant que les décharges se produisent dans l'un ou l'autre des deux récipients ou dans tous les deux à la fois, on peut constater que le méridien conducteur est traversé de courants électriques analogues à ceux qui agissent si énergiquement sur les aiguilles aimantées pendant les aurores boréales. Il suffit, pour manifester l'existence de ces deux courants, de mettre les deux bouts du fil d'un rhéomètre en contact avec deux quelconques des pinces *a, b, c, d,* qui font partie de l'anneau méridien conducteur.

CHAPITRE XV.

TÉLÉGRAPHES. — MOTEURS ÉLECTRIQUES.

§ 1. TÉLÉGRAPHES.

Dans le siècle dernier on avait songé à employer les décharges de bouteilles de Leyde pour envoyer instantanément des signaux à distance considérable. Après la découverte de la pile et avant celle de l'action des courants sur les aimants, Sœmmering proposa comme moyen télégraphique la décomposition de l'eau produite à grandes distances d'une pile dans autant de vases qu'il y a de lettres à l'alphabet. Enfin, en 1822, Ampère parlait, dans les termes suivants, de la construction d'une sorte de télégraphe à lettres.

« On pourrait, au moyen d'autant de fils conducteurs et d'aiguilles aimantées qu'il y a de lettres, et en plaçant chaque lettre sur une aiguille différente, établir, à l'aide d'une pile placée loin de ces aiguilles et qu'on ferait communiquer alternativement par ses deux extrémités à celles de chaque conducteur, une sorte de télégraphe propre à écrire tous les détails qu'on voudrait transmettre, à travers quelque obstacle que ce fût, à la personne chargée d'observer les lettres placées sur les aiguilles, en établissant sur la pile un clavier dont les touches porteraient

les mêmes lettres et établiraient la communication par abaissement. Ce moyen de correspondance pourrait avoir bien assez de facilités et n'exigerait que le temps nécessaire pour toucher d'un côté et lire de l'autre. »

M. Wheatstone est le premier qui ait réalisé un appareil télégraphique électro-magnétique. Dans ses télégraphes, comme dans tous ceux qui ont été construits depuis, un courant que l'on peut périodiquement interrompre à la station de départ vient, à des intervalles de temps plus ou moins rapprochés, et chaque fois qu'il est transmis par le fil de ligne, aimanter à la station

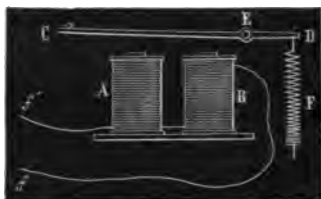


Fig. 870.

d'arrivée, un fer doux AB (fig. 870) autour duquel le fil s'enroule sous forme d'hélice.

A chacune de ces aimantations successives, l'électro-aimant ainsi constitué attire une lame de fer doux *c* qui, avant le passage du courant, était maintenue à petite distance de l'électro-aimant par l'action d'un ressort F.

Lorsque le courant cesse, le ressort ramène la lame à sa position première. Ces mouvements alternatifs se transforment de différentes manières, suivant l'espèce de télégraphe que l'on veut réaliser. Dans le télégraphe à lettres, ils règlent directement le mouvement de la roue à échappement d'une sorte d'horloge, à peu près comme le pendule règle celle des horloges ordinaires; la roue, dans sa rotation, emporte une aiguille mobile sur un cadran, et qui marche d'une lettre chaque fois qu'à la station de départ le courant est établi et chaque fois aussi qu'il est interrompu. L'électro-aimant et le mécanisme d'horlogerie sont renfermés dans une boîte ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle. Le cadran est sur une des faces extérieures, comme dans une pendule ordinaire. L'ensemble de ces pièces porte le nom de *récepteur*. Voici maintenant comment, à la station de départ, se trouvent déterminées les interruptions successives du courant.

L'un des pôles de la pile est *à la terre,* c'est-à-dire que le fil destiné à recueillir l'électricité de ce pôle s'enfonce dans le sol, dans un puits, ou bien encore, lorsque cela est possible, il es soudé aux tuyaux métalliques de quelque conduite d'eau souterraine; l'autre pôle est en contact permanent avec une borne *e'* (fig. 871), qui d'elle-même n'offre au courant aucune issue, mais

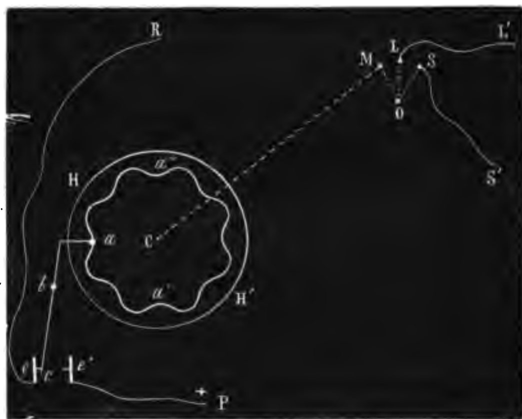


Fig. 871.

qui peut être mise en communication avec le fil de ligne LL', par le mouvement d'un levier métallique *abc,* mobile autour du point *b,* et qui touche d'une façon permanente une roue toute métallique HH'. Quand le levier s'appuie par son extrémité *c* sur la borne *e'*, l'électricité qu'il y prend est conduite par une lame métallique du centre C à une borne M, et de cette dernière, elle peut passer au fil de ligne LL'. Entre autres moyens de réaliser cette communication, on peut concevoir qu'une petite fourchette métallique mobile autour du point O, ait une de ses extrémités sur la borne M et l'autre sur une deuxième borne voisine L, laquelle est l'extrémité du fil de ligne.

Les choses ainsi disposées, en faisant passer périodiquemen. le levier de *e'* en *e* et de *e* en *e'*, on interrompt périodiquement le courant qui va de P à la ligne, et par suite de la station de départ à celle d'arrivée.

Quant à ces mouvements du levier, c'est précisément à l'aide de la roue HH' qu'on les obtient. Vers la circonférence de cette

roue, se trouve tracé un sillon *aa'*, ondulé, profond, qui présente treize festons complets, c'est-à-dire treize maxima et autant de minima de distance au centre.

Une goupille, fixée au levier perpendiculairement au plan de la roue, s'engage dans cette rainure, et, guidée par elle, imprime au levier un mouvement alternatif, dans lequel il touche tantôt la borne *e*, auquel cas le circuit est ouvert, et tantôt la borne *e'*. Dans ce cas, le circuit est fermé. La roue motrice tourne sous un cadran métallique fixe, divisé en vingt-six cases. L'opérateur la fait tourner à l'aide d'une alidade extérieure qu'il arrête à sa volonté sur une quelconque de ces vingt-six cases. Le mouvement doit toujours se faire dans le même sens. Le courant de la pile est ouvert toutes les fois que l'alidade est sur une case d'ordre pair. La roue H', le levier *abc*, le conducteur CM, les bornes M, L, S, le pivot O et la fourchette qui pivote autour de lui, sont fixés sur une même planche et constituent le manipulateur; toutefois, il faut bien remarquer que toutes ces parties servent aussi à la réception des dépêches. La borne S est en communication avec l'un des fils d'une sonnerie dont l'autre fil est à la terre. Lorsqu'au lieu de faire communiquer M et L, on fait communiquer L et S, tout courant qui arrive par le fil de ligne fait immédiatement marcher la sonnerie, et donne ainsi un signal au stationnaire.

Les règles d'après lesquelles la correspondance se fait entre deux stations sont les suivantes. Lorsque l'on est au repos, les manipulateurs des deux stations sont au zéro; de plus, de part et d'autre, le fil de ligne communique avec un conducteur qui se rend aux sonneries et de là à la terre. Lorsqu'un des stationnaires veut attaquer l'autre, il rompt la communication entre le fil de ligne et sa propre sonnerie, il fait communiquer M et L, et met l'alidade de sa roue ondulée sur la case 1 du cadran; le courant est lancé dans la ligne et marche à la sonnerie du deuxième stationnaire. Cet effet produit, le premier stationnaire complète le tour de l'alidade de son manipulateur et se remet au zéro. La ligne communique alors avec son récepteur par la voie toute métallique MC *abc* R, et aussitôt que le second stationnaire est prêt, il l'indique en faisant sur son manipulateur un tour complet qui se répète forcément sur le récepteur du premier.

Celui-ci transmet alors sa dépêche. Supposons qu'il veuille écrire *Rouen*. Il tourne son manipulateur régulièrement à partir du zéro, s'arrête un instant sur *R*, puis sur *o*, puis sur *u*, puis sur *e*, puis enfin sur *n*, sans jamais revenir en arrière, et s'il ne

veut rien dire autre chose après l'*n*, il s'arrête un instant sur le Z et se remet enfin au zéro.

Le second stationnaire répète la dépêche. Le premier lui répond *bien*, et tous deux laissant leur alidade au zéro, remettent le fil de terre en communication avec leurs sonneries respectives.

Nous ajouterons encore deux remarques : 1° le récepteur est un appareil d'horlogerie; il faut donc avoir soin de le remonter; 2° souvent ce récepteur se trouve dérangé pendant le travail; il est toujours facile de le remettre, car une petite tige, qui sort à l'extérieur de la boîte dans laquelle l'appareil est renfermé permet de faire marcher à la main la lame CD (fig. 870) et de remettre ainsi l'aiguille au zéro.

Dans les télégraphes de Morse, on emploie une écriture conventionnelle, dont les lettres sont formées de points et de petites lignes qui se succèdent dans un ordre déterminé.

Un des grands avantages de ces derniers appareils, c'est qu'en les employant on inscrit réellement la dépêche, et dès lors les contrôles sont toujours faciles.

Toutes les fois que le circuit du récepteur est fermé, l'électro-aimant, qui en constitue la pièce essentielle, attire, comme dans le télégraphe à lettres, une lame de fer doux. Celle-ci porte une sorte de crayon qui appuie sur une bande de papier, laquelle s'avance horizontalement sous l'action d'un mouvement d'horlogerie. Si le courant ne dure qu'un instant, le crayon marque un point sur la bande; il trace une petite ligne si le contact persiste un peu plus longtemps. Dans tous les cas, aussitôt que le circuit est ouvert, un ressort relève la lame. Pour fermer ou ouvrir alternativement, le circuit de la ligne, le stationnaire du point de départ n'a, de son côté, qu'à abaisser ou à relever un levier dont tous les mouvements se trouvent reproduits à la station d'arrivée. Quelquefois le courant de la ligne ne sert qu'à ouvrir ou à fermer, à la station d'arrivée, le circuit d'une deuxième pile qui fait marcher le récepteur. Le courant de ligne peut alors être beaucoup plus faible que celui à l'aide duquel on fait marcher le récepteur.

§ 2. MOTEURS ÉLECTRIQUES.

Horloges électriques. — Les télégraphes ne sont pas, il s'en faut beaucoup, les seules machines dont le jeu soit fondé sur la facilité avec laquelle on donne et on enlève à volonté le magnétisme à des électro-aimants plus ou moins éloignés. Dans les appareils divers qui peuvent servir à transmettre électriquement

la seconde, une horloge-mère, placée à proximité d'instruments astronomiques spéciaux, ouvre ou ferme, à chacun de ses mouvements d'aller et de retour, le circuit d'un électro-aimant adapté à un cadran récepteur dont l'aiguille marche par la transmission des mouvements successifs de l'armure de l'électro-aimant.

Lampe électrique. — En traitant des instruments d'optique, nous avons indiqué la lampe de MM. Soleil et Duboscq comme un appareil qui rend les plus grands services dans les cours d'optique. La lumière que l'on y utilise est celle qui a été pour la première fois obtenue et étudiée par Davy, celle de l'arc lumineux qui jaillit entre deux charbons voisins servant de pôles à une forte pile. Mais quand le courant se transmet ainsi entre ces deux charbons, il détermine une combustion qui les éloigne bientôt à une distance trop grande pour que le passage de l'électricité entre eux puisse subsister; l'arc s'éteint donc. Pour empêcher cet effet, on fait en sorte qu'un mouvement d'horlogerie rapproche les charbons l'un de l'autre, un peu avant que le progrès de la combustion n'ait amené l'extinction de l'arc. Le mouvement qui produit le rapprochement dont il s'agit est disposé de manière à faire avancer le charbon positif un peu plus que l'autre, parce que sa combustion est plus rapide. Il se répète périodiquement toutes les fois que l'écartement des charbons, en déterminant dans le circuit un accroissement suffisant de résistance, a diminué assez l'intensité du courant pour qu'un électro-aimant placé dans le circuit n'ait plus la force de contre-balancer l'action qu'un ressort exerce sur son armure. C'est au moment où cette dernière s'écarte de l'électro-aimant à une certaine distance que le mouvement d'horlogerie se produit : les charbons se rapprochent, le courant reprend son intensité première, l'électro-aimant sa force et les rouages sont de nouveau arrêtés. Les premiers régulateurs électriques ont été réalisés à peu près à la même époque, par MM. Staite et Petri en Angleterre, et par M. L. Foucault en France.

Application des moteurs électriques aux grandes orgues. — Les principes qui ont guidé dans la construction des télégraphes viennent aussi d'être appliqués dans la construction des grandes orgues. Un orgue doit être disposé de telle sorte que l'artiste qui tient le clavier puisse, en mettant le doigt sur telle ou telle touche, ouvrir une soupape souvent très-éloignée de lui, ou encore il faut qu'il puisse, en tirant un bouton, faire mouvoir, sans effort et à grande distance, de longues planches de chêne ou registres, qui se meuvent à frottement dans des coulisses exactement travaillées. Or, on conçoit que le mouvement des touches

d'un clavier ou celui d'un bouton puisse être très-commodément employé à ouvrir ou à fermer des circuits capables de donner la vertu magnétique à des électro-aimants voisins des soupapes qu'il faut faire mouvoir. Le problème a été industriellement résolu par M. Barker dans la construction de grandes orgues d'église.

Moteurs de M. Froment. — Ordinairement, dans les machines dites moteurs électriques, c'est à produire des mouvements de rotation qu'on emploie l'action périodiquement interrompue d'électro-aimants convenablement disposés. Nous nous bornerons à indiquer d'une manière très-succincte le principe des moteurs électriques que construit M. Froment.

Imaginons une roue métallique portant sur sa circonférence un nombre pair de fers doux, quatre par exemple, disposés comme on le voit en FF (fig. 872), et supposons quatre électro-

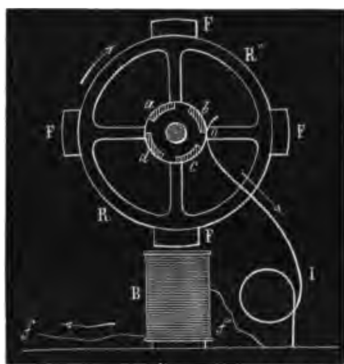


Fig. 872.

aimants dont les axes, rectangulaires entre eux, passent par le centre de la roue; un seul de ces électro-aimants est représenté sur la figure. On voit que son extrémité est rasée par les fers doux pendant le mouvement, sans toutefois qu'il y ait risque de contact.

Sur le pourtour de l'axe vient s'appuyer un ressort conducteur I, mais dans la portion où cet effet doit se produire, l'axe présente quatre secteurs non conducteurs égaux, séparés par quatre autres conducteurs aussi égaux entre eux, et de moindre angle au centre que les premiers.

Ces secteurs sont disposés de telle sorte que le ressort passe sur le secteur isolant au moment où chaque fer doux arrive en face de l'électro-aimant. Il quitte au contraire le secteur isolant pour toucher la partie conductrice de l'axe, au moment où chaque fer doux qui marche vers l'électro-aimant en est à une distance notablement inférieure à 45°. Or, quand ces dernières conditions sont remplies, le courant d'une pile arrive par l'axe au ressort I, et de là à la bobine B. Celle-ci attire le fer doux voisin et lui imprime une vitesse tangentielle; mais aussitôt que les fers arrivent à la position où change le signe de l'action des bobines sur eux, le contact est rompu en *o*, les bobines reviennent à l'état naturel.

Ordinairement les électro-aimants sont au nombre de huit. Le courant s'établit huit fois par tour de l'axe, mais alors l'étendue de chaque portion conductrice de la tranche sur laquelle le ressort s'appuie est notablement inférieure à $\frac{2\pi}{16}$, et lorsque commence un quelconque des contacts successifs, chaque fer doux est beaucoup plus voisin de l'électro-aimant vers lequel il marche que de celui dont il s'éloigne, et dès lors l'action de ce deuxième électro-aimant ne neutralise pas celle du premier.

FIN.

NOTES.

NOTE I.

ARC-EN-CIEL. — HALOS.

On ne voit l'arc-en-ciel que quand les rayons du soleil tombent directement sur un nuage qui se résout en pluie dans la partie du ciel opposée à l'astre. Cette condition et le développement des teintes prismatiques qui caractérisent le phénomène indiquent que les rayons par lesquels on le voit ont été successivement réfléchis et réfractés dans des gouttes de pluie, et dès lors on conçoit assez facilement que les bandes lumineuses qui le constituent doivent avoir, comme cela est en réalité, l'apparence d'arcs de cercles ayant leur centre sur la droite qui joint l'œil de l'observateur au centre du soleil. En effet, toute goutte d'eau qui nous renvoie un rayon solaire réfléchi et réfracté dans son intérieur doit avoir son centre dans le plan qui contient ceux du soleil et de notre pupille, et dans tout plan ainsi défini, les effets de réflexion et de réfraction qui produisent les arcs doivent, quels qu'ils soient, se reproduire identiquement les mêmes pour une même incidence. Le phénomène doit donc se développer symétriquement autour de la ligne qui joint l'observateur au soleil.

Ces premières données avaient été acquises à la science par les études d'Antonio di Dominis et de Képler. Mais pourquoi, toutes les fois que l'on voit un arc-en ciel d'ordre déterminé, la ligne menée de l'œil à une bande de l'arc définie par sa couleur, fait-elle invariablement le même angle avec la droite menée de l'œil au soleil, et cela quelle que soit la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon, et par conséquent aussi l'élévation au-dessus de l'horizon du sommet de l'arc considéré. C'est à Descartes et Newton que l'on doit la solution de la question.

Si l'on conçoit, divisé en pinceaux de sections excessivement petites le faisceau cylindrique de rayons qui, partis d'un point du soleil, tombent sur une goutte d'eau, il s'en faut beaucoup que chacun de ces pinceaux puisse revenir à notre œil en conservant une intensité suffisante pour produire sur nos organes une sensation appréciable. Cela tient à ce qu'en général ils s'épanouissent en éventail dans les réflexions et les réfractions qu'ils subissent; ils sortent alors de la goutte trop dilatés pour rester efficaces. Toutefois, les calculs de Newton ont montré qu'il existe *une* incidence pour laquelle un pinceau élémentaire peut émerger de la goutte en restant cylindrique et par suite efficace, après

avoir éprouvé *une* réflexion à l'intérieur. Il existe une autre incidence pour laquelle le pinceau émerge efficace après avoir éprouvé deux réflexions à l'intérieur. Une troisième pour laquelle le pinceau éprouve trois réflexions et les réfractions d'entrée et de sortie, sans éprouver cet épanouissement qui le détruit pour notre œil, et ainsi de suite..... La théorie montre que dans les deux premiers cas l'action de la goutte renvoie la lumière du côté de l'espace où est le soleil, et c'est pourquoi nous voyons le phénomène dans un nuage opposé à cet astre. Enfin, dans chaque cas, la théorie permet de calculer, comme nous allons le voir, l'angle que font, avec la droite menée de notre œil au soleil, les rayons par lesquels nous voyons chacun des points d'un quelconque des arcs colorés dans lesquels se résout l'arc-en-ciel total, et l'expérience vérifie complétement ces données théoriques.

Supposons le cas de deux réflexions intérieures. La fig. 873 représente la marche que suit dans la goutte le rayon incident SA : soit i l'angle

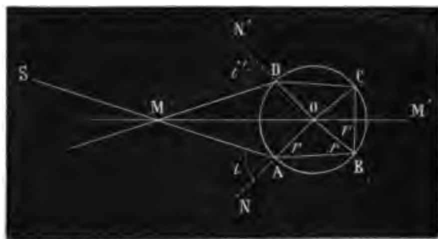


Fig. 873.

d'incidence, SAN, et r l'angle de réfraction correspondant. Il y a égalité entre tous les angles que, dans l'intérieur de la goutte, le rayon lumineux fait en B, en C, en D avec les lignes OA, OB... menées du centre O aux points A, B, C...; on en déduit que l'angle DOA est égal à $6r - 180$. Chacun des angles MAO, MDO est égal de son côté à $180 - i$. Posons DMA $= \Delta$, et il viendra $\Delta + 2(180 - i) + 6r - 180 = 360$; ou $\Delta = 2(i - 3r) + 180$. Pour le pinceau efficace, l'incidence est telle qu'elle peut éprouver quelques légers changements sans que la déviation en soit influencée; en d'autres termes, pour cette incidence, Δ ne doit pas changer quand i et r reçoivent des variations infiniment petites correspondantes di et dr. On doit donc avoir $di = 3dr$. D'autre part, on a $di \cos i = ldr \cos r$, si l est l'indice de réfraction de l'eau. Ainsi, pour déterminer i on a la relation :

$$di . \cos i = \frac{ldi}{3} \cos r,$$

$$9 \cos^2 i = l^2 \cos^2 r = l^2 \left(1 - \frac{\sin^2 i}{l^2}\right)$$

$$9 - 9 \sin^2 i = l^2 - \sin^2 i \qquad \text{ou} \qquad 9 - l^2 = 8 \sin^2 .$$

Souvent on donne l'angle i par son *cosinus* et l'on a alors :

$$\cos i = \sqrt{\frac{l^2 - 1}{8}},$$

Pour le cas d'une seule réflexion interne (voir fig. 874), la valeur de $\cos i$ serait :

$$\cos \mathrm{I} = \sqrt{\frac{l^2 - 1}{3}},$$

et en général il est facile de voir que pour n, réflexions internes, le *cosinus* de l'incidence efficace I_n est donné par la relation

$$\cos \mathrm{I}_n = \sqrt{\frac{l^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}},$$

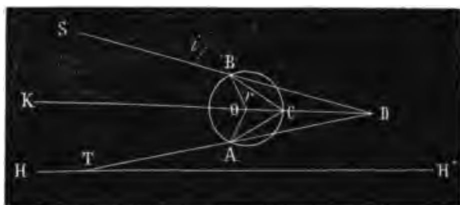


Fig. 874.

D'après ces formules, on trouve que si $n = 1$, la valeur de Δ pour les rayons rouges est 42° 1' 40", et pour les rayons violets 40° 17'.

Si $n = 2$... la valeur de Δ pour les rayons rouges est 50° 59', et pour les rayons violets 54° 9'.

Les mesures de Δ ont été faites avec soin par Newton dans le cas des arcs-en-ciel atmosphériques, et elles ont complétement vérifié la théorie. Il faut aussi faire remarquer : 1° que conformément aux indications de la théorie, l'ordre des couleurs est inverse dans les deux arcs-en-ciel atmosphériques ; 2° que l'arc extérieur cesse d'être visible quand le soleil s'élève à plus de 54° au-dessus de l'horizon, et que le premier disparaît quand la hauteur de l'astre est de 42° 1' ; on pourrait même observer un cercle complet si, le soleil étant peu élevé au-dessus de l'horizon, on se trouvait soi-même sur un pic assez haut pour que les portions les plus basses de la surface d'un cône droit, ayant pour demi-angle 42° 1' 40", et pour axe la ligne qui joint l'œil au soleil, rencontrassent le nuage avant de couper le sol.

Enfin, comme on peut répéter, pour les rayons venus de tous les

points du soleil, ce que nous avons dit des rayons émanés du centre de l'astre, l'arc total sera composé d'une série de bandes colorées dont chacune aura une largeur angulaire égale au diamètre apparent du soleil, et la largeur de l'arc sera égale à la différence des déviations des rayons rouges et violets accrue de ce même diamètre apparent.

L'intervalle compris entre les deux premiers arcs-en-ciel est en général très-sombre. En voici la raison. La déviation des rayons efficaces est maximum pour le premier arc, et minimum pour le deuxième; on s'en assure sans difficulté en calculant pour chaque cas l'expression de la dérivée seconde de la déviation. Il en résulte que les rayons renvoyés après une seule réflexion par les gouttes placées entre les deux arcs sont plus relevés que DT, fig. 874, et ne viennent pas à l'œil de l'observateur en T. Au contraire, ceux qui ont éprouvé deux réflexions dans ces gouttes viennent toucher terre avant de rencontrer l'observateur, et sont également perdues pour lui.

La théorie que nous venons de développer s'applique sans difficulté au cas où le nombre des réflexions éprouvées par le rayon dans la goutte est quelconque. A l'entrée dans la goutte, le rayon est infléchi d'un angle égal à $i-r$; à chaque réflexion intermédiaire il éprouve une déviation égale à $\pi - 2r$; en sortant il se dévie comme à l'entrée d'un angle égal à $i - r$. Toutes ces déviations successives se font toujours dans le même sens; la rotation totale du rayon a donc pour valeur :

$$2(i-r) + n(\pi - 2r).$$

On en déduit immédiatement, dans chaque cas, la valeur de l'angle que nous avons précédemment désigné par Δ.

Pour vérifier ces déductions générales dans les cas où n est plus grand que 2, M. Babinet, et depuis M. Billet, ont fait tomber sur des veines liquides ou des cylindres de verre bien transparents et verticaux de minces faisceaux de lumière solaire réfléchis horizontalement dans une chambre noire. Les réflexions et réfractions successives s'opérant dans une section de la veine ou du cylindre, on peut, à l'aide de cercles divisés, mesurer l'angle que fait la direction du rayon incident avec celle du faisceau efficace émergent. M. Billet a pu pousser les vérifications de la théorie jusqu'au 17e arc coloré.

Halos. — On désigne sous le nom de halos ces cercles irisés que l'on voit souvent se former autour du soleil ou de la lune par un temps qui, sans être nuageux, semble toutefois un peu voilé; on en observe quelquefois deux. Pour le plus petit, le demi-diamètre apparent est de 22° à 23°; il est de 46 pour le plus grand. Mariotte a proposé pour ces phénomènes une explication analogue à celle que Descartes et Newton ont donnée de l'arc-en-ciel. Il existe souvent dans les parties supérieures de l'atmosphère de petits cristaux de glace ayant la forme de prismes triangulaires équilatéraux, et dont la section droite est par conséquent un triangle dont tous les angles sont égaux à 60°. Que l'on conçoive un prisme de cette espèce ayant son axe perpendiculaire à un plan passant par la droite qui joint l'œil à l'astre ; les rayons qui, dans

ce plan, tombent de l'astre sur le prisme, pourront, après leur réfraction, couper la ligne qui joint l'œil à l'astre, si la base du prisme est convenablement orientée ; mais, pour qu'un pareil faisceau soit efficace à la sortie du prisme, il faudra que la déviation soit minimum. Soit I l'angle d'incidence pour lequel a lieu cette déviation minimum. L'angle de réfraction correspondant est égal à la moitié de l'angle réfringent du prisme de glace, c'est-à-dire à 30°.

D'autre part, l'indice de réfraction de la glace est 1,333. Donc l'angle i est défini par la relation $\sin i = 1{,}331 \sin 30$, d'où $i = 41°{,}30'$; et par suite la déviation D qui est donnée par la relation $D = 2i - 60$ a pour valeur 23, ce qui est précisément le demi-diamètre apparent du halo intérieur. D'après cela, on admet que ce premier cercle résulte de l'action que la lumière de l'astre éprouve en se réfractant à travers une infinité de ces prismes satisfaisant tous aux conditions que nous venons de définir. — Le deuxième cercle lumineux paraît dû à la réfraction des rayons dans une autre série des prismes de glace, orientés d'une façon différente.

NOTE II.

SUR LA CHALEUR DÉGAGÉE DANS LA COMPRESSION DES GAZ.

Lorsqu'on comprime brusquement un corps, on en élève en général la température. Les pièces de monnaie sont fortement échauffées par l'action du balancier qui les frappe, et, dans l'expérience du briquet à air, l'échauffement, que le fluide élastique éprouve pendant la rapide réduction de son volume, est assez forte pour enflammer de l'amadou. En acoustique, nous avons montré que la détermination de la vitesse de la propagation du son dans un fluide élastique conduit à la connaissance de l'élévation de température que l'on communique à ce fluide quand, sous la pression à laquelle on fait l'expérience, on le comprime de la 273e partie de son volume à zéro. Ainsi, soit x cette élévation de température, et V, la vitesse de propagation à zéro, on a :

$$V^2 = \frac{\Delta}{D_0} \times 0{,}76 \times g(1 + x),$$

Δ et D_0 étant les densités du mercure et du gaz à zéro, et g ayant à Paris sa valeur ordinaire 9,8088 (T. II, p. 35 à 39.).

En substituant à V, dans cette équation, les nombres qui représentent la vitesse de propagation du son dans les différents gaz simples ou composés (sur lesquels avaient porté ses observations), Dulong a trouvé que, pour ces gaz, les valeurs de x sont les suivantes :

Air	0,421
Oxygène	0,417

Hydrogène	0,409
Acide carbonique	0,337
Oxyde de carbone	0,423
Protoxyde d'azote	0,343
Hydrogène bicarboné	0,240

Différents observateurs ont depuis vérifié l'exactitude de ces nombres, en employant une méthode qui avait été indiquée et mise en usage pour la première fois par MM. Clément et Desormes, avant les travaux de Dulong.

Leur appareil consistait essentiellement en un ballon (fig. 876) d'une trentaine de litres de capacité, portant à sa partie supérieure une monture munie d'un robinet B à très-large ouverture, et communiquant avec un tube droit DE plongeant dans l'acide sulfurique et faisant fonction de manomètre.

On commençait par amener le gaz renfermé dans le ballon à avoir une pression P', un peu moindre que la pression extérieure P; la différence était mesurée sur le manomètre après le parfait établissement de l'équilibre de température. Les choses étant en cet état, la température extérieure étant t, on ouvrait le robinet B : l'air extérieur se



Fig. 876.

précipitait dans le ballon, et le liquide du manomètre descendait; au bout d'un temps très-court, il arrivait au niveau extérieur, et, en même temps, on cessait d'entendre le sifflement produit par la rentrée de l'air; aussitôt on fermait l'appareil, et on l'abandonnait à lui-même. Alors on voyait le liquide remonter peu à peu, et finalement la pression intérieure acquérait une nouvelle valeur P'', moindre que P, mais supérieure à P'. Ces variations successives du manomètre prouvaient évidemment qu'au moment de la rentrée de l'air extérieur, le gaz intérieur s'était échauffé par suite de la compression, et l'effet de cet échauffement, auquel participait toute la masse gazeuse finalement contenue

dans l'appareil, avait été d'élever jusqu'à P la valeur de la pression intérieure, qui retombait ensuite à P'', lorsque la chaleur dégagée par la compression s'était complétement dissipée.

L'observation des trois pressions P, P', P'', permet de calculer l'élévation de température ω, produite par la compression. En effet, pour que cette élévation ω de température puisse faire passer de P'' à P la force élastique du poids invariable de gaz que contient le ballon après la fermeture du robinet, il faut qu'elle satisfasse à la relation

$$\frac{P}{P''} = \frac{1 + (t + \omega)\alpha}{1 + t\alpha},$$

t étant la température extérieure et α le coefficient de dilatation des gaz, on en conclut:

$$\frac{P - P''}{P''} = \frac{\omega\alpha}{1 + t\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \frac{P - P''}{P''}\,\frac{1 + \alpha t}{\alpha} = \frac{P - P''}{P''}(273 + t$$

car α est égal à $\frac{1}{273}$.

La quantité de chaleur qui produit cette élévation de température, résulte de la compression de la masse de gaz renfermée primitivement dans le ballon. La diminution de volume résultant de cette compression peut se calculer, car si l'on appelle V le volume du ballon, et V'' celui qu'occupe finalement sous la pression P'' le gaz qui remplissait l'appareil sous la pression P', on a :

$$\frac{V}{V''} = \frac{P''}{P'}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{V - V''}{V} = \frac{P'' - P'}{P''}.$$

Ainsi, en comprimant le gaz d'une fraction de son volume primitif égale à $\frac{P'' - P'}{P''}$, on a produit une élévation de température ω égale à $\frac{P - P''}{P''}(273 + t)$. Cette élévation eût été un peu plus forte si l'échauffement n'eût porté que sur le gaz primitivement renfermé dans le ballon. Elle eût été plus forte dans le rapport de P'' à P', parce que, par suite de la rentrée de l'air extérieur, le poids du gaz intérieur s'est élevé dans le rapport de P' à P''. Ainsi, $\omega\frac{P''}{P'}$ est l'élévation de température que l'on produit sur un gaz pris à la pression P', en le comprimant d'une fraction de son volume à t, égale à $\frac{P'' - P'}{P''}$. En admettant la proportionnalité des quantités de chaleur dégagées et des compressions produites, on en conclut qu'en comprimant ce même gaz d'une fraction de son vo-

lume à t égale à $\frac{1}{273+t}$ on l'échaufferait d'une quantité x égale à

$$\omega \frac{P''}{P'} \frac{P''}{P''-P'} \frac{1}{273+t}.$$

En remplaçant ω par sa valeur, on a :

$$x = \frac{P''}{P'} \frac{P-P''}{P''-P'}.$$

Pour montrer le degré d'accord qui existe entre les résultats donnés par cette méthode et ceux que Dulong avait antérieurement obtenus, nous citerons le tableau suivant, extrait d'un mémoire de Masson, imprimé partiellement dans la 4e édition du *Traité de Physique* de Peclet.

TABLEAU DES VALEURS DE x POUR DIFFÉRENTS GAZ, D'APRÈS MASSON.

Air	0,41
Acide carbonique	0,31
Hydrogène	0,37

D'après la manière dont se détermine pour un gaz quelconque la quantité désignée par x dans le paragraphe précédent, le nombre $1+x$ exprime, pour un gaz quelconque, le rapport des quantités de chaleur nécessaires pour en élever la température de 1°, d'abord avec dilatation et sans changement de pression, ensuite sans dilatation et avec changement de pression.

C'est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant. Par suite, pour obtenir la chaleur spécifique d'un gaz sous volume constant, il faut, pour ce gaz, diviser par la valeur de $1+x$ correspondante le nombre qui représente sa chaleur spécifique à pression constante.

Lorsqu'on connaît la quantité de chaleur qu'il faut donner à l'unité de poids d'un gaz quelconque pris à t° et sous la pression $0^m,76$ pour en élever la température de 1° et sans dilatation, on en conclut aisément celle qu'il faudrait donner à l'unité de volume de ce gaz, dans les mêmes conditions, pour en élever aussi la température de 1°, et sans dilatation. En déterminant pour une série de gaz différents les quantités de chaleur capables de produire un pareil effet, sous des pressions voisines de $0^m,76$, et en les divisant par celle qui le produit sur l'air, on a obtenu pour quotients les nombres du tableau suivant :

Air	1,000
Oxygène	1,000
Hydrogène	1,000

Acide carbonique	1,249
Oxyde de carbone	1,000
Protoxyde d'azote	1,227
Hydrogène bicarboné	1,754

Ces nombres sont inversement proportionnels aux valeurs de x, qui ont servi à les calculer. Or, une pareille réciprocité devrait précisément avoir lieu s'il y avait égalité entre les quantités de chaleur que l'on dégage en comprimant tous les gaz d'une même fraction de leur volume à zéro; et, dès lors, l'égalité dont il s'agit peut être regardée comme une loi physique établie par l'expérience : c'est Dulong qui l'a découverte.

La compression n'est pas la seule action mécanique qui developpe de la chaleur; depuis longtemps on a remarqué l'élévation considérable de température qui se développe par le fait du frottement des corps. Rumford s'est livré à des recherches intéressantes sur la mesure des quantités de chaleur développées dans ces conditions. Depuis, les expériences de ce savant ont été reprises et developpées, et les recherches faites dans cette voie ont conduit à un résultat important.

On sait que le travail d'une force constante, pendant que son point d'application parcourt un certain chemin rectiligne, est le produit de la force, par le chemin parcouru et par le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et celle du chemin parcouru. On sait de plus que l'on prend pour unité de travail celui d'une force égale à un kilogramme, et dont le point d'application parcourt un mètre dans la direction de la force. Cette unité s'appelle le kilogrammètre.

Or, supposons qu'au milieu d'un calorimètre plein d'eau, on fasse frotter deux corps l'un contre l'autre, en imprimant à l'un d'eux un mouvement de rotation continu par l'action d'une machine convenablement disposée; quel que soit l'ajustement, quelle que soit la nature des corps frottants, pour que le frottement développe dans le calorimètre une unité de chaleur, il faudra, d'après les expériences de M. Joule, que le travail de la force employée à produire ce frottement ait une valeur constante. Cette valeur est comprise entre 430 et 440 kilogrammètres.

Réciproquement, on a trouvé, par les considérations suivantes, que le travail mécanique d'une force employée à produire sur un gaz simple une compression capable de dégager l'unité de chaleur, est encore représenté par le même nombre.

Soit un cylindre creux de matière non dilatable fermé à une extrémité BB' par une base fixe, à l'autre par un piston très-mobile PP'. Il est plein d'air à zéro. La distance PB évaluée en mètres est l, et la base est B en mètres carrés. Le poids d'air contenu est $Bl \times 1,293$ en kilogrammes, si la température est zéro et la pression $0^{m},76$, puisque $1^{k},293$ est le poids d'un mètre cube d'air dans ces conditions. Pour porter l'air à 1 degré, il faudra lui donner une quantité de chaleur 0,237 par chaque kilogramme (voir t. I, p. 349), soit en tout $Bl \times 1,293 \times 0,237$. Cette quantité produira deux effets : un échauffement de 1° et une dilatation. D'après la mesure de la vitesse du son et les

données physiques relatives à l'air telles qu'on les possède maintenant, le rapport $1 + x$, défini aux pages précédentes, peut être regardé comme 1,4. Alors $\frac{0,237}{1,4}$ est la quantité de chaleur qui élève 1^k de $1°$ sans dilatation, et $\frac{0,4 \times 0,237}{1,4}$ est la quantité qui produit la dilatation relative à 1°. La quantité qui produit dans l'air du cylindre la dilatation correspondante à 1° est donc

$$\frac{Bl \times 1,293 \times 0,4 \times 0,237}{1,4} = Q.$$

Alors le piston marche de $l \times 0,00367$ puisque, par hypothèse, l'enveloppe ne se dilate pas; mais sur chaque centimètre carré de surface, ce piston reçoit extérieurement une pression atmosphérique de $1^k,033$, donc sa base entière B éprouve une pression totale de $10000\ B \times 1,033$ kilogrammes, et, comme il marche de $l \times 0,00367$, le travail de la force qui le pousse est

$$10000\ B \times 1,033 \times l \times 0,00367 = T,$$

Une quantité de chaleur Q répond à un travail T; une unité de chaleur répondra à

$$\frac{T}{Q} = \frac{10000 \times 1,033 \times 0,00367 \times 1,4}{1,293 \times 0,4 \times 0,237} = 433.$$

On retrouve ainsi ce nombre 433, appelé équivalent mécanique de la chaleur auquel on est conduit lorsqu'on étudie le développement de chaleur par le frottement.

Pour l'air, l'azote, l'oxygène et l'hydrogène, le produit de la chaleur spécifique par le poids spécifique est à peu près le même, et pour ces mêmes gaz, le rapport $1 + x$ est aussi à peu près le même; alors, pour eux aussi, on retrouvera la même valeur de l'équivalent, en le calculant comme nous venons de le faire. Les gaz composés ne conduiraient pas au même résultat.

TABLE DES MATIERES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — J. CLAYE, IMPRIMEUR, RUE SAINT-BENOIT, 7.

ERRATA.

Page 13, majeur ou mineur, *lisez :* mineur.

Page 327, ligne 3 et 4, $\frac{N'}{n} \ldots, \frac{N''}{n}$, *lisez :* $N'n \ldots, N''n$.

Page 366, ligne 3, niveau ZZ′ — *lisez :* ZZ′ parallèle à AA.

Page 382, ligne 15, et la place $2\pi \frac{a_2}{a_1}$, *lisez :* et la tangente de sa phase sera $\frac{a_2}{a_1}$.

Page 395, ligne 5, soit $\frac{1}{2}\pi$, *lisez :* soit égale à $(2n + 1)\pi$.

Page 396, ligne 8, infiniment petits, *lisez :* très-petits par rapport à l'angle AOA′.

Page 397, ligne 2, intensité, et..., *lisez :* intensité, ces couches sont les seules qui intéressent dans les questions que l'on vient de traiter, et...

Page 417, Il y a une faute à la figure 691; le point F′ doit être au-dessus du miroir, dans une position symétrique de celle qui lui a été donnée.

Page 427, ligne 6, Ajoutez : On donne le nom de section principale à un plan d'incidence qui contient l'axe optique du cristal.

Page 564, ligne 4, la propriété, *lisez :* les propriétés.

Page 569, ligne 13, à même temps, *lisez :* dans le même temps.

Page 575, ligne 14, $f(T')$, *lisez :* $f(T)$.

Page 580, ligne 29, nature, *lisez :* natures.

Page 586, ligne 17, de D″ à D, *lisez :* de D′ à D.

Page 596, ligne 28, à la mettre, *lisez :* à les mettre.

Page 609, mettre le mot antérieure au lieu de postérieure, et réciproquement, dans le tableau de cette page.

Page 623, ligne 19, finals, *lisez :* définitifs.

Page 636, ligne 18, transmissions, *lisez :* transmission.

Page 648, ligne 22, Frauenhoffer, *lisez :* Fraünhofer.

Page 650, lignes 10 et 12, semblait prendre, *lisez :* prend.

Page 655, ligne 33, la quantité transmise, *lisez :* l'intensité de l'image ordinaire transmise.

Page 655, ligne 39, nous servant, *lisez :* nous en servant.

Page 667, ligne 16, M. Fiscau, *lisez :* Fizeau.